中學生通訊解題第 137-139 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
13701

有一個正整數 n，已知 n^2 可以表示為兩個連續正整數的立方差，且 $(2n+287)$ 是一個正整數的完全平方，求 n 的值。

簡答：2521

【詳解】

因　$n^2=(m+1)^3-m^3=3m^2+3m+1$，

所以

$(2n-1)(2n+1)=4n^2-1$

$=12m^2+12m+3=3\,(2m+1)^2$。

因 $2n-1, 2n+1$ 互質，所以這兩個數一個是奇數平方，另一個是奇數平方乘以 3。但若 $2n-1$ 是奇數平方乘以 3 且 $2n+1$ 是奇數平方，因

$2n-1\equiv 0 \pmod 3$，故知

$2n+1\equiv 2 \pmod 3$，但因平方數除以 3 的餘數必為 0 或 1，得矛盾！所以

$2n-1$ 是奇數平方。

設 $2n-1=b^2$（$b>1$ 是奇數），因

$2n+287$ 是一個正整數的完全平方，

設 $2n+287=a^2$（a 是奇數），得

$a^2-b^2=288$。所以 $a+b=144$,

$a-b=2$（因 $a+b$ 與 $a-b$ 均為偶數且 $2n+1$ 是奇數平方乘以 3，故其他組合皆不合），得 $b=71$。而 $2n-1=5041$,

$n=2521$，得 $2n+1=5043=3\times 41^2$，所以 $m=1455$。

【解題評析】

本題為難度較高的數論問題。不但概念需要正確，且要有較佳的數論解題技巧，特別是利用整數奇數與偶數特性進一步進行分析與解題。此題共有 2 人作答，但均無法正確解出最後的答案。因此此題需要指導老師進一步講解與指導。

問題編號
13702

甲、乙兩人同時解根式方程

$\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}=6$，抄題時，甲錯抄成

$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+b}=6$，結果得一根為 9；乙錯抄成 $\sqrt{x+a}+\sqrt{x+d}=6$，結果得一根為 4，已知二人解題過程無誤，又 a,b,d 均為整數，試求 a,b 之值。

簡答：$(a,b)=(5,7)$

【詳解】

據題設有 $\sqrt{9-a}+\sqrt{9+b}=6$，$\sqrt{4+a}+\sqrt{4+d}=6$，

即 $\begin{cases}\sqrt{9-a}=6-\sqrt{9+b} & \cdots\cdots(1)\\ \sqrt{4+a}=6-\sqrt{4+d} & \cdots\cdots(2)\end{cases}$，

由(1)式平方可得 $a+b+36=12\sqrt{9+b}$，

由 a,b 均為整數，因而 $\sqrt{9+b}$ 亦為整數，

同理 $\sqrt{4+d}$ 也為整數。

設 $p=\sqrt{9-a}=6-\sqrt{9+b}$，$q=\sqrt{4+a}$

（這裡 p,q 均為非負整數），

從(1), (2)式中消去 a，可得 $p^2+q^2=13$，

於是，可得 p,q 的兩組解為 $(p,q)=(2,3),(3,2)$。

因此，相應有 a,b 的兩組解為 $(a,b)=(5,7),(0,0)$。

由於 $(a,b)=(0,0)$ 時，甲所抄題目與原式相同，則沒抄錯，故需刪去。

所以，$(a,b)=(5,7)$。

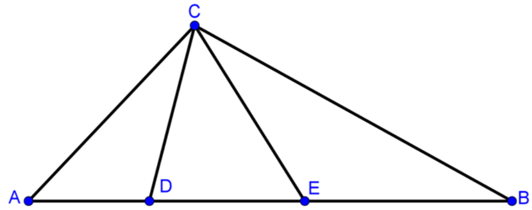
【解題評析】

本題只要由 a,b 為整數，得出 $p=\sqrt{9-a}$、$q=\sqrt{4+a}$ 亦為整數，再加上討論 $p^2+q^2=13$ 的整數解，並刪去 $(a,b)=(0,0)$，即可得出正確答案。大部分同學都能掌握題目重點，可惜在某部分的計算有失嚴謹，而被扣了一些分數實屬可惜，希望同學們以後不論遇到什麼樣的題目，都要抱持著耐心謹慎的態度。

本題共 6 人參與徵答，只有 1 人獲得滿分 7 分，平均得分 5.33 分。

問題編號
13703

在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}=21$, $\overline{AC}=14$, $\overline{AB}=28$，取邊 $\overline{AB}$ 上的兩點 D,E，使得 $\overline{AD}=7$，$\angle ACD=\angle BCE$，求 $\overline{BE}$ 的長。



。

簡答：12

【詳解】

設 $\overline{BE}=x \ \Rightarrow\ \overline{DE}=21-x$

設 $\overline{CD}=m$，$\overline{CE}=n$，由

$\angle ACD=\angle BCE$

得 $\overline{AD}:\overline{BE}=(\triangle ACD\text{面積}):(\triangle BCE\text{面積})$

$=\overline{CA}\times\overline{CD}:\overline{CB}\times\overline{CE}$

則 $7:x=14m:21n=2m:3n \quad \cdots\cdots(1)$

又由 $\angle ACD=\angle BCE$ 得 $\angle ACE=\angle BCD$

$\overline{AE}:\overline{DB}=(\triangle ACE\text{面積}):(\triangle BCD\text{面積})$

$=\overline{CA}\times\overline{CE}:\overline{CB}\times\overline{CD}$

則

$(28-x):21=14n:21m=2n:3m\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)兩式可得

$$\frac{7}{x}\cdot\frac{28-x}{21}=\frac{2m}{3n}\cdot\frac{2n}{3m}$$

$$\Rightarrow \frac{28-x}{3x}=\frac{4}{9} \Rightarrow x=12$$

，故 $\overline{BE}$=12。

【解題評析】

1. 本題為簡易的幾何問題，大部份的同學皆由 $\triangle ABC\sim\triangle ACD$ 及 $\triangle CDE\sim\triangle ACE$ 兩個相似的關係求出答案。

2. 張修展同學由 $\overline{BE}=\dfrac{\overline{BC}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos\angle CBE}$，搭配餘弦定理求出答案。

問題編號
13704

某國中二年級有四個班，從每班挑選桌球男女選手各一人，組成四對男女混雙。試問：在這四對男女混雙中，沒有任何一對選手是同班同學的組合方式有幾種？

簡答：9

【詳解】

設一、二、三、四班的男女選手分別為 a1、b1、a2、b2、a3、b3、a4、b4，則四對男女混雙中沒有一對選手是同班同學的組合方式有

(a1b2)(a2b1)(a3b4)(a4b3)
(a1b2)(a2b3)(a3b4)(a4b1)
(a1b2)(a2b4)(a3b1)(a4b3)
(a1b3)(a2b1)(a3b4)(a4b2)
(a1b3)(a2b4)(a3b1)(a4b2)
(a1b3)(a2b4)(a3b2)(a4b1)
(a1b4)(a2b3)(a3b2)(a4b1)
(a1b4)(a2b3)(a3b1)(a4b2)
(a1b4)(a2b1)(a3b2)(a4b3)

共 9 種組合方式。

【解題評析】

本題屬偏易的組合題，也有同學用排容（取捨）原理來算。大多數的同學跟詳解一樣是用列舉的方式來處理。要注意的是用列舉的方式時分類要細心，並小心對付重覆的情況。多數的同學都能算出正確的答案,但還是有少數的同學需再謹慎些。本題共 62 位同學參與徵答，有 42 位同學獲得滿分。

問題編號 13705

已知 n 為正整數，正整數 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 均為合數，且兩兩互質，

證明：$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}<\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$。

【命題】游明俐

【證明】

設 a_k 的最小質因數為 p_k $(k=1,2,\cdots,n)$，

因為 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 均為合數，所以

$a_k \ge {p_k}^2$，

又 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 為兩兩互質的合數，

因此 $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ 兩兩相異，

故

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\le\frac{1}{{p_1}^2}+\frac{1}{{p_2}^2}+\cdots+\frac{1}{{p_n}^2}$$

$$\le\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\cdots+\frac{1}{(2\cdot n-1)^2}$$

$$<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2\cdot 2(2\cdot 2-2)}+\frac{1}{2\cdot 3(2\cdot 3-2)}$$

$$\cdots+\frac{1}{2n(2\cdot n-2)}$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}[\frac{1}{2\cdot 2-2}-\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3-2}-\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$+\ldots+\frac{1}{2\cdot n-2}-\frac{1}{2\cdot n}]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n}$$

【解題評析】

先說明此題的解題想法：除了 2 以外的質數都是奇數，因此此題講白了就是：兩兩互質的 n 個合數的倒數和不大於 2 和從 3 開始的前 $(n-1)$ 個奇數的平方的倒數和，接著再找較大一些的上界，然後分拆、對消。

問題編號
13801

設正整數 a,b,c,n 滿足 $2^n=a!+b!+c!$，若 $a\ge b\ge c$，求序對 (a,b,c,n) 的數。

簡答：$(2,1,1,2)$, $(3,1,1,3)$, $(4,3,2,5)$, $(5,3,2,7)$

【詳解】

$2^n=a!+b!+c!=c!(\frac{a!}{c!}+\frac{b!}{c!}+1)$，又

$a\ge b\ge c$ 且皆為正整數，

故 $\frac{a!}{c!}+\frac{b!}{c!}+1$ 為正整數，則 $c!\,|\,2^n$，即

$c=1$ 或 2。

(1)若 $c=1$

根據奇偶性，可知 b 為奇數，即

$b=1$，此時 $2^n-a!=2$，

故 $a=2$ 或 3（若 $a\ge 4$，則

$4\,|\,2^n-a!$，與 $2^n-a!=2$ 矛盾）

代回原式驗算得到兩組解：$(2,1,1,2)$, $(3,1,1,3)$

(2)若 $c=2$

根據奇偶性，可知 a, b 為偶數，且

$2^n-a!-b!=2$，

同理 $b=2$ 或 3（若 $b\ge 4$，則

$4\,|\,2^n-a!-b!$，與 $2^n-a!-b!=2$ 矛盾）

(i) 若 $b=2$，可得 $2^n-a!=4$，此時

$a=2$ 或 3 檢驗發現均不合。

（若 $a\ge 4$，則 $8\,|\,2^n-a!$，與

$2^n-a!=4$ 矛盾）

(ii) 若 $b=3$，可得 $2^n-a!=8$，

此時 $a=4$ 或 5。（若 $a\ge 6$，則

$16\,|\,2^n-a!$，與 $2^n-a!=8$ 矛盾）

代回原式驗算得到兩組解：$(4,3,2,5)$, $(5,3,2,7)$

綜上，此題共有四組解：$(2,1,1,2)$, $(3,1,1,3)$, $(4,3,2,5)$, $(5,3,2,7)$

【解題評析】

本題除了將四組解算出來之外，仍需證明沒有其他解的存在。建議使用奇偶性及範圍來推論，較容易說明清楚。

問題編號
13802

求方程組

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ (x+y)(y+z)+(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)=-1 \\ x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-2 \end{cases}$$

的實數解。

簡答：

$(x,y,z)=(0,2,-1)$

或 $(0,-1,2)$ 或 $(2,0,-1)$

或 $(-1,0,2)$ 或 $(2,-1,0)$

或 $(-1,2,0)$

【詳解】

由第二式得 $x^2+y^2+z^2+3xy+3yz+3xz=-1$，

即 $(x+y+z)^2+xy+yz+xz=-1$，所以 $xy+yz+xz=-2\cdots(※)$。

由第三式得 $x(xy+xz)+y(xy+yz)+z(xz+yz)=-2$，

將（※）代入得 $x(2+yz)+y(2+xz)+z(2+xy)=2$，

所以 $2(x+y+z)+3xyz=2$，得 $xyz=0$。

若 $x=0$，則 $yz=-2$ 且 $y+z=1$，將 $z=1-y$ 代入 $yz=-2$ 得 $y^2-y-2=0$，

再因式分解得 $(y-2)(y+1)=0$，所以 $y=2$ 或 -1。

若 $y=2$，則 $z=-1$；若 $y=-1$，則 $z=2$，

得 $(x,y,z)=(0,2,-1)$ 或 $(0,-1,2)$，

同理，若 $y=0$，得 $(x,y,z)=(2,0,-1)$

或 $(-1,0,2)$，

若 $z=0$，得 $(x,y,z)=(2,-1,0)$

或 $(-1,2,0)$，

所以 $(x,y,z)=(0,2,-1)$ 或 $(0,-1,2)$ 或 $(2,0,-1)$ 或 $(-1,0,2)$ 或 $(2,-1,0)$ 或 $(-1,2,0)$。

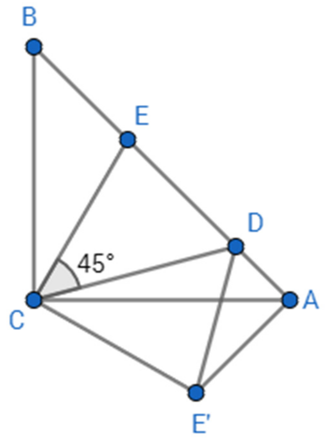
【解題評析】

本題因方程式具有 x,y,z 的輪換對稱性，因此先將方程式化簡找出 $x+y+z=1$、$xy+yz+xz=-2$、$xyz=0$。再由 $xyz=0$ 知 x,y,z 三數至少有一數為 0 解出 x,y,z，亦可將 x,y,z 轉換成三次方程式 $t^3-t^2-2t=0$ 的三個根，再因式分解解出此三根得 x,y,z 的值。

問題編號

13803

在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AC}=\overline{BC}$，$\angle ACB=90°$，$D, E$ 是邊 $\overline{AB}$ 上的兩點，且依 $A-D-E-B$ 順序，$\overline{AD}=5$，$\overline{BE}=12$，$\angle DCE=45°$，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？



簡答：225

【詳解】

將 $\triangle CEB$ 順時針旋轉 $90°$，得到 $\triangle CE'A$。

連結 $\overline{E'D}$。

易知 $\overline{AE'}=\overline{BE}=12$, $\angle E'AD=90°$，

故 $\overline{E'D}=\sqrt{\overline{AE'}^2+\overline{AD}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$。

由 $\angle DCE=45°=\angle DCE'$，

知 $\triangle DCE\cong\triangle DCE'$，

故 $\overline{DE}=\overline{E'D}=13$, $\overline{AB}=5+13+12=30$，

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{AB}{\sqrt{2}})^2=225$。

【解題評析】

本題需要做圖形旋轉，為較難之題目，其中有同學採用代數及幾何兩種方法解題，值得嘉獎。

問題編號

13804

設 $a,b,\cdots,j$ 是不同的正整數，它們寫成如圖的形狀。已知在圖中，被兩個箭頭指向的每一個數等於這兩個箭頭起點的數之和。問當 d 取怎樣的最小值時，可能有這樣的寫法？

$$\begin{array}{ccccccc}
a & \rightarrow & b & \rightarrow & c & \rightarrow & d \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & e & \rightarrow & f & \rightarrow & g \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & h & \rightarrow & i \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & j
\end{array}$$

簡答：20

【詳解】

由題設 $d=c+g=(b+f)+(f+i)$

$=(a+e)+(e+h)+(e+h)+(h+j)$

$=3(e+h)+a+j$。

為使 d 最小，可取 $e+h=3$。

不失一般性，可設 $e=1,h=2$。否則，若 $e=2,h=1$，只要將圖中關於直線 $\overleftrightarrow{fd}$ 進行一次對稱變換就可得到 $e=1,h=2$，

於是 $f=3$。

由 $a,b,\cdots,j$ 不同可得 $a\ge 4, j\ge 4$。

下面用反證法證明：

$a+j$ 的最小值為 11。

若 $a+j\le 10$，則 (a,j) 有四種可能

$(4,5),(4,6),(5,4),(6,4)$。

無論哪一種可能，都會使圖中出現相同的元素，因此 $a+j\ge 11$，$a+j$ 的最小值為 11。

此時，d 的最小值為 $11+3(1+2)=20$。

使 d 取得最小值 20 的圖是存在的，

如圖。

4	→	6	→	9	→	20
		↑		↑		↑
		2	→	3	→	11
				↑		↑
				1	→	8
						↑
						7

4	→	6	→	9	→	20
		↑		↑		↑
		2	→	3	→	11
				↑		↑
				1	→	8
						↑
						7

【解題評析】

本題只要先化簡 $d=3(e+h)+a+j$，為使 d 最小，不失一般性，可設 $e=1,h=2$，取 $e+h=3$。再用反證法證明：$a+j$ 的最小值為 11，得出 d 的最小值為 $11+3(1+2)=20$，最後舉出 $d=20$ 的例子。本題得 2 分的同學是只寫出 $d=20$ 的例子，沒有任何其他的說明。

本題得 5 分的同學主要是有掌握先分析 $d=3(e+h)+a+j$，再舉出 $d=20$ 的例子，但是沒有說明為什麼 $d=20$ 時會是最小，所以無法獲得滿分。

本題得 6 分的同學，最小值的說明最有條理，可惜計算錯誤。

本題得滿分 7 分的同學，雖然有說明 $a+j$ 的最小值為 11，可惜沒有活用反證

法，而多採取窮舉法方式說明，以致於說明內容冗長沒章法。建議同學們參考詳解之作法，學習善用反證法，達到以簡馭繁之效果。

本題共 42 人參與徵答，有 15 人獲得滿分 7 分，平均得分 3.88 分。

問題編號
13805

(1) 若斜率為 $-\dfrac{17}{23}$ 的直線，在第一象限內恰通過 6 個格子點（x 坐標與 y 坐標均為整數），這樣的直線有幾條？

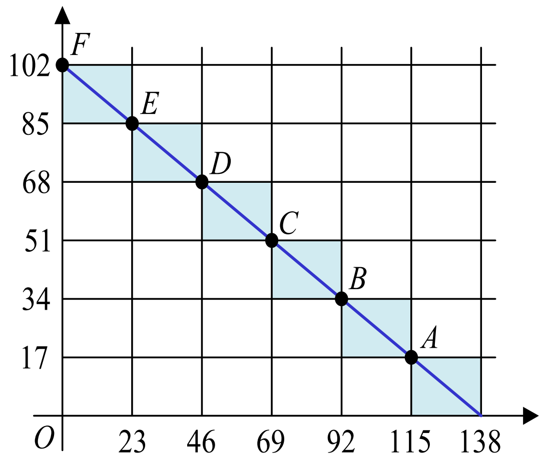
(2) 已知 p, q 為互質的正整數，若斜率為 $-\dfrac{q}{p}$ 的直線，在第一象限內恰通過 n 個格子點，則這樣的直線有幾條？

簡答：(1) 391　(2) pq

【詳解】

(1) 如圖，把 A 點在右下方的矩形中移動，那麼 B, C, D, E, F 自動會在其他方形中移動到對應的位置。所以 x 坐標從 116~138；y 坐標從 1~17，故有 $23\times17=391$ 條。

(2)



(3) 由(1)之討論可知，若 p, q 為互質的正整數，則不管要恰過幾個點，答案皆為 pq 條。

【解題評析】

此題參加徵答的有 5 位同學。本題討論時應注意坐標軸上的點是不屬於任一象限的！此次參與徵答的同學皆能注意到這點，因此多得到正確的答案。但是利用此直線上整數點坐標的一般式來做討論，過程略顯繁瑣！若能適當的利用如參考解答中的圖形幫助思考，以幾何的觀點代替代數的計算，往往能大幅簡化一個原本看似複雜的問題。

問題編號
13901

在黑板上寫下正整數 1, 2, ..., 2017，進行一次操作：選擇兩個數 a, b，用 $5a+3b$, $7a+9b$ 替換 a, b，則請問是否可能經過有限次的操作使黑板上的數變為 4, 8, ..., 8068？如果可能，請說明操作過程；如果不可能，請說明理由。

簡答：不可能達到

【詳解】

因為經過每次操作後，黑板上所有數之和增加

$(5a+3b)+(7a+9b)-a-b=11(a+b)\equiv 0$ (mod 11)

即經過每次操作後，黑板上所有數之和模 11 相同。

原本黑板上所有數之和為

$1+2+3+\cdots+2017=2017\times 1009\equiv 10$ (mod 11)

想使得操作後黑板上所有數之和為

$4+8+12+\cdots+8068\equiv 4\times 10\equiv 7$ (mod 11)

操作前後黑板上所有數之和模不同，因此不可能。

【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

   如果經過多次操作之後可以達到題意要求，則必須保持操作的不變性，不變性中很常加以檢驗的是”同餘” (mod k)相等。

   本題利用操作前後黑板上所有數之和 (mod 11)不同，說明不可能。

2. 以下列出一些基本的同餘性質給同學參考：

   (1) $a\equiv b(\bmod n)\Leftrightarrow a-b=kn\Leftrightarrow n\mid a-b$。

   (2) 反身性：$a\equiv a(\bmod n)$。

   (3) 對稱性：$a\equiv b(\bmod n)\Leftrightarrow b\equiv a(\bmod n)$。

   (4) 遞移性：$a\equiv b(\bmod n), b\equiv c(\bmod n)\Rightarrow a\equiv c(\bmod n)$。

   (5) $a\equiv b(\bmod n), c\equiv d(\bmod n)\Rightarrow a\pm c\equiv b\pm d(\bmod n)$。

   (6) $a\equiv b(\bmod n), c\equiv d(\bmod n)\Rightarrow ac\equiv bd(\bmod n)$。

3. 本題參與徵答者均作答正確，值得嘉許!

4. 本題參與徵答者有 4 人，皆拿到滿分 7 分。

問題編號
13902

求所有正整數 a,b,c，使得 a,b,c 滿足 $(a!)(b!)=a!+b!+c!$。

（定義 $n!=1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$ ，其中 n 為正整數）。

簡答：$(a,b,c)=(3,3,4)$

【詳解】

記 $\alpha(n)$ 為 n 的質因數分解式中 2 的指數。

若 $a\neq b$ ，不妨設 $a>b$ 。顯然， $b\neq1$ 且 $b\neq2$ 。

故 $c!=(a!)(b!)-a!-b!>(a!)(b!-2)>a!$
$\Rightarrow c>a$ 。

若 $a=b+1$，則
$(b+1)!b!=(b+1)!+b!+c!$ 。

因為 $c>a$ ，在同除以 $b!$ 後，可得

$(b+1)!=b+2+\dfrac{c!}{b!}$，

即 $(b+1)!=b+2+(b+1)(b+2)\cdots c$ 。

上式左邊是 $b+1$ 的倍數，而右邊不是 $b+1$ 的倍數，矛盾，故有 $a\geq b+2$ 。

再由
$\alpha(a!+b!+c!)=\alpha(b!)<\alpha((a!)(b!))$，矛盾。不可能。因此， $a=b$ 。

從而， $(a!)(a!-2)=c!$ 。

顯然， $a\geq3$ ，則 $3\mid a!$，

可得 $3\nmid(a!-2)=\dfrac{c!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdots c$ 。

由於連續三整數的乘積為 3 的倍數，因此， $c=a+1$ 或 $c=a+2$ 。

檢驗可知，只有 $c=a+1$ 時有解 $(a,b,c)=(3,3,4)$ ，這是唯一的解。

【解題評析】

本題共 6 人參與徵答，有 2 人獲得滿分 7 分，平均得分 4 分。

本題是難題，故作答同學較少，題型是屬於數論。作法是將 a,b 分成 $a\neq b$ 與 $a=b$ 討論。其中 $a\neq b$ ，要先掌握原題目 a,b 是對稱的，因此不妨假設 $a>b$，進而得出 $c>a$，即可將原式同除以 $b!$ 後，由兩側因倍數的關係得出矛盾，因此 $a=b$ 。 $a=b$ 代入原式後，必須先觀察出 $a\geq3$，進而得出 $c=a+1$ 或 $c=a+2$ ，即可得出唯一解 $(a,b,c)=(3,3,4)$ 。

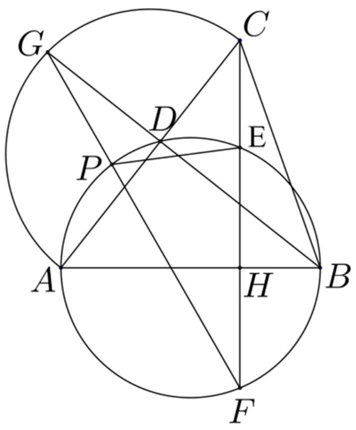
本題得 2 分與 4 分的同學都有做出正確解，但在說明上並不是十分完整，所以各扣部分分數。本題得滿分 7 分的同學，都努力呈現完整的說明與論證，特此嘉許。

問題編號
13903

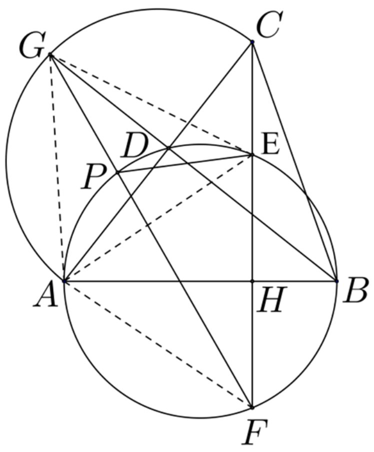
△ABC 為銳角三角形，以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓交 $\overline{AC}$ 於點 D，交 $\overline{AB}$ 上的高 $\overline{CH}$ 所在直線於點 E、F，以 $\overline{AC}$ 為直徑的半圓交 $\overline{BD}$ 的延長線於點 G，$\overline{GF}$ 交以 $\overline{AB}$ 為直徑的圓於點 P，證明：

(1) B、C、D、H 四點共圓。

(2) $\overline{PE}=\overline{PG}$。



【證明】



(1) 因為 $\overline{CH}$ 為 $\overline{AB}$ 上的高，所以 $\angle CHB=90^\circ$，

因為 $\overline{AB}$ 為直徑，所以 $\angle BDA=\angle BDC=90^\circ$，

因此 $\angle BDC=\angle CHB$，故 B、C、D、H 四點共圓。

(2) 作 $\overline{AE}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{EG}$，

由母子性質，得 $\overline{AF}^2=\overline{AH}\cdot\overline{AB}\cdots\cdots(1)$

$\overline{AG}^2=\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdots\cdots(2)$

又 B、C、D、H 四點共圓，則 $\overline{AH}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}\cdot\overline{AC}\cdots\cdots(3)$

由(1)(2)(3)，$\overline{AF}=\overline{AG}$，$\angle AFG=\angle AGF$，

又 $\overline{AE}=\overline{AF}=\overline{AG}$，則 $\angle AGE=\angle AEG$，

又 $\angle PEA=\angle AFP$，則 $\angle PEA=\angle PGA$，

因此 $\angle PEG=\angle AEG-\angle PEA=\angle AGE-\angle PGA=\angle PGE$，

故 $\overline{PE}=\overline{PG}$。

【解題評析】

1. 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

   國中幾何題巧設輔助線是很重要的關鍵，如上證明，作 $\overline{AG}$、$\overline{AE}$、$\overline{AF}$，就適當的構造三角形，就有三角形的全等性質，因此得出 $\overline{PE}=\overline{PG}$。

2. 數學性質：

   (1) 四點共圓的充要條件。

   (2) 母子相似性質。

   (3) 圓冪性質。

   (4) 對同弧的圓周角相等。

   (5) 等腰三角形底角相等。

(6) 三角形底角相等則為等腰三角形。

(7) 三角形一外角等於不相鄰兩內角和。

3. 新北市文山國中沈執中、新北市文山國中陳彥睿的作答清晰有條理，值得嘉許。

4. 本題參與徵答者有 3 人，其中得 7 分者有 2 人：

問題編號 13904

從 1,2,3...,10 共 10 個正整數中任意選出若干個相異的數字，使得這些數字之和為奇數，共有幾種選法？

簡答：512

【詳解】

偶數不論有幾個其和必為偶數，奇數則必須要有奇數個其和才能為奇數

偶數：2,4,6,8,10 每個有選或不選 2 種可能，故共有 $2^5=32$ 種選法

奇數：1,3,5,7,9 當奇數選 1 個時有 5 種選法，當奇數選 3 個時有 10 種選法，當奇數選 5 個時有 1 種選法，故共有 16 種選法。

綜合以上共有 32*16=512 種選法

【解題評析】

由於此題難度不高，徵答情形十分踴躍，在 31 位應答同學中一共有 11 位獲得滿分 7 分 。

大部份的同學皆針對 1,2,3...,10 當中所取的數字個數採取討論，將每種情形都一一列出，其中有些同學順利解出正確答案 512 種，但有些可能因為過程中有所遺漏，導致最後答案較 512 種少。其中台中市大墩國中張修展同學的解法如下：

若從 1,2,3...,10 共 10 個數當中任意選出若干個相異的數字使其和為奇數，可以分成有取到 1 和沒取到 1 兩種情形，其中有取到 1 的情形，代表 2,3...,10 中所取的若干個數其和為偶數，假設有 X 種；其中沒取到 1 的情形，代表 2,3...,10 中所取的若干個數其和為奇數，假設有 Y 種，所求即為 X、Y 之和，然而 X、Y 之和恰為 2,3...,10 中 9 個數字中任意取若干個數的所有可能，即為 2 的九次方 512 種。

問題編號 13905

已知小建從數字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 中任意選（也可不選）幾個數字收集起來（不管順序），則他的選法中，沒有收集到兩個連續整數的方法共有幾種？

註：即求集合{1，2，3，4，5，6，7，8，

9}的子集合的個數，且子集合中不含連續兩個整數。

簡答：55

【詳解】

令 a_n 表示 1~n 個正整數中任意選（也可不選）幾個數字收集起來（不管順序），且沒有收集到兩個連續整數的方法，
若某一收集有含 n，則一定不含 $n-1$，即含 n 的方法數為 a_{n-2}，
若某一收集有不含 n，則可以含 $n-1$，即不含 n 的方法數為 a_{n-1}，
即 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$，又 $a_1 = 2, a_2 = 3$，可推得 $a_9 = 89$。

【解題評析】

本題徵答人數為 15 人，全部答對得 7 分者有 6 人，特別值得嘉許，大部份的同學皆由列舉法求得答案，有少算的同學，會依其討論的方式是否有條理酌予扣分；用遞迴方法算出答案的有：張修展及鄭百里同學。