從拉格朗日力學來分析太陽系內的天體軌跡

鄧新弘
高雄市立中山高級中學

壹、前言

牛論力學占了高中的物理課程內容至少三分之一以上。有關於天體軌跡這個主題，高中課程大多都假定行星繞著太陽做等速率圓周運動，頂多只提到克普勒三大經驗定律。筆者認為有兩個原因，其一是高中生對於微積分尚未熟悉，另一部分是牛論力學中需要用到許多的向量分析技巧，加深了對這個主題探討的難度，故筆者有了撰寫此文的動機。

本文主要分為三部分，第一部分是對於拉格朗日力學的簡介，第二部分是利用拉格朗日力學推論出太陽系內的天體軌跡為圓錐曲線，第三部分則是圓錐曲線軌道的討論，供作中學教師在教學上的參考。

貳、拉格朗日力學簡介

物理學家從許多領域認識到自然界中似乎存在這一原則:在每個領域裡，必能找到某一作用量為最小值，稱為最小作用量原理。在幾何光學裡，此作用量為光傳遞所耗費的時間，意思是指在選定起點與末點後，光會選擇傳遞花最少時間的路線來走。我們會發現利用此想法可推導出反射定律及折射定律，即幾何光學的全部，而事實上它們是相互等價的。而在力學裡，此作用量 S 則為拉格朗日量 L 對時間 t 做積分:

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(x,\dot{x})dt \qquad (1)$$

上式的意思是指在同樣起末點 $x(t_1)=x_1$、$x(t_2)=x_2$，針對不同的位置與時間函數 $x_1(t)$、$x_2(t)$......，會得到不同作用量 $S_1(x_1(t))$、$S_2(x_2(t))$......，而從最小作用量原理得知大自然總會選擇某一位置函數 $x_n(t)$ 進行，使得作用量 S 為最小值。從變分學的一些數學技巧 [1]，我們知道可利用拉格朗日方程式:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}}-\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x}=0 \qquad (2)$$

得出某一位置函數 $x_n(t)$ ，使得作用量 S 為最小值。

現在還有個問題，上述的拉格朗日量 $L(x,\dot{x})$的函數形式究竟為何?

若考慮的力學系統只包含保守力，則拉格朗日量 L 為動能 T 減掉位能 U:

$$L = T - U \qquad (3)$$

我們先把上面定義的拉格朗日量(3)式放進放入拉格朗日方程式(2)式，得到:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x} = 0$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial (T-U)}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial (T-U)}{\partial x} = 0$$

又動能 $T \equiv \frac{1}{2}m\dot{x}^2$，位能 U 只跟位置有關。

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(m\ddot{x}) + \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \qquad (4)$$

(4)式即為牛頓第二定律，從此來看我們已猜出拉格朗日量 L 在力學中的形式，即(3)式。

觀察拉格朗日方程式(2)式，可發現此式並不像牛頓第二定律 $\overline{F} = m\vec{a}$ 為向量式，因此在計算時不會遇到向量分析的困難。上面的討論只考慮到一個維度，若考慮平面下的兩個維度 x、y，則拉格朗日方程式為:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ ，} x_1 = x \text{ 、} x_2 = y$$

拉格朗日方程式也不一定要在笛卡兒座標下才能討論，也可在其他座標下討論，比方說極座標 (r,θ):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \text{ ，} x_1 = r \text{ 、} x_2 = \theta \qquad (5)$$

下一小節，我們主要利用拉格朗日方程式在極座標的表示，即(5)式。進行太陽系內天體軌跡的計算。

參、太陽系內的天體軌跡

由於太陽的質量遠大於太陽系內其他天體的質量，所以在此只考慮太陽與天體之間的萬有引力，不考慮天體間的萬有引力。

假設太陽的質量為 M，天體的質量為 m，此系統的拉格朗日量 L:

$$L=T-U=\frac{1}{2}m[\dot{r}^2+(r\dot{\theta})^2]+\frac{GMm}{r} \quad (6)$$

將(6)式代入拉格朗日方程式

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}-\dfrac{\partial L}{\partial r}=0\\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0\end{cases}$$

得到:

$$m\frac{d^2r}{dt^2}-m(\dot{\theta})^2r+\frac{GMm}{r^2}=0 \quad (7)$$

$$mr^2\dot{\theta}=\text{定值}\equiv\ell \quad (8)$$

由於萬有引力為向心力，不會造成力矩，所以天體的角動量為定值，故可知(8)式中的定值就是天體的角動量，我們把這個定值以 ℓ 表示。

利用連鎖律以及(8)式得:

$$\frac{d}{dt}=\frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}=\frac{\ell}{mr^2}\frac{d}{d\theta} \quad (9)$$

利用(9)式，可將(7)式化簡為:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\frac{1}{r})+\frac{1}{r}=\frac{GMm^2}{\ell^2} \quad (10)$$

(10)式微分方程的通解為:

$$\frac{1}{r}=C_1\cos\theta+C_2\sin\theta+\frac{GMm^2}{\ell^2} \quad (11)$$

上式中係數 C_1、C_2 為常數。

假定 $r=\dfrac{\ell^2}{GMm^2}$、$\theta=90^\circ$ 為天體軌道中的其中一點，則 $C_2=0$，(11)式化簡改寫:

$$\frac{(\frac{\ell^2}{GMm^2})}{r}=1+(\frac{\ell^2 C_1}{GMm^2})\cos\theta \qquad (12)$$

(12)式即為圓錐曲線的方程式。隨著 C_1 的數值不同，會分別有圓、橢圓、拋物線、雙曲線等軌跡。由此可知 C_1 的數值必與系統的總力學能 E 有關連。

為了找出 C_1 與力學能 E 的關係，我們列出:

$$E=\frac{1}{2}m(\frac{dr}{dt})^2+\frac{\ell^2}{2mr^2}-\frac{GMm}{r} \qquad (13)$$

利用(9)式和(12)式得:

$$\frac{dr}{dt}=\frac{C_1\sin\theta}{(C_1\cos\theta+\frac{GMm^2}{\ell^2})^2}\frac{\ell}{mr^2} \qquad (14)$$

將(14)式代入(13)式得:

$$\frac{\ell^2 C_1}{GMm^2}=\sqrt{1+\frac{2\ell^2 E}{G^2M^2m^3}} \qquad (15)$$

(15)式即為係數 C_1 與總力學能 E 的關係。

從這節的討論，我們可了解到太陽系內的天體軌跡為圓錐曲線，而總能量 E 將決定軌跡的種類。

肆、圓錐曲線軌道的討論

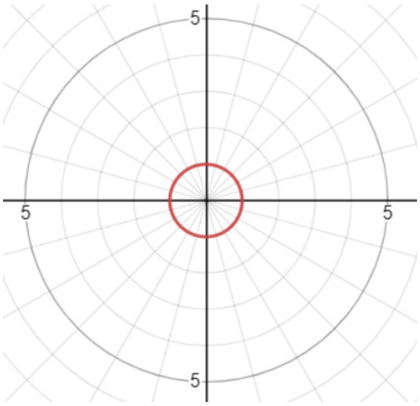
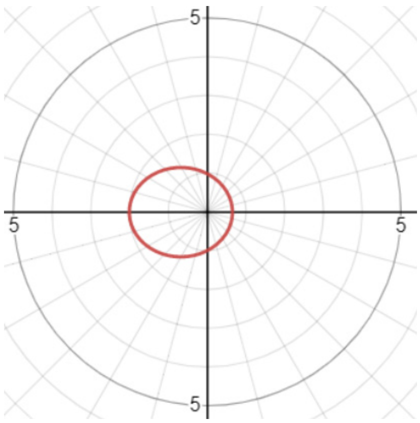
若令 $\varepsilon\equiv\dfrac{\ell^2 C_1}{GMm^2}$，則(12)式以及(15)式分別可改寫成:

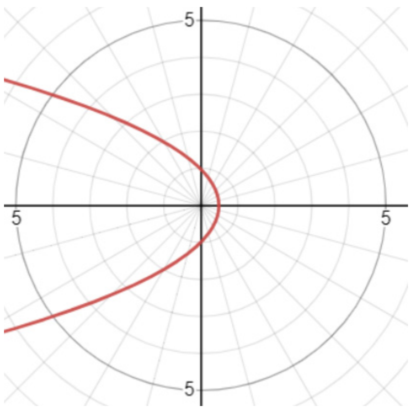
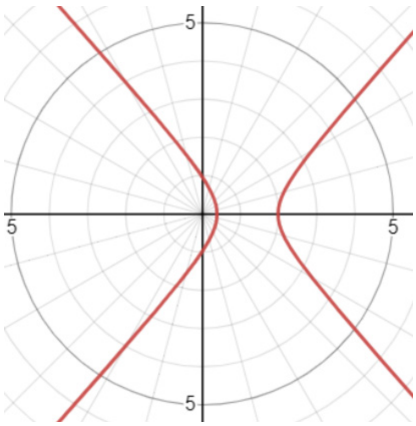
$$\frac{(\frac{\ell^2}{GMm^2})}{r}=1+\varepsilon\cos\theta \qquad (16)$$

$$\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2\ell^{2}E}{G^{2}M^{2}m^{3}}} \qquad (17)$$

ε 的幾何意義為圓錐曲線的離心率。

下面是以線上繪圖軟體 Desmos[3]繪製，當離心率 ε 不同時，圓錐曲線(16)式分別代表的幾何圖形:(為簡化繪圖，令 $\frac{\ell^{2}}{GMm^{2}}$ 等於 1)

$\varepsilon=0$	$\varepsilon=0.5$
	

$\varepsilon=1$	$\varepsilon=1.5$ (軌道為左側的雙曲線)
	

分四種情況討論:

(a) 當 $\varepsilon = 0$ 時，軌道為圓形，總力學能 $E = \dfrac{-GMm}{2r}$ 。

(b) 當 $0 < \varepsilon < 1$ 時，軌道為橢圓形，總力學能 $\dfrac{-GMm}{2r} < E < 0$ 。

(c) 當 $\varepsilon = 1$ 時，軌道為拋物線，總力學能 $E = 0$ 。

(d) 當 $\varepsilon > 1$ 時，軌道為雙曲線，總力學能 $E > 0$ 。

從上述討論可知，受到太陽束縛(換句話說，環繞著太陽運行)的天體軌道可為圓形或橢圓形；只經過太陽一次的則為拋物線或雙曲線，一去不復返。

伍、結論

本文從最小作用量原理說起，引出拉格朗日方程式。並利用拉格朗日方程式去推論出太陽系內的天體軌跡為圓錐曲線，而天體的總力學能會影響軌道的類別。過程中我們簡化了模型，不考慮天體間的重力作用，也不考慮太陽跟天體間的相對運動。

參考文獻

林琦焜：最小作用量原理。數學傳播 35 卷 1 期 15-28。

Stephen T. Thornton & Jerry B. Marion CLASSICAL DYNAMICS OF PARTICLES AND SYSTEMS

線上繪圖計算機 Desmos: https://www.desmos.com/calculator?lang=zh-TW