中學生通訊解題第 140 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14001

已知 $0<a<1$，且滿足

$$\left[a+\frac{1}{2018}\right]+\left[a+\frac{2}{2018}\right]+\left[a+\frac{3}{2018}\right]+\cdots+\left[a+\frac{2017}{2018}\right]=1009$$

，其中 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，

則 $[10a]$ 的值為何？

【簡答】5

【詳解】

因為 $0<a+\frac{1}{2018}<a+\frac{2}{2018}<a+\frac{3}{2018}<$

$\cdots<a+\frac{2017}{2018}<2$，

故 $\left[a+\frac{1}{2018}\right],\left[a+\frac{2}{2018}\right],\left[a+\frac{3}{2018}\right],$

$\cdots\cdots,\left[a+\frac{2017}{2018}\right]$

的值不是 0，就是 1。

其中有 1009 個 1，故　$0<a+\frac{1008}{2018}<1$

且　$1\le a+\frac{1009}{2018}<2$，

得　$\frac{1}{2}\le a<\frac{1010}{2018}$

$\Rightarrow\ 5\le 10a<\frac{10100}{2018}\fallingdotseq 5.00496$，

所以 $[10a]=5$。

【解題評析】

本題屬偏易的數論題，重點在數值的估計與高斯符號性質的運用，對於運算過程中可能出現估計值的時候，同學們的論述必須更加謹慎及明確，可盡量用不等式而非〝約等於〞的方式。

本題共有下列 19 位同學參與徵答，全數獲得滿分。

問題編號
14002

解不等式 $8x-1>a(x^2-2x-3)$，

其中 $0\le a\le 3$。

簡答：$\frac{1}{8}<x<\frac{7+\sqrt{73}}{3}$

【詳解】

設 $f(a)=a(x^2-2x-3)-(8x-1)$，

其中 $0\le a\le 3$，

則 $8x-1>a(x^2-2x-3)$ 與 $f(a)<0$ 同義：

(1) $x^2-2x-3>0$ 即 $x<-1$ 或 $x>3$ 時，

$f(a)$ 為遞增函數，$0\le a\le 3$，

而知 $f(a)\le f(3)$，故 $f(a)<0\Rightarrow f(3)<0\Rightarrow 3(x^2-2x-3)-(8x-1)<0$，

化簡為 $3x^2-14x-8<0\Rightarrow \frac{7-\sqrt{73}}{3}<x<\frac{7+\sqrt{73}}{3}$，

與 $x<-1$ 或 $x>3$ 聯立，解得 $3<x<\frac{7+\sqrt{73}}{3}$；

(2) $x^2-2x-3<0$ 即 $-1<x<3$ 時，$f(a)$ 為遞減函數，$0\le a\le 3$，

而知 $f(a)\le f(0)$，故 $f(a)<0\Rightarrow f(0)<0\Rightarrow -(8x-1)<0\Rightarrow x>\frac{1}{8}$，

與 $-1<x<3$ 聯立，解得 $\frac{1}{8}<x<3$；

(3) $x^2-2x-3=0$ 即 $x=-1$ 或 $x=3$ 時，$f(a)=-(8x-1)$，

而知 $x=-1$ 時，$f(a)=9$；$x=3$ 時，$f(a)=-23$，

但 $f(a)<0$，故 $x=3$。

綜合(1)(2)(3)，解得 x 值的範圍為

$$\frac{1}{8}<x<\frac{7+\sqrt{73}}{3}。$$

【另解】

$0<a\le 3$ 時，$8x-1>a(x^2-2x-3)\Rightarrow$

$\frac{1}{a}(8x-1)>x^2-2x-3$，

設直線 L：$y=\frac{1}{a}(8x-1)$，

拋物線 Γ：$y=x^2-2x-3$，

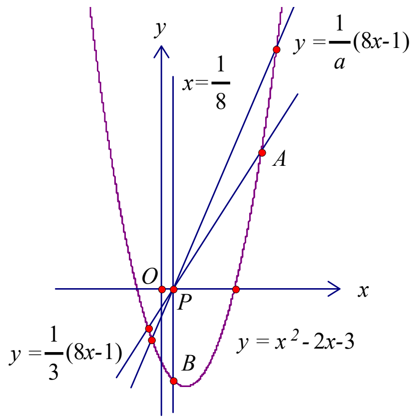
則所求為滿足 L 且在 Γ 上方的點之 x 坐標的範圍；

a = 0 時，$8x-1>a(x^2-2x-3)$

$\Rightarrow 8x-1>0$，

所求為直線 8x–1 = 0 右側的點之 x 坐標的範圍。

作圖如下。



其中點 P 之 x 坐標為 $\frac{1}{8}$；

點 A 是直線 $y=\frac{1}{3}(8x-1)$ 與拋物線 $y=x^2-2x-3$ 的交點，聯立解之，

$8x-1=3(x^2-2x-3)$

$\Rightarrow 3x^2-14x-8=0$，

得點 A 之 x 坐標為 $\frac{7+\sqrt{73}}{3}$，

由於 $0<a<3$ 時，直線 L 與拋物線 Γ 在右上側的交點恆在經過點 A 之鉛直線的右側，在左下側的交點恆在直線 $8x-1=0$ 的左側，

故所求不等式之解為 $\frac{1}{8}<x<\frac{7+\sqrt{73}}{3}$。

【又解】

(1) $a=0$ 時， $8x-1>a(x^2-2x-3)\Rightarrow$

$8x-1>0\Rightarrow x>\dfrac{1}{8}$。

(2) $0<a\leq 3$ 時， $8x-1>a(x^2-2x-3)\Rightarrow$

$$ax^2-(2a+8)x-(3a-1)<0$$

$$\Rightarrow \frac{a+4-\sqrt{4a^2+7a+16}}{a}<x<\frac{a+4+\sqrt{4a^2+7a+16}}{a}\cdots\cdots(A)，$$

因為 $a>0$，所以

$$\frac{a+4-\sqrt{4a^2+7a+16}}{a}=\frac{(a^2+8a+16)-(4a^2+7a+16)}{a(a+4+\sqrt{4a^2+7a+16})}$$

$$=\frac{1-3a}{a+4+\sqrt{4a^2+7a+16}}<\frac{1}{a+4+\sqrt{4a^2+7a+16}}<\frac{1}{8}；$$

因為 $0<a\leq 3$，所以

$$\frac{a+4+\sqrt{4a^2+7a+16}}{a}=1+\frac{4}{a}+\sqrt{4+\frac{7}{a}+\frac{16}{a^2}}\geq 1+\frac{4}{3}+\sqrt{4+\frac{7}{3}+\frac{16}{3^2}}=\frac{7+\sqrt{73}}{3}。$$

綜合(1)(2)，可知所求不等式之解為 $\dfrac{1}{8}<x<\dfrac{7+\sqrt{73}}{3}$。

【解題評析】

求解一元二次條件不等式，本非難事，但在其中添加了一個不定係數之後，問題有了很大的變化，如何解題乃有懸念。

本題題設不等式之解區間的上限在 a = 3 時，下限在 a = 0 時，這一個事實可能不難查知，因此，參與徵答的同學多數直接代入 a = 3 與 a = 0 分別解題，而得正解，這種做法雖然答案對了，但是對於 0＜a＜3 時的可能變化未有完整的論述，可以說是沒有抓住問題的核心，所以只能得到部分的分數。

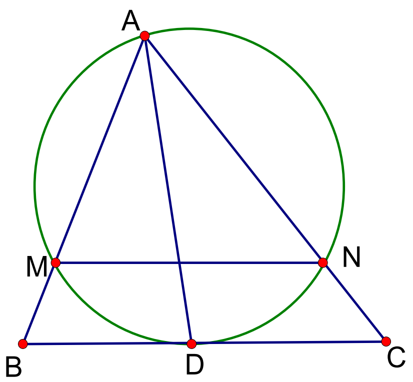
如同上述詳解，本題以 x 為變元，可歸屬為二次函數；但若以 a 為變元，亦可從一次函數的角度切入。以上第一種解法，反視 x2−2x−3 為一次項的係數，從而討論函數 f(a)之遞增或遞減與 x 值的關係，找到 x 值的範圍。

第二種解法，在坐標平面上描出拋物線 Γ 與動直線 L，重點在須知動直線 L 將因應 a 值的改變而繞著定點 P 旋轉，觀察這兩個圖形的交點變化，以圖明辨，即可掌握並找到解區間的範圍。

第三種做法有硬算的味道。有些參與徵答的同學如是解題，就是直接讓不定係數 a 參與運算，而得到以 a 表示的解之範圍，如【又解】中之(A)式，但這只能算是部分解答，如何完整說明 0≤a≤3 時(A)式之上限與下限，是解題重點。

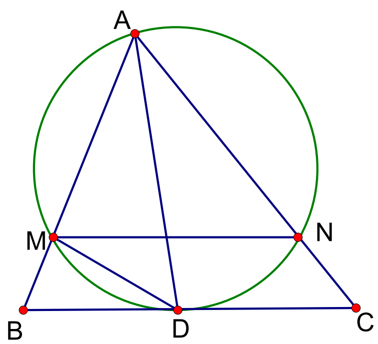
問題編號
14003

如圖，在 ΔABC 中，已知 $\overline{AB}=6, \overline{BC}=7, \overline{AC}=8$，$\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，且 D 在 $\overline{BC}$ 上。若過 A, D 且與 $\overline{BC}$ 相切的圓分別交 $\overline{AB}, \overline{AC}$ 於 M, N，試求 ΔAMN 的周長。



簡答：$\dfrac{63}{4}$

【詳解】



(1)　在 ΔABC 中，利用內分比性質，知 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{BD}:\overline{DC}$，

則可得 $\overline{BD}=\dfrac{6}{6+8}\times 7=3$

(2)　在 $AMDN$ 的外接圓中，利用外冪性質 $\overline{BM}\times\overline{BA}=\overline{BD}^2$，則

$\overline{BM}\times 6=3^2$，可得 $\overline{BM}=\dfrac{3}{2}$，故

$\overline{AM}=\dfrac{9}{2}$

(3)　連接 $\overline{DM}$

在 $AMDN$ 的外接圓中，

由 $\angle MAD=\angle NAD$，則

$\overset{\frown}{MD}=\overset{\frown}{ND}$，故

$\angle MDB=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{MD}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ND}=\angle NMD$

因此，$\overline{MN}//\overline{BC}$，可得

$\Delta AMN\sim\Delta ABC$

所以 ΔAMN 的周長為 ΔABC 的周長 $\times\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\dfrac{63}{4}$

【解題評析】

這個題目的解題重點是三角形的內分比性質、圓外冪性質（或切割線段性質）及三角形的相似找到答案，大部分的同學都能善用這些性質得到答案，唯有些同學表達上太過簡略，建議同學在表達上再多一點練習，可以讓閱讀的人更容易理解。另外，有同學借用高中的餘弦定理處理，也不失是一個好的方向。

問題編號
14004

在 $-3,-2,-1,0,1,2,3$ 的直線排列 $x_1,x_2,\cdots,x_7$ 中，求滿足 $x_1x_2 \le x_2x_3 \le x_3x_4 \le x_4x_5 \le x_5x_6 \le x_6x_7$

簡答：8

【詳解】

若 x_1,x_2 或 x_3 有一個為 0，則 x_4x_5,x_5x_6,x_6x_7 均為正數，得 x_4,x_5,x_6,x_7 同號。但 x_4,x_5,x_6,x_7 最多只有 3 個數同號，所以 x_1,x_2 或 x_3 均不為 0。

若 $x_4=0$，則 x_5,x_6,x_7 同號，x_1,x_2,x_3 也同號，得 $x_1x_2>0$。

但 $x_1x_2 \le x_3x_4=0$，所以 $x_4 \ne 0$。

若 $x_5=0$，則 x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4 均為負數，得 x_1,x_2,x_3,x_4 為兩個正數兩個負數。又 x_6,x_7 同號，但 x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,x_7 為三個正數三個負數，所以 $x_5 \ne 0$。

若 $x_6=0$，則 $x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,x_4x_5$ 均為負數，得 x_1,x_3,x_5 為三個正數或三個負數：

(1) 若 x_1,x_3,x_5 為三個正數，則 x_2,x_4 為兩個負數。
由 $x_1x_2 \le x_2x_3 \le x_3x_4 \le x_4x_5$ 得
$x_1 \ge x_3 \ge x_5 > 0$ 且 $x_2 \le x_4 < 0$，
所以有 3 種滿足條件的排列方法。

(2) 同理，若 x_1,x_3,x_5 為三個負數，有 3 種滿足條件的排列方法。

若 $x_7=0$，則 $x_1x_2,x_2x_3,x_3x_4,x_4x_5,x_5x_6$ 均為負數，得 x_1,x_3,x_5 為三個正數或三個負數：

(1) 若 x_1,x_3,x_5 為三個正數，則 x_2,x_4,x_6 為三個負數，
由 $x_1x_2 \le x_2x_3 \le x_3x_4 \le x_4x_5 \le x_5x_6$ 得
$x_1 \ge x_3 \ge x_5 > 0$
且 $x_2 \le x_4 \le x_6 < 0$，
所以有 1 種滿足條件的排列方法。

(2) 同理，若 x_1,x_3,x_5 為三個負數，有 1 種滿足條件的排列方法。

所以共有 8 種滿足條件的排列方法。

【解題評析】

本題的解法主要先考慮 0 的位置，再討論正數與負數的情形得到滿足條件的排列方法。

本題徵答人數 9 人，其中 4 位獲得滿分 7 分，其餘未獲滿分同學大都有找出 8 種滿足條件的排列方法，但並不能保證滿足條件的排列方法恰有 8 種，因此在說明上需完整交代理由。

問題編號
14005

從 2018, 2017, 2016, ⋯⋯寫到 3, 2, 1，形成一串很大的數字 201820172016⋯⋯321。將這串數字中的第 1 個數字「2」乘以 2，加上第 2 個數字「0」；將此結果乘以 2，再加上第 3 個數字「1」；然後再將結果乘以 2，加上第 4 個數字「8」；⋯⋯這樣繼續下去，直到加上個位數字 1 為止。再把這個新的數字

用一樣的方法處理，如此重複地操作下去，一直到最後得出一個一位數為止，請問這個一位數是多少？

簡答：9

【詳解】

設這串數字 $\mathrm{K}=201820172016\ldots\ldots321$ 為 $n+1$ 位數，則

$\mathrm{K}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0$，其中 $a_n, a_{n-1},\cdots\cdots, a_1, a_0$ 為 0, 1, 2, ⋯⋯, 9 中的數字，由於 $10^n\equiv 2^n$ (mod 8)，因此

$$a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 10^1+a_0$$

$$\equiv a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots\cdots+a_1\cdot 2^1+a_0$$

(mod 8)，再加上觀察末三位可知 $\mathrm{K}\equiv 1$ (mod 8)。

所以 K 以及之後每次操作後的數字除以 8 的餘數皆為 1，故最後一個一位數可能為 1 或 9。但每次操作後的數字皆大於 1，故答案為 9。

【解題評析】

本題共 7 人參與徵答，有 1 人獲得滿分 7 分，平均得分 3.86 分。本題題型是屬於數論，對中學生有一點難度，故投稿作答的同學較少，此題可先由觀察，猜測出答案應該為 9，再利用同餘的概念即可證出。基隆市八斗國中鐘奇恩同學不僅答案正確，也有作出完整的證明，值得讚許。其餘同學雖然有寫出正確解，但只有觀察及猜測的過程，欠缺立論充足的證明過程，故各扣部分分數。