以新增數據點(0,?)及逆推均差運算列表法直取多項式函數(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

(c) 再來要抓 1 次數項係數 a_1 值。直接觀察對照 B2.節新增 0 數據點的新原型均差運算表與 B3.節降 1 次數的運算表；可發現到新原型均差運算表自第 1 階運算的第 1 項數值以下的所有各階第 1 項數值都正確有序地排列在新降 1 次數的運算表格中自 p_1、1 階、2 階、3 階、⋯到 $n-1$ 階的第 2 項位置。此重大規律性即能引導應用於作逆推均差運算而得出 1 次數項係數，依據比對 B2. 節與 B3. 節的各階位置數字相互關係得知，將上述新原型均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；44、41、-42、21、-5、1 等按順序逐一填入新降 1 次數的表內形成下表格。

作新降 1 次數的運算表，實際填表演算情形解說如下；

x：	0	-3	-1	1	2	4	5	8
p_1：	?	44						
1 階：		?	41					
2 階：			?	-42				
3 階：				?	21			
4 階：					?	-5		
5 階：						1	1	

$\Downarrow$　　　　$\Downarrow$　　　　$\Downarrow$

x：	0	-3	-1	1	2	4	5	8
p_1：	?	44						
1 階：		?	41					
2 階：			?	-42				
3 階：				?	21			

4 階： −9 −5

5 階： 1 1

⇓ ⇓ ⇓

x： 0 −3 −1 1 2 4 5 8

p_1： −76 44

1 階： −40 41

2 階： −81 −42

3 階： 39 21

4 階： −9 −5

5 階： 1 1

這樣就完成了新增 0 數據點的新降 1 次數逆推運算表並抓到 a_1 數值為 −76。

(d) 接著要抓 2 次數項係數 a_2 值。直接觀察對照 B3.節的新降 1 次數逆推運算表與 B4.節降 2 次數的運算表；可發現到新降 1 次數表自第 1 階運算的第 1 項數值以下的所有各階第 1 項數值都正確有序地排列在新降 2 次數的運算表格中自 p_2、1 階、2 階、3 階、⋯到 $n-2$ 階的第 2 項位置。即將上述新降 1 次數逆推運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；−40、−81、39、−9、1 等按順序逐一填入新降 2 次數的表內形成下表格。作出新降 2 次數的運算表如下；

x： 0 −3 −1 1 2 4 5 8

p_2： ? −40

1 階： ? −81

2 階： ? 39

3 階： ? −9

4 階： 1 1

⇓ ⇓ ⇓

x： 0 −3 −1 1 2 4 5 8

p_2： ? −40

1 階： ? −81

2 階： ? 39

3 階： −11 −9

4 階：　1　1

⇓　⇓　⇓

x：　0　−3　−1　1　2　4　5　8

p_2：−133　−40

1 階：　−31　−81

2 階：　50　39

3 階：　−11　−9

4 階：　1　1

又完成了新增 0 數據點的新降 2 次數逆推運算表並抓到 a_2 數值為 −133　。

(e) 同理，仿效上述操作，持續編製出新降 3 次數逆推運算表，如下；

x：　0　−3　−1　1　2　4　5　8

p_3：　?　−31

1 階：　?　50

2 階：　?　−11

3 階：　1　1

⇓　⇓　⇓

x：　0　−3　−1　1　2　4　5　8

p_3：　83　−31

1 階：　38　50

2 階：　−12　−11

3 階：　1　1

再完成了新增 0 數據點的新降 3 次數逆推運算表並抓到 a_3 數值為 83　。

(f) 同理，再繼續編製出新降 4 次數逆推均差運算表，如下；

x：　0　−3　−1　1　2　4　5　8

p_4：　?　38

1 階：　?　−12

2 階：　1　1

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0	-3	-1	1	2	4	5	8
p_4：	5	38						
1 階：	-11	-12						
2 階：	1	1						

再得出新增 0 數據點的新降 4 次數逆推運算表並抓到 a_4 數值為 5 。

(g) 同理，最後再編製出新降 5 次數逆推均差運算表，如下；

x：	0	-3	-1	1	2	4	5	8
p_5：	?	-11						
1 階：	1	1						

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0	-3	-1	1	2	4	5	8
p_5：	-8	-11						
1 階：	1	1						

終於完成了新增 0 數據點的新降 5 次數逆推運算表並抓到 a_5 數值為 -8 。而所有編製的均差運算表中最末一列的數值同為 1，這就是首項係數的值 $a_6=1$ 。所以通過平面直角坐標系的這 7 個數據點，而滿足這些點的多項式函數型態為 $y=f(x)=x^6-8x^5+5x^4+83x^3-133x^2-76x+124$ ，其任一項的係數均在對應的逆推均差運算表內新增 0 數據點的位置呈現出來而被直接取出以構成完整正確的最適配 (best fitting) 多項式函數。

[2] 再繼續觀摩另一範例 ； 已知數據點： (1, 4) , (2, 7) , (3, 12) , (4,19) ,(5, 52) ,(6, 159) , (7, 2572)等 7 個坐標點，求滿足這些點的多項式函數 ? 解法如下；

(a) 先編製此 7 個點的橫式原型均差運算表，再新增一個數據點(0,?)，如下；

x：	0	1	2	3	4	5	6	7
y：	?	4	7	12	19	52	159	2572

1 階：		?		3		5		7		33		107		2413					
2 階：			?		1		1		13		37		1153						
3 階：				?		0		4		8		372							
4 階：					?		1		1		91								
5 階：						?		0		18									
6 階：							3		3										

完成新增數據點(0,?)後，開始作上表的逆推均差運算，以計算出常數項數值；

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0		1		2		3		4		5		6		7	
y：	2187		4		7		12		19		52		159		2572	
1 階：		−2183		3		5		7		33		107		2413		
2 階：			1093		1		1		13		37		1153			
3 階：				−364		0		4		8		372				
4 階：					91		1		1		91					
5 階：						−18		0		18						
6 階：							3		3							

完成了新增 0 數據點的新原型均差運算表並取到常數項數值為 2187　。

(b) 作新降 1 次數的運算表，將上述新原型均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；−2183、1093、−364、91、−18、3 等按序填入新降 1 次數的表內如下；

x：	0		1		2		3		4		5		6		7
p_1：	?	−2183													
		?	1093												
			?	−364											
				?	91										
					?	−18									
						3	3								

⇓　　　⇓　　　⇓

x： 0 1 2 3 4 5 6 7

p_1： -5342 -2183

3159 1093

-1033 -364

223 91

-33 -18

3 3

完成了新降 1 次數的運算表並取到 1 次數項係數值為 -5342 。

(c) 作新降 2 次數的運算表，將上述新降 1 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；3159、-1033、223、-33、3 等按序填入新降 2 次數的表內如下；

x： 0 1 2 3 4 5 6 7

p_2： ? 3159

? -1033

? 223

? -33

3 3

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

x： 0 1 2 3 4 5 6 7

p_2：4908 3159

-1749 -1033

358 223

-45 -33

3 3

完成了新降 2 次數的運算表並取到 2 次數項係數值為 4908 。

(d) 作新降 3 次數的運算表，將上述新降 2 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；-1749、358、-45、3 等按序填入新降 3 次數的表內如下；

x：	0	1	2	3	4	5	6	7
p_3：	?	−1749						
	?	358						
	?	−45						
	3	3						

⇓　　　⇓　　　⇓

x：	0	1	2	3	4	5	6	7
p_3：	−2215	−1749						
	466	358						
	−54	−45						
	3	3						

完成了新降 3 次數的運算表並取到 3 次數項係數值為 −2215 。

(e) 作新降 4 次數的運算表，將上述新降 3 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；466、−54、3 等按序填入新降 4 次數的表內並作逆差運算如下；

x：	0	1	2	3	4	5	6	7
p_4：	526	466						
	−60	−54						
	3	3						

完成了新降 4 次數的運算表並取到 4 次數項係數值為 526 。

(f) 同理，最後再編製出新降 5 次數逆推均差運算表，如下；

x：	0	1	2	3	4	5	6	7
p_5：	−63	−60						
	3	3						

完成了新降 5 次數逆推運算表並抓到 a_5 數值為 -63 且 $a_6=3$ 。而得出這多項式函數為 $y=f(x)=3x^6-63x^5+526x^4-2215x^3+4908x^2-5342x+2187$ 。

(g) 若以牛頓差值法運算，首先要製作出橫式原型均差運算表，如下；

x：	1		2		3		4		5		6		7
y：	4		7		12		19		52		159		2572
1 階：		3		5		7		33		107		2413	
2 階：			1		1		13		37		1153		
3 階：				0		4		8		372			
4 階：					1		1		91				
5 階：						0		18					
6 階：							3						

接著自 0 階、1 階、⋯到 6 階各取第 1 項數值，連同 x 列各數值依牛頓差值法則配型成下式；$y=f(x)=4+3(x-1)+1(x-1)(x-2)+0+1(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ + $0+3(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$ ，全部展開來，組合化簡後得下式；

$$y=f(x)=3x^6-63x^5+526x^4-2215x^3+4908x^2-5342x+2187$$

此得證的多項式函數恰與本節自(a), (b), ⋯ , (f)等操作過程所取到的完全相等。

(h) [比較]：現在再應用函數圖形平移法並配合均差運算過程演示的另一方法來求取上述的多項式函數，其橫式列表演算流程如下；

已知數據點： (1, 4) , (2, 7) , (3, 12) , (4,19) ,(5, 52) , (6, 159) , (7, 2572)等 7 個坐標點，求滿足這些點的多項式函數 ?

(h1) 先將原數據點(x , $f(x)$)假設為新數據點(v , $g(v)$)，使 $v_i=x_i-x_0$ $(0\le i\le n)$ ，且 $g(v_i)=y_i=f(x_i)$ ，形成一新構的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n}b_tv^t$ ，而此處 b_n $=a_n$ 。再編製出此試驗性多項式函數 z 的橫式均差運算表：

x：	1	2	3	4	5	6	7
v：	0	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v：	0	1	2	3	4	5	6

z：	4		7		12		19		52		159		2572
1 階：		3		5		7		33		107		2413	
2 階：			1		1		13		37		1153		
3 階：				0		4		8		372			
4 階：					1		1		91				
5 階：						0		18					
6 階：							$3=b_6$						

檢視此橫式均差運算表，得　$3=b_6$ 與 $4=b_0$　，因 $v=0$ 時，$z=4=b_0$。

(h2) 緊接著繼續對上表作逆推均差運算，逐一填入計算數字，詳情如下；

v：		0		1		2		3		4		5		6
z：		4		7		12		19		52		159		2572
1 階：	−364		3		5		7		33		107		2413	
2 階：		367		1		1		13		37		1153		
3 階：			−183		0		4		8		372			
4 階：				61		1		1		91				
5 階：					−15		0		18					
6 階：						3		3						

檢視此運算表，每一階運算列的第 1 項都出現一個新數字，依序為 −364, 367, −183, 61, −15, 3，而第 1 個新數字 −364 就是新降 1 次數運算表中的 1 次數項係數值，所以得　$-364=b_1$　。

事實上，(h2)節的運算表就是將原來試驗性多項式函數 z 運算表與新降 1 次數的運算表兩者結合成一個運算表，從這個結合表可檢驗到；第 0 階運算列的第 1 項數字 4 就是常數項的值，而在 1 階運算列中出現的第 1 項數字 −364 就是新降 1 次數運算表中的 1 次數項係數值，這樣的結合可精簡計算過程。

(h3) 持續對上表作逆推均差運算，逐一填入計算數字，完整統合後詳情如下；

v：	0	1	2	3	4	5	6
z：	4	7	12	19	52	159	2572

1 階： -364　3　5　7　33　107　2413

2 階： 834　367　1　1　13　37　1153

3 階： -681　-467　-183　0　4　8　372

4 階： 256　214　142　61　1　1　91

-45　-42　-36　-27　-15　0　18　(5 階)

3　3　3　3　3　3　3　(6 階)

再檢視此完整統合運算表，可得到第 0 階運算列的第 1 項數字 4 就是常數項的值，而在 1 階運算列中出現的第 1 項數字 -364 就是新降 1 次數運算表中的 1 次數項係數值，2 階運算列中出現的第 1 項數字 834 就是新降 2 次數運算表中的 2 次數項係數值，3 階運算列中出現的第 1 項數字 -681 就是新降 3 次數運算表中的 3 次數項係數值，4 階運算列中出現的第 1 項數字 256 就是新降 4 次數運算表中的 4 次數項係數值，5 階運算列中出現的第 1 項數字 -45 就是新降 5 次數運算表中的 5 次數項係數值，6 階運算列中出現的第 1 項數字 3 就是新降 6 次數運算表中的 6 次數項係數值。所以，直接得出的試驗性多項式函數 $z=g(v)=\sum_{t=0}^{n} b_t v^t$ 為 $z=g(v)=3v^6-45v^5+256v^4-681v^3+834v^2-364v+4$

(h4) 此多項函數 z 並非滿足已知數據點的多項式函數，需要再透過函數圖形平移法操作以轉換成正確多項函數；因這 $z=g(v)$ 為向左平移 1 單位的新函數，新函數可能是平行向左移或向右移若干單位，再將其還原即可。

由 $v=x-x_0$，得 $x=v+x_0=v+1$，將 $g(v)$ 還原成 $g(v+1)$ 的原函數，應用綜合除法，將 $g(v)=3v^6-45v^5+256v^4-681v^3+834v^2-364v+4$ 連續除以 $v+1$，得

3	-45	256	-681	834	-364	4	-1
	-3	48	-304	985	-1819	2183	
3	-48	304	-985	1819	-2183	2187	
	-3	51	-355	1340	-3159		
3	-51	355	-1340	3159	-5342		
	-3	54	-409	1749			
3	-54	409	-1749	4908			
	-3	57	-466				
3	-57	466	-2215				
	-3	60					
3	-60	526					
	-3						
3	-63						

$$g(v+1)=3(v+1)^6-63(v+1)^5+526(v+1)^4-2215\quad(v+1)^3+4908\quad(v+1)^2-5342\,(v+1)+2187$$

再將 $v+1$ 轉換成 x，即得到滿足原來 7 個數據點的原多項式函數 $f(x)$；

$$y=f(x)=3x^6-63\,x^5+526\,x^4-2215\,x^3+4908\,x^2-5342\,x+2187$$

這是應用連續綜合除法與函數圖形平移法所演示操作出的正確原多項式函數。

最後比較此 (h4)節與(g)節、(f)節的結果，三者都得出完全相等的多項式函數。

以三種不同方法各自運算都能得出完全相等的多項式函數。讀者可任意選擇。

C3. 若已知數據點中有(0, a_0)這個 0 點，則將這 0 點直接移到最左邊前緣第 1 位置處，然後再依循 C2 節的標準操作流程計算出多項式函數來，請看下一例；

已知數據點：$(-3,-21)$, $(-1,-7)$, (0, 9) , (2, 119) , (4,133) ,(5, 659)，操作如下；

(a) 先編製此 6 個數據點的橫式原型均差運算表，如下；

x：	0		-3		-1		2		4		5
y：	9		-21		-7		119		133		659
1 階：		10		7		42		7		526	
2 階：			3		7		-7		173		
3 階：				2		-2		3			
4 階：					-1		4				
5 階：						1					

(b) 作新降 1 次數的運算表，將上述原型均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；10、3、2、-1、1 等按序填入新降 1 次數的表內如下；

x：	0		-3		-1		2	4	5
p_1：	?		10						
		?		3					
			?		2				
				?		-1			
					1		1		

$\Downarrow$　　　　　　$\Downarrow$　　　　　　$\Downarrow$

x： 0 −3 −1 2 4 5

p_1： 55 10

15 3

12 2

−5 −1

1 1

(c) 作新降 2 次數的運算表，將上述新降 1 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；15、12、 −5、1 等按序填入新降 2 次數的表內並作逆推均差運算如下；

x： 0 −3 −1 2 4 5

p_2： 30 15

5 12

−7 −5

1 1

(d) 作新降 3 次數的運算表，將上述新降 2 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；5、 −7、1 等按序填入新降 3 次數的表內並作逆推均差運算如下；

x： 0 −3 −1 2 4 5

p_3： −13 5

−6 −7

1 1

(e) 作新降 4 次數的運算表，將上述新降 3 次數均差運算表內自 1 階以下的第 1 項數值；−6、1 等按序填入新降 4 次數的表內並作逆差運算如下；

x： 0 −3 −1 2

p_4： −3 −6

1 1

則由上述 5 個表格中直接取出各第 0 階的第 1 項數值，即得多項式函數如下；

$$y = f(x) = x^5 - 3x^4 - 13x^3 + 30x^2 + 55x + 9$$

(f) 若以牛頓差值法運算，首先要製作出橫式原型均差運算表，如下；

x：	0		−3		−1		2		4		5	
y：	9		−21		−7		119		133		659	
1 階：		10		7		42		7		526		
2 階：			3		7		−7		173			
3 階：				2		−2		3				
4 階：					−1		4					
5 階：						1						

接著自 0 階、1 階、⋯到 5 階各取第 1 項數值，連同 x 列各數值依牛頓差值法則配型成下式； $y = f(x) = 9 + 10x + 3x(x+3) + 2x(x+3)(x+1) - 1x(x+3)(x+1)(x-2)$ +1 $x(x+3)(x+1)(x-2)(x-4)$ ，全部運算展開來，組合化簡後即得下式；

$$y = f(x) = x^5 - 3x^4 - 13x^3 + 30x^2 + 55x + 9$$

此處再度證明本節中自(a), (b), ⋯ , (e)及(f)等操作過程所取到的完全相等。

只要熟悉上述逆推均差運算的標準操作流程，就可直取到適配多項式函數。

參、結論

[1] 整篇文意論述的主軸是：新增數據點(0, ?)並以配合實際計算編列出的均差運算表來逆向推演計算出常數項數值、1 次數項係數數值、2 次數項係數數值、3 次數項係數數值、⋯ 至 n 次數項係數數值。編製出的逆推均差運算表是因著各次數級多項式；$y = \sum_{t=0}^{n} a_t x^t$ 、 $p_1 = \sum_{t=1}^{n} a_t x^{t-1}$ 、 $p_2 = \sum_{t=2}^{n} a_t x^{t-2}$ 、⋯、 $p_{n-1} = a_n x + a_{n-1}$ 的秩序規範而成，在比對連續相鄰的 2 運算表間相同數值數字的關聯，而領略出這一類逆推演算列表法。最後再一舉依循各次數項係數順序排列有效力地展示出完整適配的多項式函數。

[2] 由所有解說分析知，只要依據標準操作流程正確完整的連續編製出同系列各逆推均差運算表，即可順利取到各表的 y 列、 p_1 列、 p_2 列、⋯等諸列第 1 項數值而迅速完成所屬的多項式函數。期間僅需作簡單的計算數字，無須作多項式的乘加展開運算，是非常簡便、既有巧思又能輕易上手的一種列表速算法。

[3] 本篇是一件自我發想的專屬創意作品，在年年教學期間歷經解惑、思索、追蹤、觀摩、

比對、參考、實作試驗等累積的經驗薰陶，而觸發出的靈感著作；藉以提供學生們實際操作理念,使增益理解並學習到由歸納數據分析所獲取實質具體意義的能力。如今,數值分析的效應極其強大,更真確的再體驗到數學擁有解決諸多生活與自然互動問題的厚實功能。

參考文獻

1. 均差（Divided differences）。維基百科，自由的百科全書。
2. 蔡聰明：多項函數的插值公式。**數學傳播季刊 157 期**（第 40 卷 1 期），2016 年 3 月出版發行。
3. 李輝濱：以均差運算列表法及函數圖形平移法求取多項式函數。**科學教育月刊----期**，2021 年 -- 月出版發行。
4. 黃武雄：**中西數學簡史 (**1980)。人間文化事業公司。
5. 林聰源：**數學史---古典篇** (1995)。凡異出版社。
6. 項武義：**基礎幾何學** (2011) 五南圖書出版公司。
7. 項武義：**基礎分析學** (2013) 五南圖書出版公司。
8. Louis Melville Milne-Thomson. *The Calculus of Finite Differences*. American Mathematical Soc. 2000. Chapter 1: Divided Differences [1933]. ISBN 978-0-8218-2107-7.
9. Myron B. Allen; Eli L. Isaacson. Numerical *Analysis for Applied Science*. John Wiley & Sons. 1998. Appendix A. ISBN 978-1-118-03027-1.
10. Ron Goldman. Pyramid Algorithms: *A Dynamic Programming Approach to Curves and Surfaces for Geometric Modelin*g. Morgan Kaufmann. 2002. Chapter 4: Newton Interpolation and Difference Triangles. ISBN 978-0-08-051547-2.