

解構我的「比與比值」教學

陳玉珊

臺北市立大學 教育系 課程教學組 博士候選人

壹、前言

「為何『比與比值』單元要等到六年級才教?」、「教『比與比值』,不是只要套套『前項÷後項=比值』的公式就可以了嗎?」、「我以為『比和比值』這個單元,學生應該很容易就學會,沒想到考試還是有一堆人錯!」、「『比和比值』要怎麼教,學生才不會跟加減法搞混?」,上述疑惑都是學校同事們曾經問過筆者的問題。

比與比值的概念是國小測量課程的重點(教育部,2008、2018),但是由於「比與比值」為一種抽象的數量關係,對於國小學童來說,這種抽象的數量關係,必須得透過具體物的測量或是兌換行為而得到結果,因此在國小「比與比值」的教學,現行三家版本(康軒、南一、翰林)的教科書一開始都是先透過生活中的「兌換活動」來引入比的概念,之後再直接宣告「比值」的定義為:將一個比的前項除以後項所得到的結果,儘管這種方法可以讓學生學到「比與比值」的概念,但筆者認為學生在進行兌換活動時,兌換的方法過於單一,無法刺激學生有多元的想法,亦不容易讓學生在進行兌換(解題)的過程中,明顯去感受到兩數量之間「倍數關係」的重要性,甚至最終可能只是淪於對公式的背誦罷

了,一旦所學為片段的零碎知識,時間一久,學生就容易忘記自己曾經學過什麼。因此,如何讓「比與比值」的概念與「倍數關係」產生更強烈的連結,便成了筆者想要重新解構「比與比值」教學的主因。

12年國教強調素養導向的教學,但究竟什麼樣的數學教學樣貌才能夠稱得上是素養導向的教學呢?這個問題一直是筆者思索的重點,12年國教數學領綱中提到「數學課程的設計,應提供每位學生有感的學習機會」,筆者對其解讀:數學課程的教學設計,首先要先引起學生的學習興趣,接著再讓學生的數學學習越來越有感覺,這是數學課堂上不可或缺的兩個重要元素。

基於上述種種的念想,使得筆者對於「比與比值」教學產生了不一樣的新思維,恰巧筆者今年任教六年級,想藉此機會重新解構自己「比與比值」的教學,於是嘗試引入「Bigfoot(巨人的腳印)」題目,並將其設計成具備偵探式情境的教學活動,透過學生的解題歷程,呈現12年國教素養導向的數學課室實踐樣貌,或許能夠為大家提供另一條不同以往的教學新路徑。

貳、相關文獻

一、核心素養

素養，同時涵蓋 competence 及 literacy 的概念(蔡清田, 2014)，是指一個人接受教育後學習獲得知識 (knowledge)、能力 (ability) 與態度 (attitude)，而能積極地回應個人或社會生活需求的綜合狀態，素養中擇其關鍵的、必要的、重要的，乃為核心素養。核心素養是十二年國教課綱的發展關鍵，歸結其重點如下(教育部, 2014)：

1. 把知識、技能、態度整合在一起，強調學習是完整的，不應只偏廢在知識上面。
2. 強調情境化、脈絡化的學習，就是更朝向學習意義的感知 (making sense) 以及真正的理解 (understanding)。真正的理解，得把學習內容和過程與經驗、事件、情境、脈絡做適切結合，意義才會在其中彰顯出來。
3. 強調學習歷程、策略及方法。課程規劃及教學設計須把學習內容與探究歷程結合在一起，不只是給孩子魚吃，更要教孩子釣魚的方法，才得以陶養學生擁有自學能力，成為終身學習者。
4. 強調提供實踐力行表現的空間，讓學生可以整合所學，不只能把所學遷移到其他例子進行應用，或是實際活用在生活裡，更可對其所知所行進行外顯化的思考，而有再持續精進的可能。

二、「比與比值」的概念

(一) 基本內涵

「比」是用來描述兩個數量 A 與 B 存

在有某一種特定倍數關係的一種表示法；或是並置的兩數量具有對應關係的紀錄 (國立編譯館, 2000)。所以，要用比來描述兩數量之間的關係時，兩數量必須存在有某種對應關係，兩數量的比才有意義。通常用來表示兩數量的特定倍數關係的比，其符號可以表示為 $A:B$ 。若兩數量關係是不具任何意義的，其比值無法意義化，則不適合以比來表示。所以兩個數量能用比來表示，其前提是需要這兩個數量已存在著固定的倍數關係(林碧珍, 2011)。而「比值」則是一個「比的關係」之量化結果，國內教科書定義比值的意義，大多數都將 $A:B$ 的比值記錄為 $\frac{A}{B}$ ，或者是前項除以後項所得到的結果。

(二) 重要性

Inhelder 和 Piaget(1958)的研究指出：「比例推理能力是具體運思期和形式運思期之間的特徵」。Lesh(1987)表示：比例推理是代數(線性函數、方程式)的基石。林碧珍(2010)表示：對於學習更高層次的數學概念來說，比例推理是一項基礎能力，更是有著承先啟後的關鍵。由此可知，「比與比值」的教學，絕不只是一要教學生學會「比值=前項÷後項」的計算而已，更重要的是為日後「代數」之前置作業，因此，我們在教學生運用「比值=前項÷後項」公式的同時，也應將「倍數關係」的概念教給學生。

另外，由於學生容易受到中低年級加減法學習經驗的影響，對於兩數量的比較，都是一種絕對差量，這是加減法思維；但「比」的概念，則是倍數關係，是一種相對

差量，這是乘除法的思維。我們必須引導學生從「絕對差量的比較」產生「相對差量的倍數(比值)」概念，當學生具備了「倍數」的相對差量概念之後，才能進一步去感受「比例推理」的概念。

綜括上述，要學習比與比值之前，學生必須先具備數量關係、因倍數、等值分數、擴約分的概念。可見，「比和比值」概念的先備知識，涵蓋了小學階段從一年級到六年級所學的數量關係之統整，因此「比和比值」的學習不但極為重要，也確實較適合安排在六年級。

參、教材設計與教學實踐

一個好的教學活動設計，是要能夠引發學生學習上的連結。以下為筆者分別針對教學活動的安排，以及現行三家版本(康軒、翰林、南一)教科書進行教材分析。

一、教學活動

108 課綱強調素養導向的教學，鄭章華(2017)認為素養導向的教學原則有：

1. 透過現實情境、寓言故事或數學史引入教材，營造數學學習需求。
2. 以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念。
3. 讓學生運用相關數學知識與能力解決問題，提出合理的觀點與他人溝通。
4. 教材安排從具體到抽象，提供學生有感的學習機會。
5. 教材設計具備多重表徵。
6. 學習任務具備形成性評量的功能，以評

估與促進數學學習。

二、教材內容分析與思考

(一)現行三家版本教科書的教材分析

1. 「比」的教學活動設計

康軒和翰林版教科書針對「比」的教學活動設計，一開始都是透過「兌換物品」的活動，認識比的意義，並介紹其符號與前項、後項，例如康軒版「2 個鐵鋁罐可以換 1 枝鉛筆，鐵鋁罐個數和鉛筆枝數的關係是 2 比 1，記作 $2:1$ 」，翰林版「點數 10 點換 1 枝鉛筆，點數和鉛筆的數量關係是 10 比 1 的關係，可以記作 $10:1$ 」，這兩個活動都是屬於「異類量」的比。

南一版教科書，則是透過「調配飲料」的活動，來引入比的意義，並介紹其符號與前項、後項，例如「2 杯芭樂汁和 3 杯柳橙汁調配的飲料最好喝，芭樂汁和柳橙汁的數量關係是 2 比 3，通常記作 $2:3$ 」，這活動是屬於「同類量」的比。

2. 「比值」的教學活動設計

介紹完比的意義之後，緊接著進入比值的教學，康軒和翰林版教科書對於「比值」的教學活動設計，都是各舉一題「同類量」和「異類量」的題目，唯獨只有南一版，只舉「異類量」的題目來進行教學，但在「比值」的教學，這三家版本，都是直接讓學生進行「前項 \div 後項」的計算，之後再直接宣告它稱為「比值」，最後列出公式為「比值=前項 \div 後項」。

根據上述，筆者認為現行三家不同版本教科書的內容，皆較為強調直接介紹比

跟比值的記錄方式與定義，不容易讓學生在進行「比和比值」概念的學習過程中，去感受兩個數量之間的「倍數關係」。

(二) 解構現行翰林版教科書的編排

筆者任職的學校，六年級的數學課本是選用翰林版本，以下針對翰林第十一冊教科書在「比與比值」的教學活動進行解構。

現行翰林版教科書在一開始是透過異類量的「兌換活動」來認識比的概念及符號，緊接著再以同類量的「調配飲料濃度」的活動來介紹比值的定義，筆者認為這兩個教學活動彼此獨立，並沒有很強的脈絡性連結。也就是說，現行教科書在「比」和「比值」的教學活動設計上，其數學概念是缺乏前後連貫的，因此學生都必須得透過老師的「直接指令」才能夠進行每一個活動，而學生的學習也都是屬於比較被動式的操作。

如何讓學生在「比與比值」的學習上更有感？美國 2000 年的 NCTM 中建議：比例推理這個主題在六至八年級時，應該具有「強烈的直覺基礎」。Lesh, Post, & Behr (1988)與 Lamon(1995)均指出：「提供各種情境的比和比例作業，例如：測量、價格、幾何和視覺圖形以及任何類型的比率」，都可以幫助孩童發展比例方面的概念。

綜括上述，(1)以任務鋪陳數學學習脈絡，引導學生進行探索與發展概念。(2)引導學生強烈直覺感受數量之間存在「倍數關係」，(3)提供學生「測量、價格、幾何視覺圖形」的教材，是「比和比值」教學活動可參考的元素。恰巧「Bigfoot(巨人的腳印)」這一道數學題目同時具備「探索」、「倍數關

係」與「測量」這三個元素，筆者認為引入「Bigfoot(巨人的腳印)」教學活動似乎是一個值得嘗試的選擇。

三、教學實踐

筆者一直思索著究竟應該布什麼樣的數學題目，既可以引起學生的學習興趣，又可以讓學生學習到「比與比值」的概念？筆者在搜尋相關文獻時，恰巧看到 Gilat(2014)的研究，該研究是以一道數學建模的題目—「Bigfoot」(筆者譯為「巨人的腳印」)來激發學生的數學創造力與學習動力，筆者心想：不妨可以嘗試引入「Bigfoot(巨人的腳印)」這一道題目，再將其設計成一道具備偵探式情境的教學活動，將數學問題轉化成探索活動，使得數學圖像與符號表徵能夠轉化成操作活動，說不定藉由學生解題的過程中會迸出令人驚豔的火花呢！

筆者引入「Bigfoot(巨人的腳印)」這一道數學題目，提供學生實作探究的空間，企圖引導學生透過此一情境化、脈絡化的學習歷程，能將學習內容和過程與經驗、情境、脈絡做適切結合，以達致真正的理解。本次教學以下列佈題，引發學生直觀思考可能的解題策略(如圖 1)。題目如下：

今天清晨，警方發現一些善心人士在昨晚深夜裡，重建了公園中許多孩子都愛用的老舊磚瓦飲水機，附近社區的家長想要感謝做此事的人，不過沒有人看到是誰做的，警方在現場能找到的線索就只有地上的腳印，如下圖 1 所示。踩出這個腳印的人似乎非常高大，若能推測其身高，將有

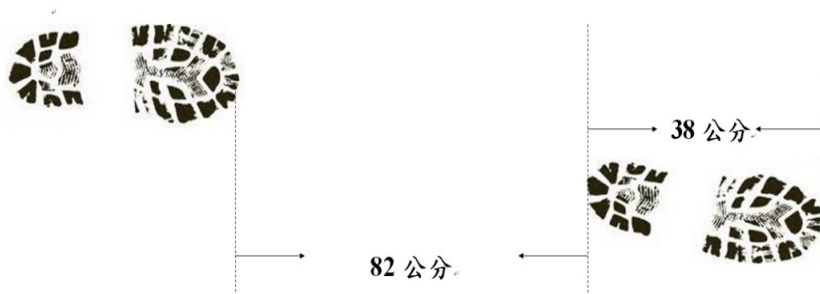


圖 1：「巨人的腳印」題目

助於我們找到此人及其朋友們。你的工作是找出一個「只要測量腳印，就能猜測出此人身高」的方法，此方法除了適用於上圖的人，也要適用在其他人的腳印上。

筆者任教的班級，全班 26 人，共分成四組，每組約 6~7 人。本次教學，每一組學生手邊都只有 2 條皮尺和一支長 1m 的直尺等工具，藉由教師(筆者)的提問，引發學生思考可能的解題策略。教師表示，發下的這兩種測量工具都可以使用，不過教師有三點任務要求：

1. 解題策略越多種越好。
2. 發表解題策略時，務必說明所依據的數學論點。
3. 寫出合理的算式並算出答案，並清楚的說明。

(一) 第一、四組的學習表現：

由於第一組和第四組的解題策略相似，礙於篇幅關係，再加上第一組的同學身高差距較大，相較於第四組更具代表性，故筆者挑選第一組的教學片段來進行分析與說明。

教學片段 1：(T 表示教師， S_n 表示 n 號同學)

S3：「老師，S1 同學太高了(S1 身高約 180 公分)，我們可以讓他躺著量嗎?…」

T：「為什麼會有這個想法呢?」

S3：「因為 S1 是全班最高的人，我們這一沒有人比他高，也根本摸不到他的頭，只能踩在椅子上量，可是皮尺又不夠長…」

S4：「而且只能用兩條皮尺接起來量，可是這樣量可能就會有很大的誤差…老師有說過，數學就是要越精準越好…」

S3：「所以我們才突然想到，要不然乾脆叫 S1 躺在地上，我們在地上幫他量…」

T：「喔喔，原來是這樣啊，你們能想到這個方法，還蠻不錯的，那當然可以囉…」

因為班上同學的身高落差很大，約略有 5 位同學身高 170 公分以上，甚至 S1 同學的身高超過 180 公分(如圖 2)，同樣的，也有近 5 位同學的身高約為 145 公分，同學們彼此之間為了能夠盡可能精準測量到每位同學身高，於是產生了這樣的一個「解

決之道：躺著量身高」(如圖 3)。



圖 2：S1 身高



圖 3：躺著量身高

教學片段 2：(T 表示教師，S_n 表示 n 號同學)

T：「你們可以說說你們是怎麼找到巨人的身高的？」

S14：「因為題目說『只要測量腳印，就能猜測出此人身高』，所以我們就只有量身高跟腳印長，題目上又說『踩出這

個腳印的人似乎非常高大』，剛好我們這一組有非常高大的 S1，原本我們只是想量 S1 就好，可是我們這一組有人就說，題目還有說『要適用在其他人的腳印上』，所以我們最後就決定每一個人都量，然後再找看看身高跟腳印長之間有沒有什麼規律…」

T：「題目說『測量腳印長』，可是你們海報上寫的卻是腳掌長…這兩個好像不一樣吧…」

S3：「因為我們沒有穿鞋子啊…」

T：「所以你的意思是，你們海報上的腳掌長其實就是題目的腳印長囉？」

S14：「對呀，因為題目說『要適用在其他人的腳印上』，所以我們就要找出規律，所以我們就用每一個人的身高÷腳掌(印)長…發現算出來都是 6 點多倍…」

S23：「那為什麼知道要用除的？」

S14：「因為我們覺得這個跟之前在上圓周長那個單元很像，當初我們在找圓周率時，試過加減乘除，發現只有用『除』的，才会有規律，所以這一次我們就用除的來試試看，還真的讓我們找到…發現算出來都是 6 點多倍…」

S14：「因為有人算出來是 6.7，有人是 6.4，有人是 6.9，還有的人是 6.8…大家都不太一樣，很難決定到底要用哪一個，所以我們最後就決定用平均來算，把全部加起來算出平均，約

6.6，然後再用 $38 \times 6.6 = 250.8$ ，所以我們推算出來巨人的身高是 250.8cm。」

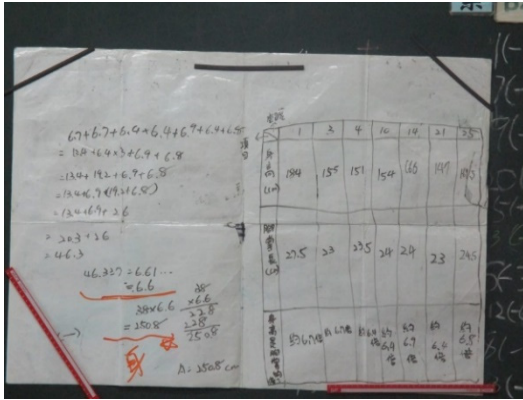


圖 4：第一組的解題策略

根據教學片段 1，由於第一組學生的身高落差較大，例如 S1 身高 184 公分，而 S21 身高只有 147 公分，近 40 公分的差距，為了能夠盡可能精準測量到每位同學的身高，並符合題目「要適用在其他人的腳印上」的要求，他們想到了「躺在地上測量身高」的方法，顯示第一組的學生透過此次教學，呈現了數學領域核心素養之一：「數-E-A3 能觀察出日常生活問題和數學的關聯，並能嘗試與擬訂解決問題的計畫」的學習表現。

根據教學片段 2，第一組學生先測量出每一位組員(第一組有 7 位同學)的身高與腳掌長(意旨題目的「腳印長」)，因為該組學生的身高落差較大，有近 40 公分的差距，為了能夠找到這些數據之間的某種規律，於是學生透過「回想」並連結曾經學過利用圓周長找到圓周率(圓周長和直徑的比值)的舊經驗，先將每位同學的身高÷腳印長，算出來都是約略 6 倍多，再將這些 6.4、6.7、6.8、6.9 算出平均值 6.6 倍(意指身高和腳印

長的比值約為 6.6)，最後將 38(巨人腳印長)×6.6(倍)=250.8(巨人身高)，算出的結果即為巨人的身高(如圖 4)。此充分顯示第一組的學生透過此次教學，呈現了數學領域核心素養之一：「數-E-A1 對數學世界好奇、有積極主動的學習態度」的學習表現。(附註：因為筆者的班上，學生在教室裡都是穿著室內拖鞋上課，所以學生在進行測量時，都只穿著襪子而已，因此第一組的學生以測量出的『腳掌長度』，當作是題目中的『腳印長』)。

(二) 第二組的學習表現

教學片段 3：(T 表示教師，S_n 表示 n 號同學)。

S9：「因為題目給我們的圖是鞋印長和一步的距離長度，所以我們就測量每一個人的鞋印長度和走一步的距離長，之後再用每個人的身高去除以一步的距離…」

S14：「你為什麼不直接用身高除以鞋印長就好？反而要去除以一步的距離？每個人走一步的距離有時候會大，有時候會小，這樣不就沒辦法找到規律了嗎？…」

S9：「嗯…(沉默了一會兒)，對耶，我們好像除錯了，哈哈…我們原本是要用身高去除以鞋印長的，可是因為我們測量出來的鞋印長跟一步的距離都差不多，所以就…忘了改…哈哈」

S23：「題目的圖，一步的距離大概是鞋印

長的 2 倍，可是你們的一步距離跟一個鞋印大小差不多，這樣不是很怪嗎？…」

S9：「 嗯…，是啊，可是我們量出來一步的距離大約就是一個鞋印長，或許是因為巨人的腳很長，跟我們正常人不一樣，所以他跨一步的距離會是 2 個鞋印長…」

S9：「 雖然我們除錯了，不過也因為鞋印長 \div 一步距離，所以算出來的答案應該與我們原本想算的答案不會差很多。」

T：「 你們的 6.4 倍是怎麼算出來的??」

S9：「 因為我們最小是 6，最大是 6.9，所以我們取最中間的那個數，我畫圖給你們看…呃…我們好像又算錯了，最中間的數應該是 6.45 才對，所以巨人的身高應該是要去乘以 6.45，算出來的答案是 245.1 公分。」

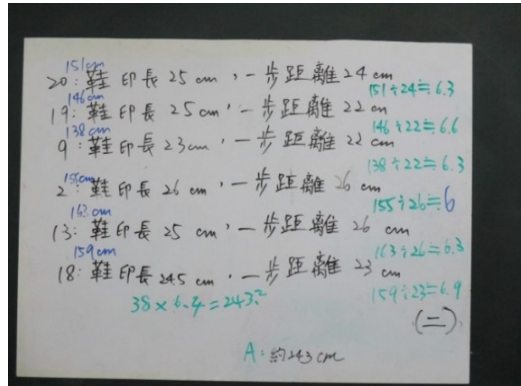


圖 6：用畫圖的方式說明

根據教學片段 3，面對 S23 的提問：「題目的圖，一步的距離大概是鞋印長的 2 倍，可是你們的一步距離跟一個鞋印大小差不多，這樣不是很怪嗎？…」第二組學生雖然知道實際走一步的距離長度(約 24 公分)與題目所給的數據(82 公分)有所不同，但在他們的認知中，「或許是因為巨人的腳很長，跟我們正常人不一樣，所以他跨一步的距離會是 2 個鞋印長…」，數學解題應該是要根據題目所給的線索來找答案，既然題目給的是「一步的距離」，那他們就以「一步的距離」作為運算的基礎(如圖 5)；此外，該組學生會去探討數據之間的關係(比)，也都會願意去找到成為某種定值(比值)，也就是會去找「數學通則」(形成一般化)，透過「畫圖」的方式來進行解說，企圖讓其他組同學更清楚知道他們的解題思維(如圖 6)。顯示第二組的學生透過此次教學，呈現了數學領域核心素養之一：「數-E-C1 具備從證據討論事情，以及和他人有條理溝通的態度」的學習表現。

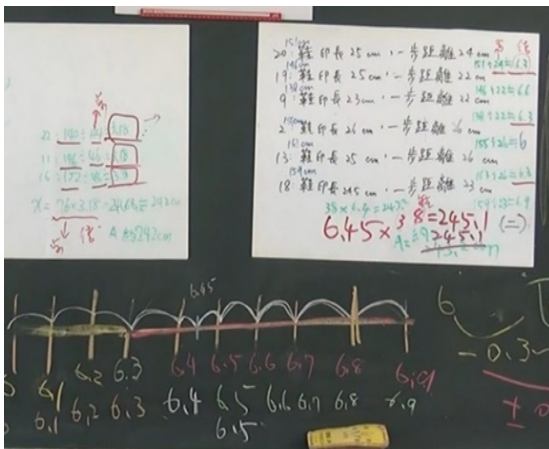


圖 5：第二組的解題策略

(三)第三組的學習表現：

教學片段 4：(T 表示教師，Sn 表示 n 號同學)。

T：「你們一開始是怎麼想的？」

S16：「一開始也是『鞋印長』和『一步的距離』都量，不過後來發現題目顯示『一步的距離大約是 2 個鞋印長』，所以最後只要量『鞋印長』，然後再把『鞋印長』乘以 2 就是「一步的距離」。

T：「這三個算式算出來的結果都是 3.18 嗎？」

S16：「算出來的數據都不一樣，這三個式子算出來的結果是 3.181、3.173、3.166，因為我們平常都是算到小數點第二位，而且數學應該越精準越好，最後發現它們和 3.18 的差比 3.17 還小，所以選 3.18，所以我們就用 3.18 去算巨人的身高是 $76 \times 3.18 = 241.68 \approx 242 \text{ cm}$ 。」(如圖 7)

根據教學片段 4，筆者以「你們一開始是怎麼想的？」的問題，「起動」學生說明如何進行測量。當筆者表示「這三個算式算出來的結果都是 3.18 嗎？」時，第三組學生則是利用所算出來的每一個答案，分別與 3.17 和 3.18 所產生的差距，清楚說明如何校正數據以找到誤差最小的定值，以本例題來看，誤差最小的定值為 3.18。

上述分析顯示第三組同學能夠在此次進行「比和比值」概念的教學過程中，去直覺感受兩個數量之間的「倍數關係」，並能往建立規則(尋找定值)的方向前進。且第三組同學在說明「尋找最小誤差」的解題過程中，發現「3.181、3.173、3.166 與 3.18 的差距比與 3.17 還小」的現象，說明他們所進行的數學推論(如圖 7)。此充分顯示第三組的學生透過此次教學，呈現了數學領域核心素養之一：「數-E-B1 具備日常語言與數字及算術符號之間的轉換能力，並能熟練操作日常使用之度量衡」的學習表現。

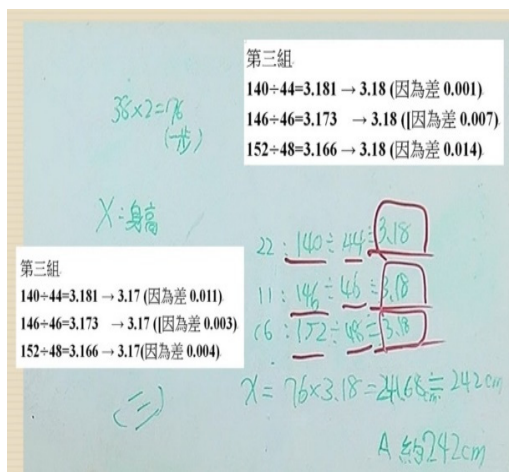


圖 7：第三組的解題策略

肆、結論

根據上述各項分析，不論是第一、四組同學利用「身高」和「鞋印長」的關係來求得巨人的身高，或是第二、三組同學利用「身高」和「一步距離」的關係來求得巨人的身高，都表示他們在解題的過程中，已逐漸建立起「比」的概念；除此之外，每一組同學，也都能透過現有的數學能力，將抽象「比的關係」進行具體的量化結果(比值)，企圖找到一個定值(6.6 或 6.4 或 3.18)，最後

再透過這個定值，求得巨人的身高。

因為「比」是用來描述兩個數量 A 與 B 存在有某一種特定倍數關係的一種表示法，這兩個數量已存在著固定的倍數關係(林碧珍, 2011)，而「比值」則是一個「比的關係」之量化結果，是前項除以後項所得到的結果，全班同學都做到了，因此筆者認為本次教學確實能夠培養學生「比與比值」的概念。

雖然現行教科書編排的兌換活動是我們一般比較常見的方法，但是每一個活動的操作以及活動間的連結，都得依賴老師的直接指令才能進行，學生缺乏主動且深入的思考與探究，而學生的解題策略也顯得較為單一不夠多元。筆者認為此次解構比與比值的教學，優點有以下四點：

- 一、學生為了想要知道巨人的身高(需求感)，在有限的線索下，腦中會不斷進行思考如何找到「規律」，在思考的過程中就會去回想曾經學過尋找「圓周率」時的過程及概念，最後會發現「日常生活中，很多的數量之間彼此會形成一種固定的倍數關係，例如題目中身高跟腳印長的關係…」，進而產生「比值」的概念。
- 二、學生的解題路徑比較多元化。
- 三、 $\text{身高} \div \text{腳印長} = 6$ (比值)由學生自行導出，讓學生學習數學更有感。
- 四、對日後代數(線性函數、方程式)的學習會更有脈絡性。

透過這一次的解構，解開了筆者的疑惑，為什麼我們要花這麼多的時間來教「比

與比值」？原來是為了教導學生有「數量關係」的概念，而這「比例推理」是學代數(線性函數、方程式)非常重要的關鍵概念，換言之，未來要教代數時，「比與比值」的教學就是啟蒙。此次教學活動一「巨人的腳印」能夠引導學生強烈直覺感受數量之間存在「倍數關係」，以及具備「測量」概念的教材，是引出「比和比值」概念的優質前置教學設計，確實是另一條可行的路徑。

參考文獻

- 林碧珍(2010)。比與比值初始概念的教學初探。國立新竹教育大學教育學報, 27, 1-8。
- 吳沁珊、林碧珍(2011)。國小數學教科書比與比值單元之教材分析。2011 教科書轉化與精進教學議題國際學術研討會會議手冊, 532-547。
- 南一書局(2020): 數學教師手冊第十一冊。台南: 南一書局企業股份有限公司。
- 國立編譯館(2000)。國民小學數學教學指引。第十冊。台北: 國立編譯館。
- 教育部(2008)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。台北市: 教育部。
- 教育部(2018)。十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校數學領域課程綱要正式版。
- 康軒文化(2020): 數學教師手冊第十一冊。台北: 康軒文化事業股份有限公司。
- 鄭章華(2017)。核心素養在知覺課程與運作課程的轉化初探: 以國小數學領域為例, 教育研究月刊, 275, 64-80。
- 翰林出版(2020): 數學教師手冊第十一冊。台南: 翰林出版事業股份有限公司。
- Gilat, T., & Amit, M. (2014). Revealing students' creative mathematical abilities through model-eliciting activities of real-life situations. Proceedings of PME 38, 3, 161 - 168.
- Inhelder, B. and J. Piaget, (1958), The Growth

- of Logical Thinking from Childhood to Adolescence, New York, Basic Books.
- Lamon, S. J. (1995). Ratio and proportion: Elementary Didactical Phenomenology. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), Providing a foundation for teaching mathematics in the middle grades (pp.167-198). Albany, NY: State University of New York Press.
- Lesh, R.(1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics.33~40.
- Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. Hiebert & M. Behr(Eds.), Number concepts and operations in the middle grades(pp. 93-118). Reston, VA: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston,VA : NCTM2000.