從坐標的建立探索三維空間中圓錐與圓盤的交點

張耀文
臺北市立介壽國民中學

壹、研究動機

筆者和學生看期刊時，看到法國在聖誕節的時候，做出了一個馬卡龍聖誕塔的圖片。該聖誕塔在裝填時，由於塔高 4.4 公尺，裝入了超過 8000 個馬卡龍！塔的高度太大，而馬卡龍的體積甚小，因此可以緊貼在聖誕塔旁邊。我們好奇，如果今天將聖誕塔視為圓錐，並將馬卡龍視為一平面上的圓盤（不計厚度，不能拗折）。在不同圓錐的側邊長度、圓錐展開圖的扇形頂角角度與不同的圓盤半徑情況下，能裝入幾個？要解決這個問題，需要先假設圓盤擺放的角度，與解決圓盤與圓錐的交點才行。於是我們打算用基礎數學和設定坐標來找尋答案。

貳、研究目的

一、了解展開圖為 90 度扇形的圓錐，如何放入圓盤並與圓盤相切於兩點。

二、了解展開圖為 90 度扇形的圓錐，再依層推疊擺放半徑固定的圓盤後，最多能放置多少個圓盤？

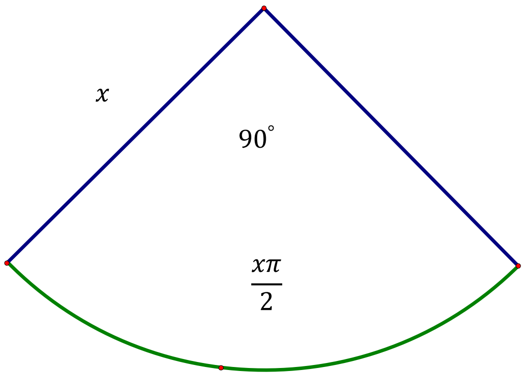
三、能在圓錐的展開圖，扇形的頂角大小不同、側邊長度不同，及圓盤半徑不同的情況下，找出擺放個數與覆蓋率（覆蓋率：$\frac{\text{圓盤總面積}}{\text{圓錐表面積}}$）的一般公式。

參、研究過程或方法

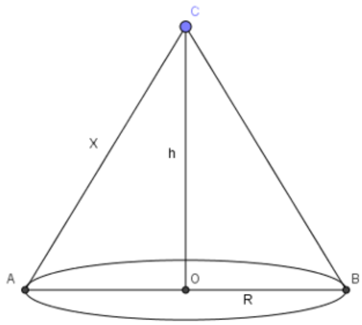
由於本研究必需要理解平面與空間的關係，才有辦法推算圓錐與圓盤的擺放。因此將其分成五個步驟來處理，分別為：理解基本圓錐與圓盤關係、從方程式建構模型並觀察擺

放情形、透過 GGB 與 AR 實境在真實空間中探索、在切點高度已知情況下推算擺放圓錐數量、計算切點與其高度和切點連線的長度。接下來，將詳細說明本研究過程與方法：

一、理解基本圓錐與圓盤關係：在 90 度的扇形中，放入大小相同的圓，在扇形組成圓錐時，圓在圓錐彎曲時的變化，如下圖所示：



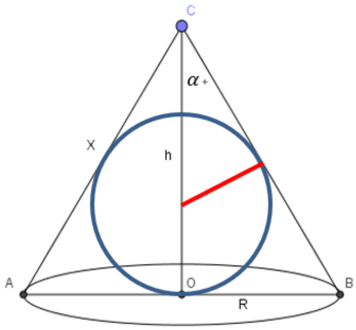
若邊長為x，且展開圖為$\frac{1}{4}$圓(90 度)，則所展開的扇形弧長為$\frac{2\times x\times\pi}{4}=\frac{x\pi}{2}$。
我們將扇形組成圓錐，看邊長與圓錐高度的關係：



將此扇形組合成一個圓錐，則底圓的圓周長為$\frac{x\pi}{2}$，半徑R，則可以算出R和x的關係：

$\frac{x\pi}{2}=2\pi R$。我們得到$R=\frac{x}{4}$，$h=\sqrt{x^2-(\frac{x}{4})^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}x$。

我們思考如何在這個圓錐中放入一個面積最大的圓盤。若只放入一個，由於圓盤厚度不計，因此可以視為放入一顆最大的球，只要計算球的半徑，讓此球與圓錐面相切，且與底面相切即可。透過這樣的計算，初步了解空間中的圓盤，和圓錐相切時，所產生的切點情況。

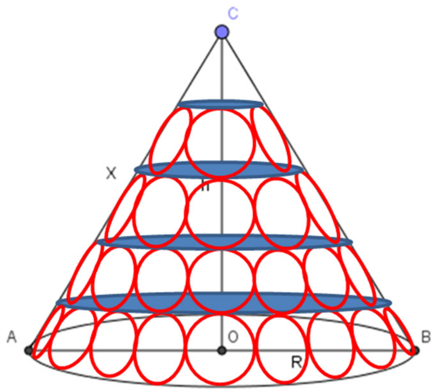


頂角張開的角度一半為α，設假可以放入的最大圓為半徑r，我們可以用三角函數得到：

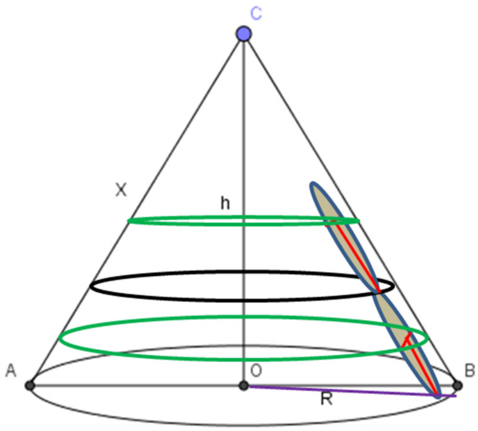
$$sin\alpha = \frac{R}{x} = \frac{r}{h-r} \qquad sin\alpha = \frac{R}{x} = \frac{r}{\frac{\sqrt{15}x}{4}-r} \qquad r = \frac{\sqrt{15}Rx}{4(R+x)}$$

由於圓盤厚度不計，可以透過旋轉，將球視為放入無限多個圓盤。因此原本的研究為：在頂角固定的情況下，放入最大的圓盤，並推導能放入幾個。我們將改成：當頂角固定時，圓盤的半徑大小也固定，該如何依著圓錐曲面，按照每一層擺放。當同一層擺放完時，下一層將重頭開始，以第一層最高點，向圓錐切出截面圓，作為新一層的底面，依此放入圓盤。透過不同的圓盤大小，找出可以覆蓋住整個圓錐曲面的最適合答案。

二、從方程式建構模型並觀察擺放情形：為了理解真實情況，先嘗試將數個半徑較小的圓盤，放入一個透明的圓錐，做出類似模型，以便了解真實的情況為何。

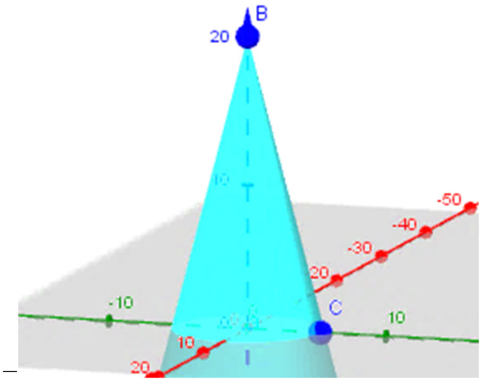


首先嘗試在圓錐底部放入相同大小的圓盤，然後用最傳統的方式，在第一排完成後，再用同樣的方式，以高度固定的情況下，在第一排的圓上放入第二排。(這裡先**不嘗試交叉放置**，這會讓圓和圓切的點，與第二層的高度產生計算困難。)為了計算適合的圓盤半徑，我們必需先了解底部圓周，與圓錐面和底面的夾角。



我們知道圓錐截面與底面夾角之$\sin\theta=\frac{h}{x}=\frac{\sqrt{15}}{4}$，$\cos\theta=\frac{1}{4}$，$\tan\theta=\sqrt{15}$。為了方便推測，我們決定**圓盤在放置時**，都是以和**圓錐曲面與底面夾角的相同角度擺放**。(這樣才能保證每一個圓盤在擺放時不會有偏差。)先假設此圓盤的半徑為r，並讓圓盤底部和平面相切，以角度θ擺放，則圓盤和圓錐會有兩個切點。將此兩個切點相連所產生的線段，為同樣平面與圓錐相切的圓上的弦。

運用 GGB，我們可以試圖用解析方式找出適合的答案。由於模型是以 A4 紙的寬做為圓錐的側邊，因此圓錐側邊可以設定為$x=21$。按此條件做出扇形頂角為 90 度的圓錐方程式如下表示：



先在空間中畫出一條過點$(0,0,\frac{21\sqrt{15}}{4})$與$(0,\frac{21}{4},0)$的直線，此直線方程式為：

$$\frac{y-\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}}=\frac{z}{-\frac{21\sqrt{15}}{4}} \quad ; \quad 4\sqrt{15}y+4z-21\sqrt{15}=0$$

此時假設直線中的一個動點為$(0,y_1,z_1)$，而直線中有一任意點為(x,y,z)。讓這一條直線繞z軸，我們可以得到關係式為：

$$\begin{cases} z=z_1 \\ \sqrt{x^2+y^2}=|y_1| \end{cases}$$

將這個關係重新代入直線方程式，可以得到：

$$\pm 4\sqrt{15}\times\sqrt{x^2+y^2}+4z-21\sqrt{15}=0$$

$$\pm 4\sqrt{15}\times\sqrt{x^2+y^2}=-4z+21\sqrt{15}$$

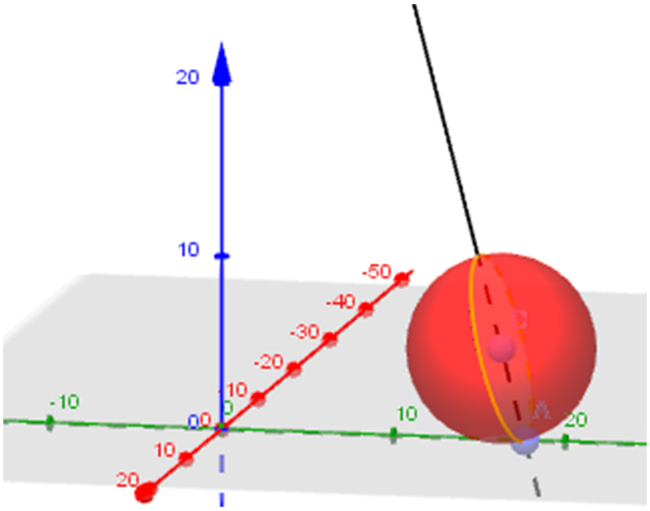
$$240(x^2+y^2)=16z^2-168\sqrt{15}z+6615$$

$$240x^2+240y^2-16z^2+168\sqrt{15}z-6615=0$$

得到圓錐曲面方程式為：

$$240x^2+240y^2-16z^2+168\sqrt{15}z-6615=0$$

在y軸上設立一動點$(0,y_2,0)$。我們想依此動點，找出通過此點，且與圓錐曲面和底面夾角相同的的角度θ之平面，並在此平面上找出一個半徑大小可以改變的球。



$$\frac{y-\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}}=\frac{z}{-\frac{21\sqrt{15}}{4}}$$

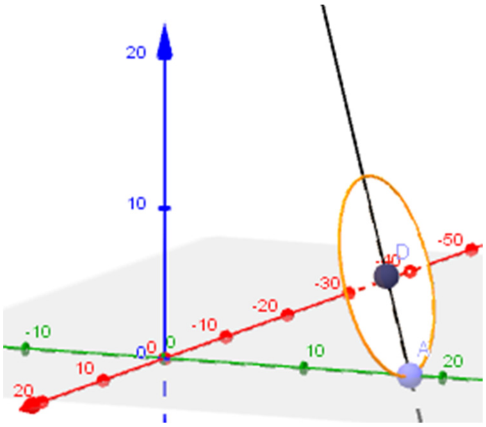
$$\begin{cases} y=\dfrac{21}{4}t+y_2 \\ z=-\dfrac{21\sqrt{15}}{4}t \end{cases},-1\le t\le 0$$

找法向量：$\left(0,\frac{21}{4}t+y_2,-\frac{21\sqrt{15}}{4}t\right)\cdot\left(0,\frac{21}{4},-\frac{21\sqrt{15}}{4}\right)=0$

$$\frac{441}{16}t+\frac{21}{4}y_2+\frac{6615}{16}t=0\text{，}\ t=\frac{-y_2}{84}$$

此時法向量為：$\vec{N}=(0,\frac{15}{16}y_2,\frac{\sqrt{15}}{16}y_2)$　此時平面：$\left(\frac{15}{16}y_2\right)y+\left(\frac{\sqrt{15}}{16}y_2\right)z=\frac{15}{16}y_2^2$

我們在平面與直線上找一個動點$(0,y_3,z_3)$，以此動點與$(0,y_2,0)$的距離為半徑，能找出以$(0,y_3,z_3)$為圓心的球。求出此球與平面的解，即為我們要的圓盤。



$$\begin{cases} y_3=\dfrac{21}{4}s+y_2 \\ z_3=-\dfrac{21\sqrt{15}}{4}s \end{cases},$$

$$r=\sqrt{(\tfrac{21}{4}s+y_2-y_2)^2+(-\tfrac{21\sqrt{15}}{4}s)^2}=21s\ (s\text{取正})$$

球面方程式為：

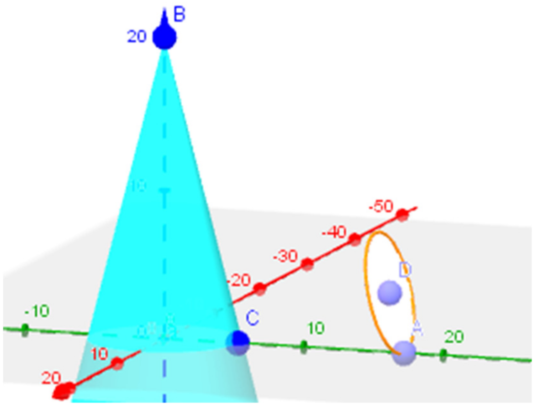
$$(x-0)^2+(y-(\frac{21}{4}s+y_2))^2+(z+\frac{21\sqrt{15}}{4}s)^2=441s^2$$

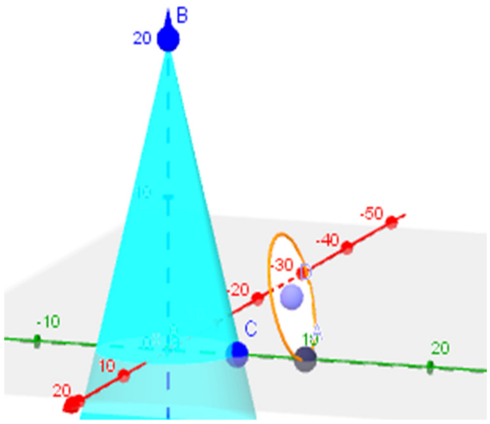
$$x^2+(y-(\frac{21}{4}s+y_2))^2+(z+\frac{21\sqrt{15}}{4}s)^2=441s^2$$

在此平面的圓方程式

$$\begin{cases} \left(\frac{15}{16}y_2\right)y+\left(\frac{\sqrt{15}}{16}y_2\right)z=\frac{15}{16}y_2^2 \\ x^2+(y-(\frac{21}{4}s+y_2))^2+(z+\frac{21\sqrt{15}}{4}s)^2=441s^2 \end{cases}$$

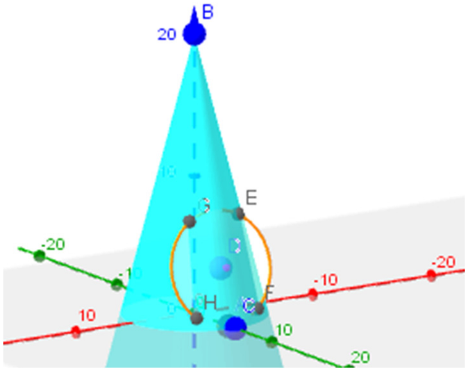
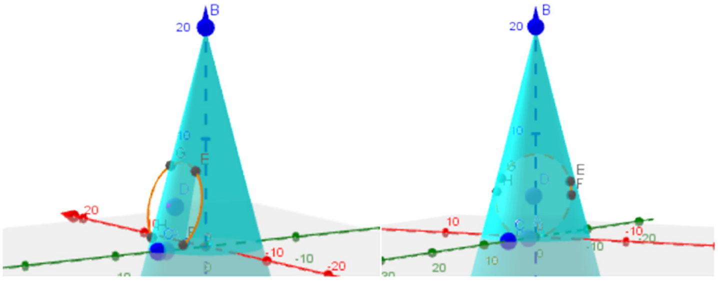
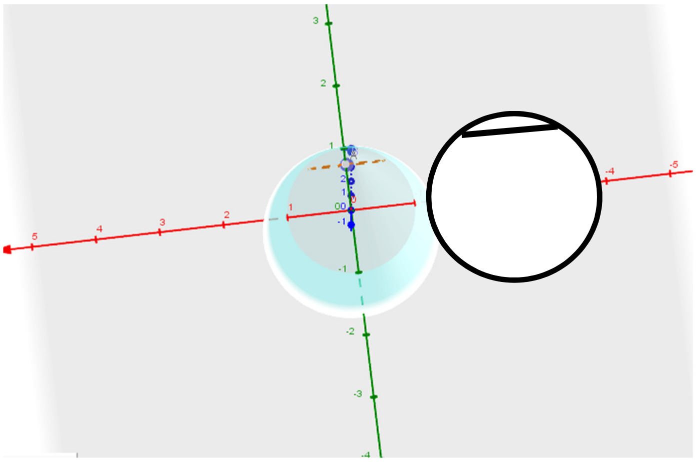
求出此圓方程式和圓錐的解，可以看到若有交點時，會有四組解，若能求出兩組解，則這兩組解就是圓盤和圓錐的切點，可依此為基礎求得切點連線的高度與長度。



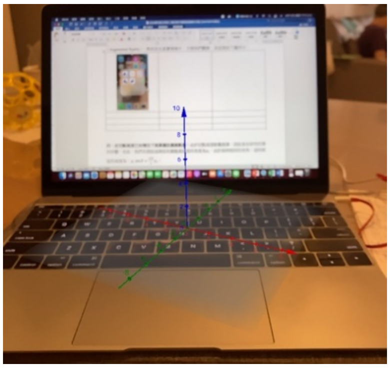
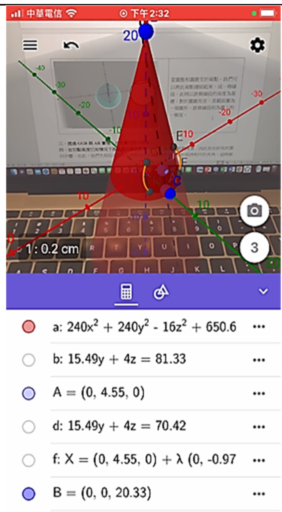
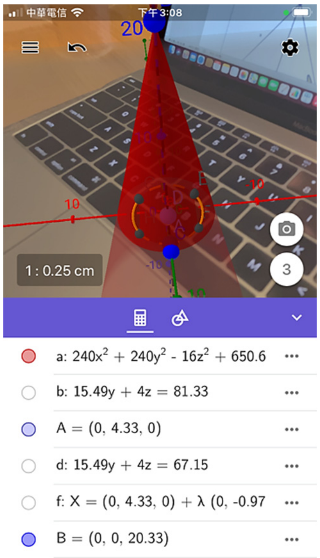
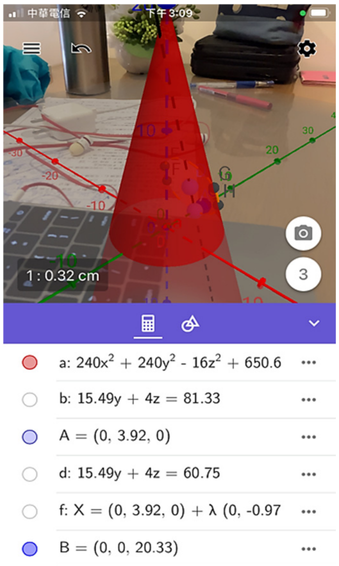
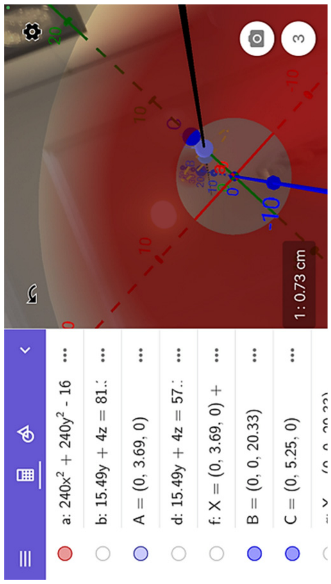


$$\begin{cases} \left(\frac{15}{16}y_2\right)y+\left(\frac{\sqrt{15}}{16}y_2\right)z=\frac{15}{16}y_2^2 \\ x^2+(y-(\frac{21}{4}s+y_2))^2+(z+\frac{21\sqrt{15}}{4}s)^2=441s^2 \\ 240x^2+240y^2-16z^2+168\sqrt{15}z-6615=0 \end{cases}$$

將建構的模型分析，如下說明：

	如左圖，當圓盤接近時，和圓錐產生四個交點。此時上述的方程式就會有四組解。換句話說，至少須解開 x、y、z 的四次方程式。
	從另一個角度來觀察，這四個點的情形。圓盤不斷靠近圓錐，這四個點會愈來愈靠近。交點情況也會逐漸改變。
	當圓盤和圓錐交於兩點，可以將此兩點連結起來，成一條線段。此時以該條線段的高度為基礎，對於圓錐而言，其截面圖為一個圓形，該條線段則為圓上的一條弦。

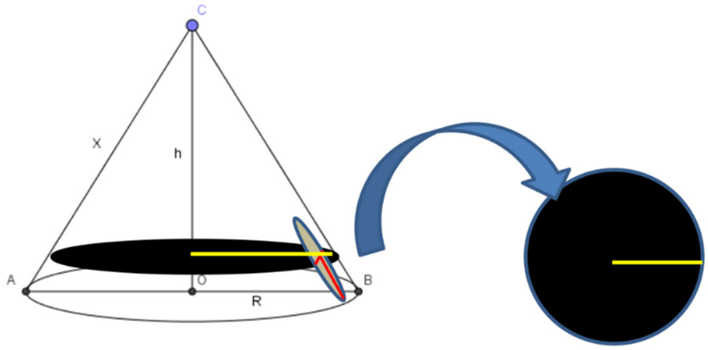
三、**透過 GGB 與 AR 實境，在真實空間中探索**：為了能真實了解圖形的變化，與視角不同的情況下所觀察的情形，我們運用了 GGB（GeoGebra）手機版，與它的 AR（Augmented Reality），將其放在真實情境中，方便我們觀察。使用步驟與說明呈現如下列所示：

		
下載 GGB 相關 APP，選擇 3D 計算機或 GeoGebraAR。	此時會出現空間坐標，選擇您所要呈現的位置。	輸入方程式後，即可呈現圖形於攝影機的實物中。
		
視角：從前方觀察交點況	視角：從後方觀察交點情況	視角：從底部觀察內部情形

四、在切點高度已知情況下推算擺放圓錐數量：由於切點高度較難推算，因此放在研究的第五步驟。在此，我們先假設這條弦和圓盤最底部的長度為y_1。由於保持相同的夾角，

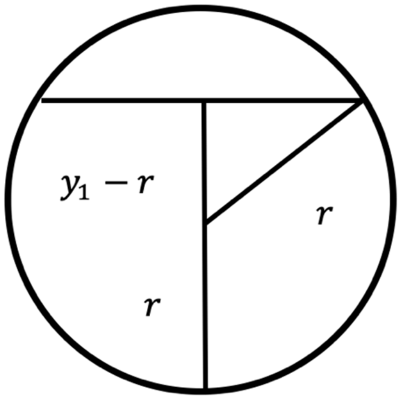
這時候弦的高度為：$y_1 \sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}y_1$。

我們可以先算出此圓錐在此高度下，所產生的圓的半徑：

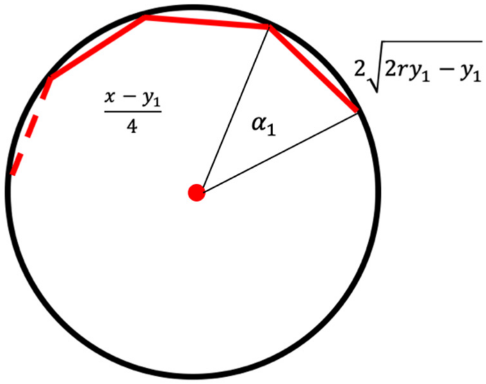


這時候高度使得截面圓的半徑為$\left(\frac{\sqrt{15}}{4}x - \frac{\sqrt{15}}{4}y_1\right)cot\theta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}x - \frac{\sqrt{15}}{4}y_1}{\sqrt{15}} = \frac{x-y_1}{4}$

再從高度為$\frac{\sqrt{15}}{4}y_1$，推出此時圓錐在此高度時，此高度下的截面圓。我們能算出此高度和圓盤半徑的關係：



用勾股定理可以得到弦長為：$2\sqrt{r^2-(y_1-r)^2} = 2\sqrt{2ry_1 - {y_1}^2}$



我們定義此弦所展開的角度α_1，再用餘弦定理算出角度如下所示：

$$(2\sqrt{2ry_1 - {y_1}^2})^2 = (\frac{x-y_1}{4})^2 + (\frac{x-y_1}{4})^2 - 2(\frac{x-y_1}{4})(\frac{x-y_1}{4})\cos\alpha_1$$

$$4(2ry_1 - {y_1}^2) = 2(\frac{x-y_1}{4})^2 - 2(\frac{x-y_1}{4})^2\cos\alpha_1$$

$$4(2ry_1 - {y_1}^2) = 2\left(\frac{x-y_1}{4}\right)^2(1-\cos\alpha_1)$$

$$\cos\alpha_1 = 1 - \frac{32(2ry_1 - {y_1}^2)}{x^2 - 2xy_1 + {y_1}^2} = \frac{x^2 - 2xy_1 + 33{y_1}^2 - 64ry_1}{x^2 - 2xy_1 + {y_1}^2}$$

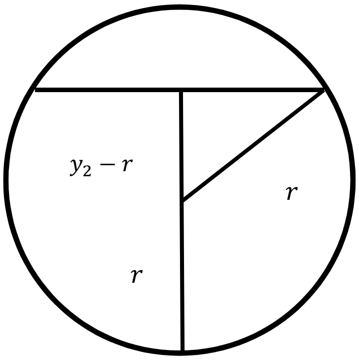
$$\alpha_1 = \cos^{-1}\frac{x^2 - 2xy_1 + 33{y_1}^2 - 64ry_1}{x^2 - 2xy_1 + {y_1}^2}$$

事實上，圓盤和圓盤的切點和圓盤與圓錐的切點不同，但由於誤差非常小，因此為了研究方便，這裡假定為同一點。接下來，我們再放上第二層。然而第二層是以剛才圓盤的頂端為基礎，因此必需要再計算一次。我們可以知道高度為：$2r\sin\theta = 2r \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{2}r$。以此高度為基礎，這個高度在圓錐的底圓半徑為：

$$(h - \frac{\sqrt{15}}{2}r)\,cot\,\theta = (\frac{\sqrt{15}}{4}x - \frac{\sqrt{15}r}{2}) \times \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{x-2r}{4}。$$

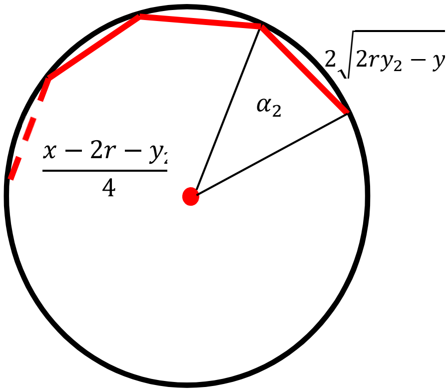
我們以這個截面圓為底部，再一次放上圓盤。設圓盤與圓錐曲面切點連線的長度為y_2。此時的高度為$\frac{\sqrt{15}}{4}y_2$，這時候的總高度為：$\frac{\sqrt{15}}{2}r + \frac{\sqrt{15}}{4}y_2$。截面圓半徑為：

$$(h - \frac{\sqrt{15}}{2}r - \frac{\sqrt{15}}{4}y_2)\cot\theta = \left(\frac{\sqrt{15}}{4}x - \frac{\sqrt{15}}{2}r - \frac{\sqrt{15}}{4}y_2\right) \times \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{x}{4} - \frac{r}{2} - \frac{y_2}{4} = \frac{x-2r-y_2}{4}。$$



用勾股定理可以得到弦長為：$2\sqrt{r^2-(y_2-r)^2}=2\sqrt{2ry_2-{y_2}^2}$

我們重覆排第一排圓盤時所用的方式，算出弦長與角度，推出其關係式如下：



此時，我們能用餘弦定理：

$$(2\sqrt{2ry_2-{y_2}^2})^2=(\frac{x-2r-y_2}{4})^2+(\frac{x-2r-y_2}{4})^2-2(\frac{x-2r-y_2}{4})(\frac{x-2r-y_2}{4})\cos\alpha_2$$

$$4(2ry_2-{y_1}^2)=2(\frac{x-2r-y_2}{4})^2-2(\frac{x-2r-y_2}{4})^2\cos\alpha_2$$

$$\cos\alpha_2=1-\frac{32(2ry_2-{y_2}^2)}{(x-2r)^2-2(x-2r)y_2+{y_2}^2}$$

$$=\frac{(x-2r)^2-2(x-2r)y_2+33{y_2}^2-64ry_2}{(x-2r)^2-2(x-2r)y_2+{y_2}^2}$$

$$\alpha_2=\cos^{-1}\frac{(x-2r)^2-2(x-2r)y_2+33{y_2}^2-64ry_2}{(x-2r)^2-2(x-2r)y_2+{y_2}^2}$$

我們若不用方程式，透過每一層的切點高度，都能算出該層切點連線形成的弦所佔的圓心角，從而推出能擺放幾個圓盤，我們可以推得固定的算式：

（一）先找出擺放時，最底層圓的半徑為：$\frac{x-2nr}{4}$，$n+1$代表擺放的位層。

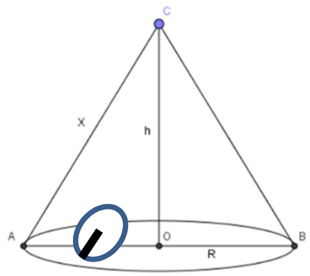
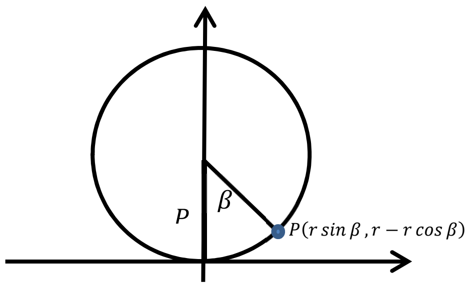
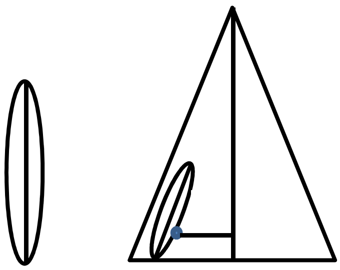
（二）我們固定圓盤半徑為r，而且以圓錐曲面和底面同角度擺放。每一次擺放所和圓錐曲面切到 2 點，在圓盤上的長度為y_n，我們可以得知，此時高度為$\frac{x-2nr-y_n}{4}$

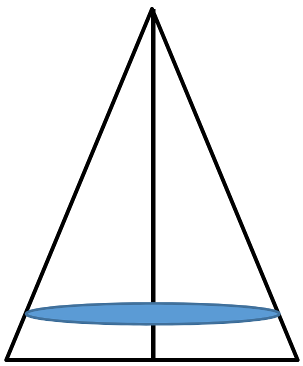
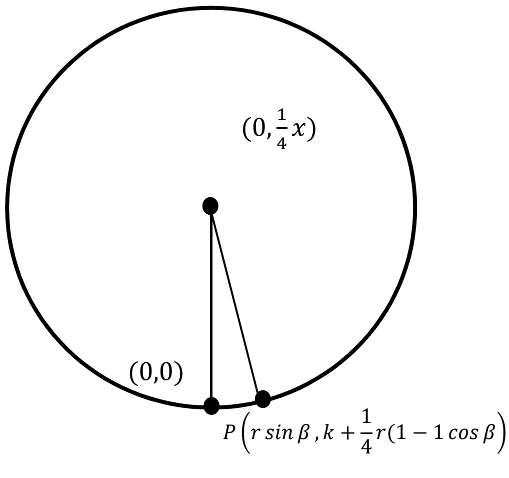
（三）我們能推得該圓盤與圓錐所切的兩點，其在圓盤上的弦長度為$2\sqrt{2ry_n-{y_n}^2}$

（四）從弦長度，我們能得知弦所需要的圓心角為

$$\alpha_n=\cos^{-1}\frac{(x-2nr)^2-2(x-2nr)y_n+33{y_n}^2-64ry_n}{(x-2nr)^2-2(x-2nr)y_n+{y_n}^2}$$

五、計算切點與其高度和切點連線的長度：只要能算出圓盤和圓錐所產生的切點，及其高度，我們就能利用步驟三的方法，將每一層所能擺放的圓盤數量求出。並依此往上擺放，進而推算出圓盤的總數量。我們決定用坐標化的方式解決。

	$x=4R_1$ $R_1=\frac{1}{4}x$ $\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\cos\theta=\frac{1}{4}$
[圓盤的坐標與角度] 	設一點P位於圓盤的底部，我們建立一個直角坐標，此時P為原點$(0,0)$，圓心為$(0,r)$，若P點向上轉β度，此時P點坐標為：$(r\sin\beta, r-r\cos\beta)$ 我們假定，當點P轉了β度時，<u>會和圓錐相切</u>。
[圓盤與圓錐的側面圖] 	當圓盤放入圓錐時，由於我們要保持相同角度，因此圓盤會傾斜θ角，此時用空間來觀察，發現點P向上提高 $(r-r\cos\beta)\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}r(1-\cos\beta)$ 點P向內移動了 $(r-r\cos\beta)\cos\theta=\frac{1}{4}r(1-1\cos\beta)$

	以上是指圓盤放在圓錐表面時的情況，若放入圓錐內部，並和圓錐相切時，圓盤的放置位置會向內移動$\boldsymbol{k}$，因此實際上P點向內移動了 $k+(r-r\cos\beta)\cos\theta=k+\frac{1}{4}(r-r\cos\beta)$
[圓錐的側面圖] 	若以點P的高度為基礎，則圓錐在此高度時的截面圓半徑R_1如下所示： $r(1-\cos\beta)\cos\theta=\frac{1}{4}\,r(1-\cos\beta)$ $r(1-\cos\beta)\sin\theta=\frac{\sqrt{15}}{4}\,r(1-\cos\beta)$ $\left[\frac{\sqrt{15}}{4}x-\frac{\sqrt{15}}{4}\,r(1-\cos\beta)\right]：\frac{\sqrt{15}}{4}x$ $=R_1：\frac{1}{4}x$ $\frac{\sqrt{15}}{4}x\times R_1=\frac{1}{4}x\times\left[\frac{\sqrt{15}}{4}x-\frac{\sqrt{15}}{4}\,r(1-\cos\beta)\right]$ $R_1=\frac{1}{\sqrt{15}}\times\left[\frac{\sqrt{15}}{4}x-\frac{\sqrt{15}}{4}\,r(1-\cos\beta)\right]$ $R_1=\frac{1}{4}[x-\ r(1-\cos\beta)]$
[從頂點向下看截面圓與圓盤點P的俯視圖]  	在推算點P在相同高度時，和截面圓的圓心距離，是否等於截面圓的半徑？若是距離等於半徑，代表此時點P和圓錐相切！此時就能得知圓盤放入圓錐時相切的高度，並得到切點連線所形成的截面圓的弦，進而推算圓盤所佔據的角度，再算出第一層可以擺放幾個圓盤。

我們用兩點的距離公式，計算點P到圓心的距離，等於相同高度時的截面圓半徑。

$$\sqrt{(-r\sin\beta)^2+\left[\tfrac{1}{4}x-(k+r(1-\cos\beta)\cos\theta)\right]^2}=\tfrac{1}{4}(x-r(1-\cos\beta))，$$

兩邊平方後，可以得到下列式子：

$$(r\sin\beta)^2+\left[\tfrac{1}{4}x-\left(k+\tfrac{1}{4}r(1-\cos\beta)\right)\right]^2=\left[\tfrac{1}{4}(x-r(1-\cos\beta))\right]^2。$$

將兩邊式子展開後，得到下列關係式：

$$r^2\sin^2\beta+\tfrac{1}{16}x^2-\tfrac{1}{2}x\left(k+\tfrac{1}{4}r(1-\cos\beta)\right)+(k+\tfrac{1}{4}r(1-\cos\beta))^2=\left[\tfrac{1}{4}(x-r(1-\cos\beta))\right]^2，$$

$$r^2\,(1-\cos^2\beta)+\frac{1}{16}x^2-\frac{1}{2}xk-\frac{1}{8}xr+\frac{1}{8}xr\cos\beta+k^2+\frac{1}{2}kr(1-\cos\beta)+\frac{1}{16}r^2(1-\cos\beta)^2$$
$$=\tfrac{1}{16}x^2-\tfrac{1}{8}xr+\tfrac{1}{8}xr\cos\beta+\tfrac{1}{16}r^2(1-\cos\beta)^2。$$

化簡得到下列關係式：

$$r^2-r^2\cos^2\beta-\tfrac{1}{2}xk+k^2+\tfrac{1}{2}kr(1-\cos\beta)=0\quad。$$

我們發現，這是變數k與變數r的二元二次方程式，可透過配方法解方程式：

$$2r^2-2r^2\cos^2\beta-xk+2k^2+kr-kr\cos\beta=0\,,$$

化簡得到下列式子：

$$17k^2-8(x-r)k+16r^2=8\left(\frac{k}{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}r\cos\beta\right)^2$$

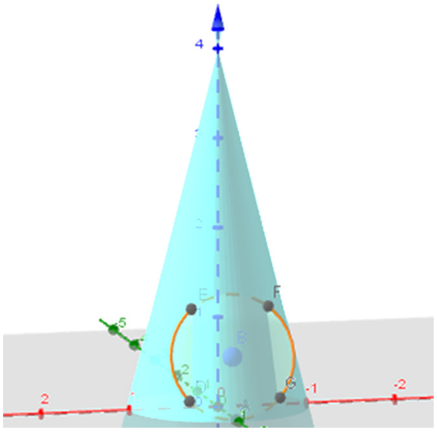
透過一元二次方程式公式解，將左式因式分解如下：

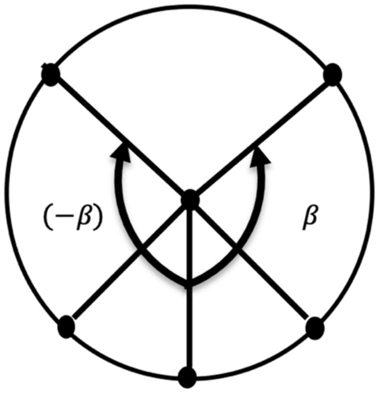
$$\left[17k-\left(4(x-r)+4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)\right]\left[17k-\left(4(x-r)-4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)\right]$$
$$=8\left(\frac{k}{2\sqrt{2}}+\sqrt{2}r\cos\beta\right)^2$$

將式子整理過後，得到式子如下：

$$\cos\beta=\frac{-k\pm\sqrt{\left[17k-\left(4(x-r)+4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)\right]\left[17k-\left(4(x-r)-4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)\right]}}{4r}$$

此時，$\cos\beta$的值會有兩個答案，因為三角函數的特性$cos(-\beta)=cos\beta$，所以當我們決定$\cos\beta$值時，兩個答案會出現四個切點。如下所示：





如圖所示，當圓盤靠近圓錐時，會出現四個切點，兩種cos值。

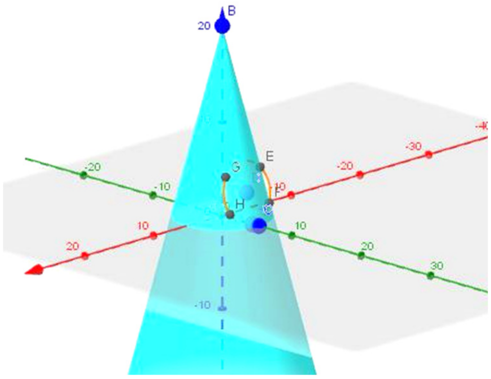
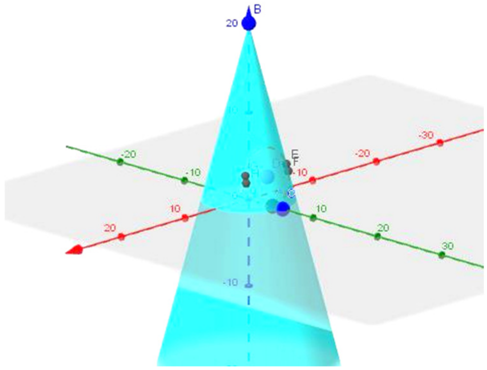
我們要找出圓盤和圓錐的切點，則只會出現兩個切點，也代表著根號中的方程式為0，如下所示：

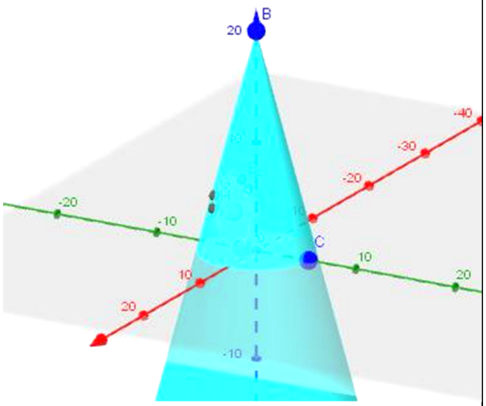
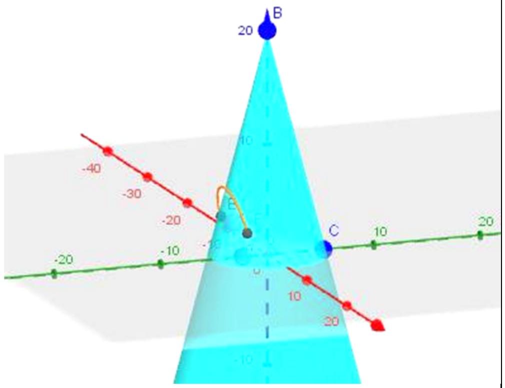
$$17k-\left(4(x-r)\pm 4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)=0\quad ，$$

因此可算出k值如下表示：

$$k=\frac{\left(4(x-r)\pm 4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)}{17}。$$

以上的式子會有正負兩個答案，必需由實際上的操作來做決定。當擺放一直往內移動時，切點會從四個成為兩個，此時答案即為我們所要的結果。然而，若再一直往內移動，則圓盤會和圓錐的另一邊開始出現兩個切點，當圓盤在另一側出現兩個切點時，圓盤必需穿出圓錐才有辦法。如下所示：

	
隨著圓盤的接近，會和圓錐出現四個切點。	當圓盤往內移，切點會逐漸靠近，成兩個。

	
當圓盤往內移超過範圍，又會出現四個切點。	最後，圓盤又會和圓錐交於兩點。

根據實際操作與圖形和數據顯示的結果，取負號即可呈現，即：

$$k=\frac{\left(4(x-r)-4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)}{17}。$$

因此可以得到，圓盤和圓錐切兩點時，所得到的角度如下：

$$\cos\beta=\frac{-\left(4(x-r)-4\sqrt{(x-r)^2-17r^2}\right)}{68r},$$

此時切點的高度為：

$$r(1-\cos\beta)sin\theta\quad，$$

切點連線的長度為：

$$2r\sqrt{1-cos^2\beta}。$$

此時，與該長度所處的相同高度下，截面圓的半徑為：

$$R_1=cos\theta(x-r(1-cos\beta))，$$

而此連線長度，成為截面圓的弦，此弦所展開的角度為：

$$cos\alpha_1=\frac{(cos\theta(x-r(1-cos\beta)))^2-2r^2(1-cos^2\beta)}{(cos\theta(x-r(1-cos\beta)))^2},$$

$$\alpha_1=\cos^{-1}\frac{(cos\theta(x-r(1-cos\beta)))^2-2r^2(1-cos^2\beta)}{(cos\theta(x-r(1-cos\beta)))^2}。$$

接下來，重覆前四個步驟，以第一排的圓盤，在放置$\cos\theta$之後的頂端高度做為基準，再放置第二層的圓盤，依此類推。可以得到每一次放置圓盤時，必須往圓錐內移動的距離為：

$$k_n = \frac{\left(4(x-(2n-1)r)-4\sqrt{(x-(2n-1)r)^2-17r^2}\right)}{17}。$$

圓盤和圓錐所切的點，以圓盤最底部的角度為 0 度開始，每一層和圓錐所切的角度為：

$$\cos\beta_n = \frac{-\left(4(x-(2n-1)r)-4\sqrt{(x-(2n-1)r)^2-17r^2}\right)}{68r}$$

此時，與該長度所處的相同高度下，截面圓的半徑為：

$$R_1 = cos\theta(x-(2n-1)r(1-cos\beta)) \quad ，$$

而此連線長度，成為截面圓的弦，此弦所展開的角度為：

$$\alpha_n = \cos^{-1}\frac{(cos\theta(x-(2n-1)r(1-cos\beta)))^2-2((2n-1)r)^2(1-cos^2\beta)}{(cos\theta(x-(2n-1)r(1-cos\beta)))^2}$$

肆、結論

一、表示圓盤與圓錐相切的相關公式如下：

（一）擺放圓盤時，必需從圓錐表面向內移動的距離為：

$$k_n = \frac{\left(4(x-(2n-1)r)-4\sqrt{(x-(2n-1)r)^2-17r^2}\right)}{17}。$$

（二）圓盤和圓錐相切時，從圓盤最低點到切點所夾的角度為：

$$\cos\beta_n = \frac{-\left(4(x-(2n-1)r)-4\sqrt{(x-(2n-1)r)^2-17r^2}\right)}{68r}。$$

（三）圓盤切點連線，成為同高度的切面圓的弦長，所展開的圓心角為：

$$\alpha_n = \cos^{-1}\frac{(cos\theta(x-(2n-1)r(1-cos\beta)))^2-2((2n-1)r)^2(1-cos^2\beta)}{(cos\theta(x-(2n-1)r(1-cos\beta)))^2}。$$

（四）同一層下，可以擺放的圓盤個數為：

$$[\frac{360}{\alpha_n}]$$

二、頂角 90 度、側邊長度 21 公分、圓盤半徑為 1.5 公分時，總共能擺5層、32個圓盤。其覆蓋率為0.653。

三、頂角 90 度、側邊長度 21 公分，搭配不同圓盤半徑時，最佳圓盤半徑為 2.3；最佳覆蓋率為 0.576。此時總共可以擺 3 層，共 12 個。

由於是第一次嘗試由平面研究至立體研究，而在此所選擇的方式是一排一排向上放置。

是否此方式為最好？有沒有其它排列方法，可以放入更多的圓盤？當成本有限，在規畫聖誕塔時，如何在成本考量下，思考圓錐頂角改變時，圓盤的半徑設為多少為最好？能否求得最佳化的算式或公式？這些問題，需要再多做一些立體的研究，能找到適合的幾何特性，期待日後可以解決這些問題。

參考資料及其他

南一書局主編（民 105）。國中數學課本第五冊第二章：圓的性質。台北：南一書局。

臺北市立建國高級中學數學領域（民 100）。數學補充教材第一冊。台北：建國中學。

Ron Lancaster (2015), Macaron Math. Mathematica Teacher Vol.108, No. 5 December 2014/ January 2015.

GeoGebra AR 官網，檢自：https://www.geogebra.org。(Jun. 10, 2021)

朱蘊鑛、徐世敏(譯)(民 99)。微積分第 9 版(原作者: Dale Varberg, Edwin J. Purcell, Steven E. Rigdon)。東華出版社。(原著出版年: 2006)