淺談分數化小數的分類

朱亮儒

國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

我們知道每一個分數 $\frac{b}{a}$ (其中 a,b 為整數)化成小數時，都是有限小數或無限的循環小數。事實上，在 a,b 互質的情況下，當分母 $a=2^k\times 5^\ell$ 時，其中 $k,\ell\geq 0$，分數 $\frac{b}{a}$ 化成的小數都是有限小數；而當分母 a 有異於 2 和 5 的質因數時，分數 $\frac{b}{a}$ 化成的小數都是無限的循環小數。關於小數與分數轉換的運算，可參考 [1,2,3,4,5,7]。又無限的循環小數可分成含有不循環節的**混循環小數** (mixed recurring decimal) 及沒有不循環節的**純循環小數** (pure recurring decimal)；例如：

$$\frac{13}{20}=\frac{65}{100}=0.65 \quad （有限小數）$$

$$\frac{17}{6}=2+\frac{5}{6}=2.8333\cdots=2.8\overline{3} \quad （混循環小數）$$

$$\frac{1}{7}=0.142857142857\cdots=0.\overline{142857} \quad （純循環小數）$$

$$\frac{17}{11}=1+\frac{6}{11}=1.5454\cdots=1.\overline{54} \quad （純循環小數）$$

本作品的目的是想透過基本且簡單的數學知識，重新詮釋循環小數的相關問題，特別是以下兩個主要的目標：

一、找出哪些分數可以化成純循環小數？又有哪些分數可以化成混循環小數？

二、找出循環小數的不循環節長度及循環節的長度。

貳、分數的分類

每一個分數都可以寫成 $\dfrac{b}{a}$，其中 a 是正整數，而 b 為整數。當 $a>1$，且 a 與 b 互質時(記為 $(a,b)=1$)，則稱 $\dfrac{b}{a}$ 為**最簡分數** (irreducible fraction 或 fraction in lowest term)。我們不難理解每一個不是整數的分數都可以表成最簡分數的形式，而且這種表示法是唯一的。為了符號方便起見，我們以 $D(x)$ 表示由分數 x 化成的小數，並將所有不是整數的分數 x 分成以下三類的集合：

$$A=\left\{x \mid D(x)\text{ 是有限小數}\right\}，$$

$$B=\left\{x \mid D(x)\text{ 是純循環小數}\right\}，$$

$$C=\left\{x \mid D(x)\text{ 是混循環小數}\right\}。$$

很顯然地，分數 $\dfrac{b}{a}$ 與 $-\dfrac{b}{a}$ 化成小數時，其小數的屬性(有限小數或純循環小數或混循環小數)是相同的；因此，本篇作品後續的討論僅須侷限在正分數上即可。另一方面，最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 可表成 $\dfrac{b}{a}=q+\dfrac{r}{a}$，其中 q,r 均為整數，且 $0<r<a$；又 $\dfrac{b}{a}$ 與 $\dfrac{r}{a}$ 化成小數的屬性也相同，因此，只須探討 $\dfrac{b}{a}$ 為真分數的情況，即 $0<b<a$。

同時，我們也引入同餘的符號如下：設 n 為正整數，a,b 是任意整數，當 n 可以整除 $a-b$ 時，就稱在模 n 之下，a 與 b 同餘 (congruence)，記作 $a\equiv b \pmod n$；亦即 a 與 b 除以 n 有相同的餘數。例如：$16\equiv 1 \pmod 3$，又如：$-2\equiv 5 \pmod 7$。

首先，我們給出最簡分數 $\dfrac{b}{a}\in A$ 的充要條件，如下所述：

定理 1. 分數 $x\in A$ 的充要條件為 x 的最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 之分母 a 可以表成 $2^k\times 5^\ell$ 的形式，

其中 k,ℓ 均為非負整數，且至少有一數是正整數。

【證】（充分性）設 $a=2^k\times 5^\ell$。則

$$x=\frac{b}{a}=\frac{b}{2^k\times 5^\ell}=\frac{2^\ell\times 5^k\times b}{10^{k+\ell}}\ ，$$

顯然是一個有限小數。因此，$x=\dfrac{b}{a}\in A$。

（必要性）若 $x=\dfrac{b}{a}\in A$，由 $\dfrac{b}{a}$ 為正分數，且 $0<b<a$，可令 $\dfrac{b}{a}=0.r_1r_2\cdots r_n$。由此可得

$$x=\frac{b}{a}=0.r_1r_2\cdots r_n=\frac{r_1r_2\cdots r_n}{10^n}\text{。}$$

兩邊通分可得到 $b\times 10^n=a\times r_1r_2\cdots r_n$。又 $(a,b)=1$，故 a 為 10^n 的因數，

因此，a 可以表成 $2^k\times 5^\ell$ 的形式。

由定理 1 可知：當最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 的分母 a 有異於 2 和 5 的質因數時，其化成的小數 $D(\dfrac{b}{a})$ 必為無限小數。接著，為了要找出最簡分數 $\dfrac{b}{a}\in B$ 及 $\dfrac{b}{a}\in C$ 的充要條件，我們需要以下的引理：

引理. 設 p_n 是數字均為 1 的 n 位數，即 $p_1=1, p_2=11, p_3=111,\cdots$。若正整數 a 滿足 $(a,10)=1$，則 a 必為某一個 p_n 的因數。

【證】考慮 $p_1,p_2,\cdots,p_{a+1}$ 分別除以 a 的餘數，由鴿籠原理可知：必有兩數的餘數相等。

可設 $i>j$ 使得 $p_i\equiv p_j \pmod a$，即 $p_i-p_j\equiv 0 \pmod a$。又

$$p_i-p_j=\underbrace{111\cdots 1}_{i-j}\underbrace{000\cdots 0}_{j}=p_{i-j}\times 10^j\ ,$$

因此，a 為 $p_{i-j}\times 10^j$ 的因數。又 $(a,10)=1$，故 a 為 p_{i-j} 的因數。

定理 2. 分數 $x\in B$ 的充要條件為 x 的最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 之分母 a 滿足 $(a,10)=1$ (即 a 與 10 互質)。

【證】僅須考慮最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 為正分數且 $0<b<a$ 的情況。

（充分性）若 $(a,10)=1$，由引理得知：a 為某一個 p_n 的因數。可設 $p_n=ka$，因此，

$$x=\frac{b}{a}=\frac{kb}{p_n}=\frac{9kb}{9p_n}=\frac{9kb}{10^n-1}\text{。}$$

由 $1 \le b < a$，得 $9kb < 10^n - 1 < 10^n$，故 $9kb$ 至多為 n 位數。可設 $9kb = s_1 s_2 \cdots s_m$ 為 m 位數，其中 $1 \le m \le n$。由此可得

$$x = \frac{b}{a} = \frac{s_1 s_2 \cdots s_m}{10^n - 1} = 0.\overline{\underbrace{00\cdots0}_{n-m} s_1 s_2 \cdots s_m}\ (當\ m < n)\ 或\ 0.\overline{s_1 s_2 \cdots s_n}\ (當\ m = n)$$

為純循環小數，故 $x = \frac{b}{a} \in B$。

（必要性）若 $x = \frac{b}{a} \in B$，則可設 $\frac{b}{a} = 0.\overline{r_1 r_2 \cdots r_n} = \frac{r_1 r_2 \cdots r_n}{10^n - 1}$。兩邊通分，可以得到 $b \times (10^n - 1) = a \times r_1 r_2 \cdots r_n$。又 $(a,b) = 1$，故 a 為 $10^n - 1$ 的因數，因此，$(a,10) = 1$。

定理 3. 分數 $x \in C$ 的充要條件為 x 的最簡分數 $\frac{b}{a}$ 之分母 a 有異於 2 和 5 的質因數，且 $(a,10) \ne 1$ (即 a 與 10 不互質)。

【證】 因為 $A \cup B \cup C$ 是所有不為整數的分數所成的集合，且這三個集合 A, B, C 兩兩互斥，因此，最簡分數 $\frac{b}{a} \in C$ 的充要條件為 $\frac{b}{a} \notin A$ 且 $\frac{b}{a} \notin B$。

由定理 1，最簡分數 $\frac{b}{a} \in A$ 的充要條件為分母 a 的質因數僅可能為 2 和 5；故 $\frac{b}{a} \notin A$ 的充要條件為分母 a 有異於 2 和 5 的質因數。又由定理 2，最簡分數 $\frac{b}{a} \in B$ 的充要條件為 $(a,10) = 1$；故 $\frac{b}{a} \notin B$ 的充要條件為 $(a,10) \ne 1$。因此，最簡分數 $x = \frac{b}{a} \in C$ 的充要條件為分母 a 有異於 2 和 5 的質因數，且 $(a,10) \ne 1$。

關於加法的封閉性（closedness），顯然集合 A 對加法有封閉性，但集合 B 與 C 則無。例如：$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$，$\frac{2}{3} = 0.\overline{6} \in B$，但 $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \notin B$；而 $\frac{11}{90} = 0.1\overline{2}$，$\frac{29}{90} = 0.3\overline{2} \in C$，但 $\frac{11}{90} + \frac{29}{90} = \frac{4}{9} = 0.\overline{4} \notin C$。對此性質，我們整理出以下的推論：

推論. 設 $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{d}{c}$ 都是最簡分數。

(1) 若 $\frac{b}{a}, \frac{d}{c} \in A$，則 $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} \in A$。

(2) 若 $\frac{b}{a},\frac{d}{c}\in B$，且 $a\neq c$，則 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\in B$。

(3) 若 $\frac{b}{a},\frac{d}{c}\in C$，且 $(a,c)=1$，則 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}\in C$。

【證】(1) 任意兩個有限小數相加仍為有限小數，因此，集合 A 對加法有封閉性。

(2) 令 $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{ad+bc}{ac}$ 化簡後的分數為 $\frac{q}{p}$，其中 $p\geq 1$。由定理 2 知：$(a,10)=1$ 且 $(c,10)=1$；因此，$(ac,10)=1$。又 p 是 ac 的因數，故 $(p,10)=1$。欲證明 $\frac{q}{p}\in B$，還須證明 $p>1$。假設 $p=1$，則 $ad+bc=acq$。由 $a(cq-d)=bc$，且 $(a,b)=1$，得知 a 是 c 的因數。同理，由 $c(aq-b)=ad$，且 $(c,d)=1$，得知 c 也是 a 的因數；又 a,c 都是正整數，故 $a=c$，矛盾！因此，$p\neq 1$。

(3) 設 $\frac{b}{a},\frac{d}{c}$ 化成混循環小數後，其小數點後不循環節的長度分別為 k,ℓ。令 $\max\{k,\ell\}$ 表示 k,ℓ 中較大的數，則 $\frac{b}{a}\times 10^{\max\{k,\ell\}}$ 與 $\frac{d}{c}\times 10^{\max\{k,\ell\}}$ 都是純循環小數。又當它們化成最簡分數時，其分母不會相同，證明如下：假設它們的最簡分數分別為 $\frac{q}{p}$ 與 $\frac{r}{p}$（分母同為 p）。顯然，p 是 a 的因數，也是 c 的因數。利用定理 3，a 有異於 2 和 5 的質因數且 $(a,10)\neq 1$；又 $(a,b)=1$，可推得 $p\neq 1$；故 $(a,c)\neq 1$，此與題設條件矛盾。因此，由(2)可知：

$$\frac{b}{a}\times 10^{\max\{k,\ell\}}+\frac{d}{c}\times 10^{\max\{k,\ell\}}\in B，$$

故

$$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\left(\frac{b}{a}\times 10^{\max\{k,\ell\}}+\frac{d}{c}\times 10^{\max\{k,\ell\}}\right)\times 10^{-\max\{k,\ell\}}\in C。$$

參、進一步的申論

最後，我們要進一步探究的問題是『當最簡分數 $\frac{b}{a}$ 化成的小數 $D(\frac{b}{a})$ 為混循環小數時，即 $\frac{b}{a}\in C$，其小數點後不循環節的長度又是如何？』。

定理 4. 若最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 的分母 $a=2^k\times p$，其中 $k\geq 1, p>1$，且 $(p,10)=1$，則 $D(\dfrac{b}{a})$ 為混循環小數，且小數點後不循環節的長度為 k。

【證】僅須考慮最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 為正分數且 $0<b<a$ 的情況。由定理 3，可知：$\dfrac{b}{a}\in C$，即 $D(\dfrac{b}{a})$ 為混循環小數。由 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{b}{2^k\times p}=\dfrac{1}{10^k}\times\dfrac{5^k\times b}{p}$ 及 $(p,10)=1$，可推得：$\dfrac{5^k\times b}{p}$ 仍為最簡分數。由定理 2，得知：$\dfrac{5^k\times b}{p}\in B$，故可令

$$\frac{5^k\times b}{p}=r_1r_2\cdots r_n.\overline{s_1s_2\cdots s_m}$$ 。（n 位數的整數及 m 位循環節）

又 $\dfrac{5^k\times b}{p}<10^k$，得知 $\dfrac{5^k\times b}{p}$ 至多為 k 位數，故 $n\leq k$。因此，

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{10^k}\times r_1r_2\cdots r_n.\overline{s_1s_2\cdots s_m}=0.\underbrace{00\cdots0\,r_1r_2\cdots r_n}_{k}\underbrace{\overline{s_1s_2\cdots s_m}}_{m}$$ ，

其小數點後的不循環節長度為 k。

定理 5. 若最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 的分母 $a=5^k\times p$，其中 $k\geq 1, p>1$，且 $(p,10)=1$，則 $D(\dfrac{b}{a})$ 為混循環小數，且小數點後不循環節的長度為 k。

【證】在定理 4 的證明過程中，互換數字 2 與 5 的角色，即可得到同樣的證明。

定理 6. 若最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 的分母 $a=2^k\times 5^\ell\times p$，其中 $k,\ell\geq 1, p>1$，且 $(p,10)=1$，則 $D(\dfrac{b}{a})$ 為混循環小數，且小數點後不循環節的長度為 $\max\{k,\ell\}$。

【證】僅須考慮最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 為正分數且 $0<b<a$ 的情況。由定理 3，可知：$\dfrac{b}{a}\in C$，故 $D(\dfrac{b}{a})$ 為混循環小數。當 $k=\ell$ 時，$\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{10^k}\times\dfrac{b}{p}$，其中 $\dfrac{b}{p}$ 仍為最簡分數。由定理 2，得知：$\dfrac{b}{p}\in B$，故可令

$$\frac{b}{p}=r_1r_2\cdots r_n.\overline{s_1s_2\cdots s_m}\text{ 。（n 位數的整數及 m 位循環節）}$$

又 $\frac{b}{p}<10^k$ ，得知 $\frac{b}{p}$ 至多為 k 位數，故 $n\le k$ 。因此，

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{10^k}\times r_1r_2\cdots r_n.\overline{s_1s_2\cdots s_m}=0.\underbrace{00\cdots 0\,r_1r_2\cdots r_n}_{k}\underbrace{\overline{s_1s_2\cdots s_m}}_{m}\ ,$$

其小數點後的不循環節長度為 k 。

另一方面，若 $k\ne\ell$ ，不失一般性，可設 $k=\max\{k,\ell\}>\ell\ge 1$，則

$$\frac{b}{a}=\frac{1}{10^\ell}\times\frac{b}{2^{k-\ell}\times p}\text{ 。}$$

其中 $\frac{b}{2^{k-\ell}\times p}$ 仍為最簡分數。利用定理 2，可知： $\frac{b}{2^{k-\ell}\times p}\in B$ ，再由定理 4，得知其小數點後不循環節的長度為 $k-\ell$ 。因此， $\frac{b}{a}=\frac{1}{10^\ell}\times\frac{b}{2^{k-\ell}\times p}\in C$ ，且其小數點後不循環節的長度為 $(k-\ell)+\ell=k$ 。證畢！

至於循環小數的循環節長度為何，目前尚無一個良好的直接計算法則。以下的定理提供循環節長度的一個上界：

定理 7. 若循環小數 x 化成的最簡分數為 $\frac{b}{a}$，則 x 的小數點後循環節的長度不超過 $a-1$。更進一步地，若 k,ℓ 分別為 x 的小數點後不循環節與循環節的長度，則 $10^{k+\ell}\equiv 10^k \pmod a$。

【證】僅須考慮最簡分數 $\frac{b}{a}$ 為正分數且 $0<b<a$ 的情況。由於 $x=\frac{b}{a}\in B\cup C$ ，我們分以下兩種情況來討論：

情況一：當 $x=\frac{b}{a}\in B$ 時， x 為純循環小數，可令 $\frac{b}{a}=0.\overline{q_1q_2q_3\cdots q_\ell}$ 。事實上，

若以長除法求 $b\div a$ 所得的餘數依次為 $r_1,r_2,r_3,\cdots$，則所有的餘數 $r_i\ne 0$（否則 x 為有限小數），且 $10r_i=a\times q_{i+1}+r_{i+1}$，其中 $i=0,1,2,\cdots,\ell-1$，而 $r_0=b$ 。例如： $\frac{44}{333}=0.\overline{132}$ 的循環節之長度為 $\ell=3$ ，而 $44\div 333$ 長除法所得的餘數依次為 $r_1=107,r_2=71,r_3=44,\cdots$ 。由 x 的循環節為 ℓ ，可

知 $r_1, r_2, r_3, \cdots, r_{\ell-1}$ 均相異，且 $r_\ell = b$。再由鴿籠原得知 $\ell \le a-1$，故 x 的循環節之長度不超過 $a-1$。

情況二： 當 $x=\dfrac{b}{a}\in C$ 時，設混循環小數 $x=\dfrac{b}{a}$ 的小數點後不循環節的長度為 k，並令 $y=10^k x$。則 y 是一純循環小數，即 $y\in B$。若 $y=\dfrac{10^k b}{a}$ 的最簡分數為 $\dfrac{b_1}{a_1}$，則由情況一可知：y 的循環節的長度不超過 a_1-1。又 $a_1 \le a$，故 y 的循環節長度不超過 $a-1$。因此，混循環小數 $x=\dfrac{y}{10^k}$ 的小數點後循環節的長度也不會超過 $a-1$。

更進一步地，因為 $10^k x$ 與 $10^{k+\ell}x$ 均為純循環小數，它們的循環節相同且長度都等於 ℓ；故 $\dfrac{b(10^{k+\ell}-10^k)}{a}=10^{k+\ell}x-10^k x$ 是一個整數。又 $(a,b)=1$，可推得 $10^{k+\ell}-10^k$ 必須是 a 的倍數；故 $10^{k+\ell}-10^k \equiv 0 \pmod a$，即 $10^{k+\ell}\equiv 10^k \pmod a$。證畢！

事實上，當 x 是一純循環小數時，其循環節的長度與數論中的尤拉(Euler)函數有關。所謂**尤拉函數**是指對正整數 a，從 1 到 a 的正整數中，與 a 互質的數之個數，記為 $\varphi(a)$。此函數是為紀念首名研究者 Euler 而命名，也稱為 **φ 函數**(此函數由高斯(Gauss)所命名)。例如：$\varphi(1)=\varphi(2)=1, \varphi(3)=\varphi(4)=2, \varphi(5)=4, \varphi(6)=2, \varphi(7)=6$。當 p 為質數時，$\varphi(p)=p-1$。一般而言，若 a 的質因數分解式為 $a=p_1^{r_1}\times p_2^{r_2}\times\cdots\times p_k^{r_k}$，則

$$\varphi(a)=a\times(1-\frac{1}{p_1})\times(1-\frac{1}{p_2})\times\cdots\times(1-\frac{1}{p_k})\text{。}$$

推論. 若循環小數 x 化成的最簡分數為 $\dfrac{b}{a}$，其中 $(a,10)=1$，且 ℓ 為 x 的小數點後循環節的長度，則 $10^\ell \equiv 1 \pmod a$。更進一步地，ℓ 是滿足 $10^t \equiv 1 \pmod a$ 的最小正整數 t，且 ℓ 是 $\varphi(a)$ 的因數。

【證】 僅須考慮 $0<b<a$ 的情況。因為 $(a,10)=1$，由定理 2 可得 $x=\dfrac{b}{a}\in B$，即 x 為純循環小數。因此，由定理 7（取 $k=0$ 的情況）可知：$10^\ell \equiv 1 \pmod a$。假設滿足 $10^t \equiv 1 \pmod a$ 的最小正整數 $t=m$，則由 $10^\ell \equiv 1 \pmod a$ 可得 $m\le \ell$。另一方面，

由 $10^m \equiv 1 \pmod{a}$，得知 $10^m - 1$ 是 a 的倍數，故 $(10^m - 1)\times b$ 也是 a 的倍數。

因此，

$$10^m \times \frac{b}{a} - \frac{b}{a} = (10^m - 1)\times \frac{b}{a} \text{ 是一個整數。}$$

因為 $x = \dfrac{b}{a}$ 為純循環小數且循環節的長度為 ℓ，可設 $x = \dfrac{b}{a} = 0.\overline{s_1 s_2 \cdots s_\ell}$。因此，

由 $10^m \times \dfrac{b}{a} - \dfrac{b}{a}$ 是一個整數，可推得 m 必須是 ℓ 的倍數，故 $\ell \le m$。於是可得 $\ell = m$；即滿足 $10^t \equiv 1 \pmod{a}$ 的最小正整數 $t = \ell$。

進一步令 $\varphi(a) = \ell \times q + r$，其中 q, r 為非負整數，且 $0 \le r < \ell$。又 $(a,10) = 1$，由著名的尤拉定理：$10^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a}$，可推得

$$10^r \equiv (10^\ell)^q \times 10^r \equiv 10^{\ell\times q + r} \equiv 10^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{a}\text{。}$$

因為滿足 $10^t \equiv 1 \pmod{a}$ 的最小正整數 t 等於 ℓ，且 $0 \le r < \ell$，故 $r = 0$。於是可知：ℓ 是 $\varphi(a)$ 的因數。證畢！

肆、結語

小數與分數都是中小學生在數學的學習領域中重要的基礎概念 [6~12]，每一個分數都可化成小數，但並非所有小數都可化成分數。其中，分數化成小數時，可能為有限小數，也可能為純循環小數或混循環小數。大數學家高斯(Gauss)在他的著作[9]中就曾詳細探討過分數化小數的循環節問題，有興趣的讀者可自行研讀。我們在研究中發現分數的分類方式僅與其最簡分數 $\dfrac{b}{a}$ 之分母 a 的因數有關，同時也得到在混循環小數的情況下，可以透過 a 的質因數分解，確定其小數點後不循環節的長度。至於循環節本身的長度仍需伴隨尤拉函數的角色，雖然可以透過電腦軟體的運算來克服，但使用上仍有一些有效位數與範圍限制的盲點，有待後續再深入研究。

參考文獻

康明昌 (2001), 循環小數, 數學傳播 25 卷 3 期, 55-62.

劉曼麗、侯淑芬 (2012), 小數與分數的轉換, 屏東教大科學教育 35, 36-48.

胡久稔 (1987), 希爾伯特第十問題,九章出版社.

N.J. Armstrong and R.J. Armstrong (2003), Some properties of repetends, Mathematical Gazette 87, 437-443.

W.W.R. Ball and H.S.M. Coxeter (1987), Mathematical Recreations and Essays, 13th ed. New York: Dover, 53-54.

J.H. Conway and R.K. Guy (1996), The Book of Numbers. New York: Springer-Verlag, 167-168.

R. Courant and H. Robbins (1996), What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods, 2nd ed. Oxford, England: Oxford Univ. Press, 66-68.

L.E. Dickson (1952), History of the Theory of Numbers, Vol. 1, Chelsea Publishing Co..

C.F. Gauss (1966), Disquistions Arithmeticae, English transl. by A.A. Clarke, Yale Univ. Press, New Haven.

J. Hefferon (2003), Elementary Number Theory, A revision of notes by W. Edwin Clark, Univ. of South Florida, Tampa.

L.L. Yong and A.T. Se (2004), Fleeting Footsteps. Tracing the Conception of Arithmetic and Algebra in Ancient China, Revised Edition, World Scientific, Singapore.

E.W.Weisstein (1999). "Repeating Decimal." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. https://mathworld.wolfram.com/RepeatingDecimal.html