不摺無數：從芳賀定理談正方形色紙邊長三等份摺紙的延伸

李政憲 [1]* 吳貞慧 [2] 謝麗燕 [3]

[1] 新北市立林口國民中學

[2] 桃園市立中壢國民中學

[3] 新北市立安溪國民中學

一、前言

日本筑波大學生物學教授芳賀和夫（Kazuo Haga），在等待實驗結果的時候喜歡用摺紙打發時間。閒暇之餘的活動，除了趣味更可以活絡大腦，著有「摺紙玩數學」一書（世茂出版社譯，2016），他在書中曾提及三等分色紙的幾種不同方式，也在「Origamics」一書中提及芳賀三大定理的說明。然而一般人看到的芳賀定理，多以為只有色紙三等分摺紙的討論，殊不知還可以延伸至其他等分摺紙與尺規作圖概念的討論，十分適合在課堂中進行教學，與學生深入討論。本文將逐一介紹三大定理的概念說明與延伸學習，讓讀者們可以完整了解三個定理的由來與應用，進一步並探索與中學數學的關聯性。首先簡單說明以下命題：

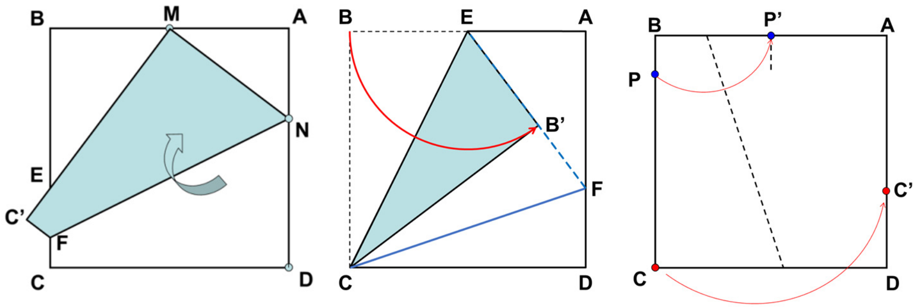


圖 1

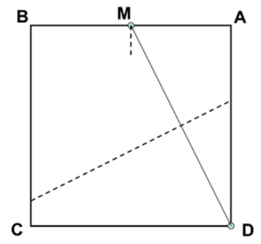
圖 1 中的三個圖，分別代表正方形色紙 ABCD 中將各頂點或邊上的點摺至上方中點（M、E、P’），則所得的 E、F 與 C’點均為色紙邊長的三等分點。接下來讓我們一一探究這三種摺法的性質與延伸內容。

二、芳賀第一定理說明與性質討論

芳賀和夫透過一張色紙上取邊上的中點並摺出一條摺痕，發現了以下十分有趣的結果。

「芳賀第一定理」

把正方形紙 $ABCD$ 的一邊 $\overline{AB}$ 對摺，打開得到中點 M，再把點 D 摺向 M



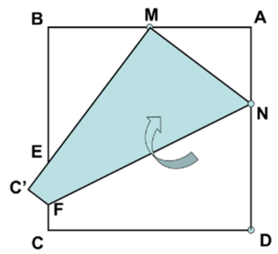
可得到

$\overline{AN}:\overline{ND}=3:5$

$\overline{ME}:\overline{EC'}=5:1$

$\overline{BE}:\overline{EC}=2:1$

$\overline{BF}:\overline{FC}=7:1$



以上結果稱為「芳賀第一定理」。芳賀教授是如何得到此結果的？其實只要用勾股定理就可以得到證明。在此證明如下：

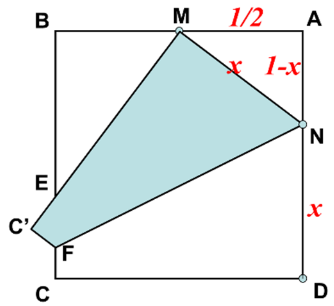


圖 2

並設 $\overline{DN}=x=\overline{MN}$，則 $\overline{AN}=1-x$，由勾股定理列式計算得：

$x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2$ 得 $x=\frac{5}{8}$ 所以 $\overline{DN}=x=\frac{5}{8}$， $\overline{AN}=1-x=\frac{3}{8}$

並可以發現 $\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{MN}=\frac{3}{8}:\frac{1}{2}:\frac{5}{8}=3:4:5$ 。 這是一組勾股數。

此時，思考左邊△*BME* 和△*ANM* 有何關係？其三邊長的比為何？是否也會是邊長 3：4：5 的三角形?

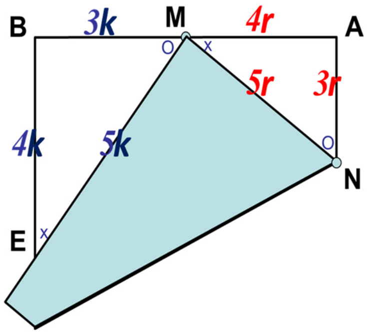


圖 3

如上圖 3，根據三角形 AA 相似性質($\angle MBE=90^\circ=\angle NAM$，$\angle BME=\angle ANM$)，我們發現⊿*BME* 與⊿*ANM* 相似，所以也是另一組邊長 3：4：5 的三角形，並可以計算得到$\overline{BE}$的長度：

$\overline{BE}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$　　則 $\overline{EC}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$　　所以，$\overline{BE}:\overline{EC}=2:1$

再由勾股定理計算：

$\overline{ME}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{5}{6}$　　$\overline{EC'}=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$　　所以，$\overline{ME}:\overline{EC'}=5:1$

同理⊿*BME* 與左下角⊿*C'FE* 相似，也是另一組邊長 3：4：5 的三角形，計算得到$\overline{EF}$的長度：

$\overline{EF}=\frac{1}{6}\times\frac{5}{4}=\frac{5}{24}$　　，則 $\overline{FC}=1-\frac{2}{3}-\frac{5}{24}=\frac{1}{8}$　　所以，$\overline{BF}:\overline{FC}=(1-\frac{1}{8}):\frac{1}{8}=7:1$

以上芳賀和夫教授發現的結果皆得到證明。並且可以得知 $\overline{BC}$邊上的 E 點為三等分點，若將 B 摺向 E 兩點重合，即可將正方形 ABCD 的邊長 $\overline{BC}$ 分成三等分，「芳賀第一定理」提供了一個把正方形紙分作三等分的途徑。

三、芳賀第一定理延伸學習與應用

以上得到三組均是邊長 3：4：5 具有勾股數的三角形，我們繼續探究下去，若要摺的不是上方的中點，而是三等分、四等分或其他等分點，則會有什麼不一樣的結果？是否可以找到一般式，如何能具體說明結果？又不同的等分點如何以尺規作圖完成？

思考右側直角三角形$\triangle AMN$，考慮把 D 摺向 $\overline{AB}$ 上其他位置，看看直角三角形$\triangle AMN$的邊長會有甚麼關係呢？如下圖 4 我們假設 $\overline{AB}=1$，$\overline{AN}=x$ 及 $\overline{AM}=\frac{p}{q}$ 其中 $p,q\in N$，則 $\overline{MN}=1-x$。

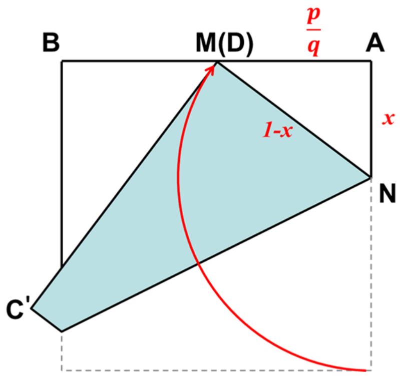


圖 4

以下由勾股定理可得到：

$$(\frac{p}{q})^2+x^2=(1-x)^2$$

$$\frac{p^2}{q^2}+x^2=1-2x+x^2$$

$$x=\frac{(q^2-p^2)}{2q^2}$$

所以，$\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{MN}=\frac{(q^2-p^2)}{2q^2}:\frac{p}{q}:1-\frac{(q^2-p^2)}{2q^2}$

即 $\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{MN}=(q^2-p^2):2pq:(p^2+q^2)$

因此，只要 $\overline{AM}$ 是有理數，則ΔAMN的三個邊長的比例必然是「勾股數」。

以下得到一些結果：

p/q	$\overline{AN}:\overline{AM}:\overline{MN}$
1/2	3：4：5
1/3	4：3：5
1/4	15：8：17
1/5	12：5：13
…	….
2/3	5：12：13
3/4	7: 24：25
2/5	21: 20：29
3/5	8: 15：17
4/5	9：40：41

由上表可以得知經由將 D 點摺向 $\overline{AB}$ 上其他不同比例位置時，國中數學最常見到的(3 : 4 : 5)、(5 : 12 : 13)、(7 : 24 : 25)、(8 : 15 : 17)、(9 : 40 : 41)、(20 : 21 : 29)六組不同勾股數三角形，可透過摺紙方式一一摺製出來。這一點，芳賀先生一定也沒想到，透過摺紙得到的奇妙發現是不是很有趣呢？

至於表上所列出的$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdot\cdot\cdot \frac{1}{m}$,，如何以摺紙技法找出呢？

操作說明：如下圖 5，在正方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$平行$\overline{CD}$，取$\overline{AB}$中點M，並摺出$\overline{MD}$、$\overline{AC}$兩線段，且設$\overline{MD}$、$\overline{AC}$相交於E點。

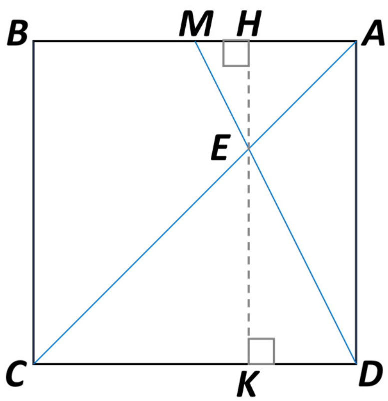


圖 5

則$\triangle MAE \sim \triangle DCE$ (兩組內錯角相等，AA 相似)，且兩三角形對應邊長比例為 1：2，

若是過 E 點作摺痕 $\overline{HK}$ 垂直 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 於 H、K，則 $\overline{EH}:\overline{EK}$ 亦為 $1:2$，則 E 點即為 $\overline{HK}$ 的三等分點，以上方法發現由二等分可以得到三等分。那麼由三等分得到四等分，由四等分得到五等分就不是太難的事了，並且其餘以此可以類推…。也就是說，若我們得知紙的一邊的 $\frac{1}{n}$，則可以得到另一邊的 $\frac{1}{n+1}$（方法就如 $\frac{1}{2}$ 得到 $\frac{1}{3}$ 一樣，如下圖 6)，其原理由相似三角形就可以得到證明。

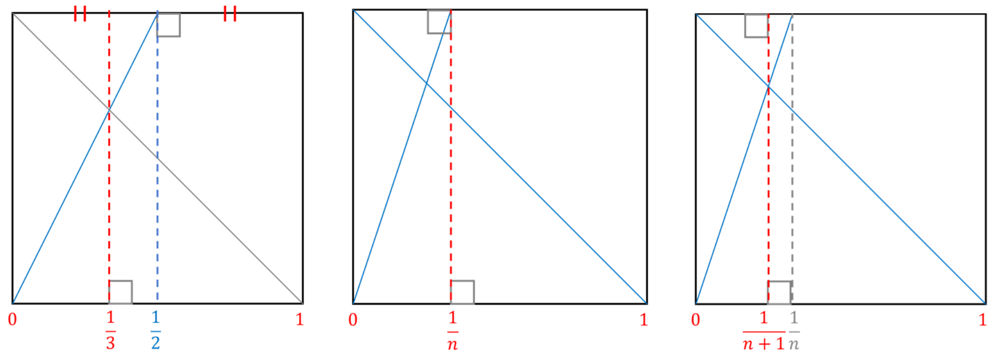


圖 6

有興趣的朋友不妨再想想是否還有其他勾股數的摺法，或是參考**【註 1】**，將有更詳盡的探討。

<u>芳賀</u>先生用摺紙方法將正方形色紙邊長三等分，也得到其他線段不同的比例，形成很有趣的「芳賀第一定理」。此時再思考，第一定理中的摺紙步驟得將色紙三等分，若改由尺規作圖的方式，如何找到 E 點？其使用的尺規作圖的方法為何？

以下幾個問題延伸學習說明國中生可以使用的基本作圖方法。

Q1：摺紙步驟中：如圖 7，把正方形紙 $ABCD$ 的一邊 $\overline{AB}$ 對摺，打開得到中點 M，再把點 D 摺向 M，可由哪一種基本作圖做到？

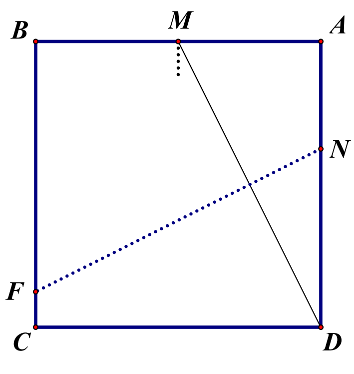


圖 7

學生很容易可以發現作圖方法如下：

步驟 1：作 $\overline{AB}$ 的中垂線可得到 $\overline{AB}$ 中點 M，

步驟 2：連接 $\overline{MD}$，作 $\overline{MD}$ 的中垂線，交 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$ 邊於 N、F。

Q2：接著思考當把點 D 摺向中點 M 時，四邊形 $MNFC'$ 全等於四邊形 $DNFC$， 觀察圖形可以得到 $\angle NMC'=90^{\circ}=\angle NDC$，且 $\overline{MN}=\overline{DN}$，試問可由三角形那一個性質得到上述結果？若不採用摺紙方式，如何尺規作圖找到三等分點 E 點？

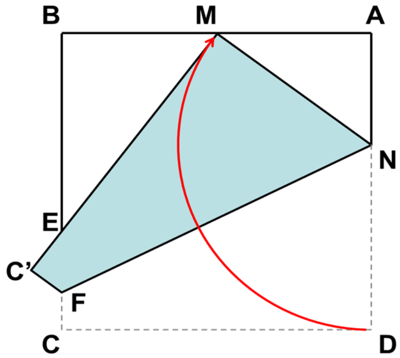


圖 8

觀察圖形，可以發現若 $\angle NMC'=90^{\circ}=\angle NDC$，且 $\overline{MN}=\overline{DN}$，此為三角形角平分線性質，試問此時要平分的是那一個角？如何得到此角？

操作說明：

步驟 1：延長射線 $\overrightarrow{NF}$、$\overrightarrow{DC}$，可得到兩延長線交於一點 P

步驟 2：連接 $\overline{MP}$，交 $\overline{BC}$ 於 E 點，則 $\overline{PN}$ 為 $\angle MPD$ 角平分線

步驟 3：由前面說明得知 ΔBME 與 ΔANM 相似，也是另一組邊長 3：4：5 的三角形，計算得 $\overline{BE}$ 的長度：

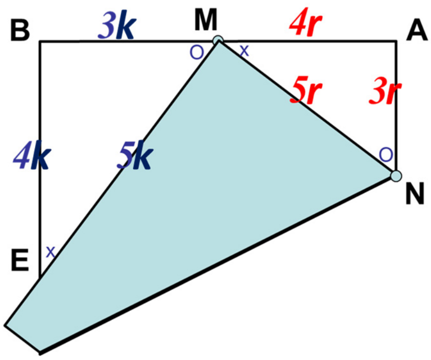
若 $\overline{AM}$ 長為 $\frac{1}{2}$

可計算得 $\overline{BE}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$

則 $\overline{EC}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

所以，$\overline{BE}:\overline{EC}=2:1$

可以得知 E 點為 $\overline{BC}$ 邊上三等分點



步驟 4：若以 E 點為圓心，$\overline{EC}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{BE}$ 於 G 點 (或作 $\overline{BE}$ 的中垂線找到 $\overline{BE}$ 中點 G)，則可得到 E、G 為 $\overline{BC}$ 三等分點。

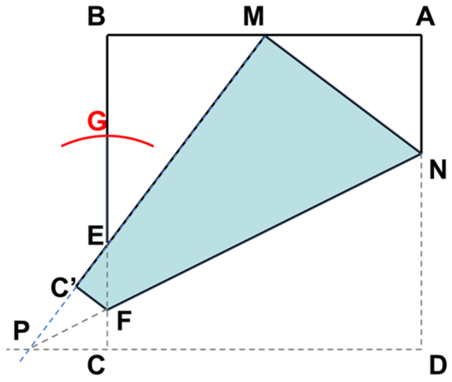


圖 9

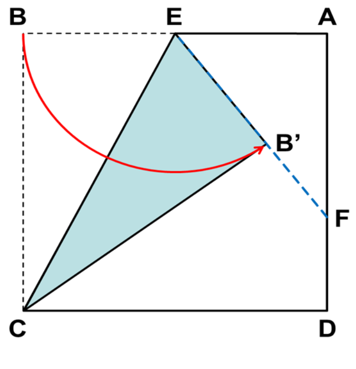
Q3：接著再思考二等分、四等分、八等分，可由對摺平分概念摺出，或以中垂線作圖得到，其他如三等分點、五等分點、七等分點…如何以尺規作圖找到？沒錯，就是九年級數學，以比例線段的概念，作三等分、五等分、七等分…的平行線可以得到所欲找到的等分點。

四、芳賀第二定理說明與性質討論

芳賀和夫在發現了第一定理後，繼續尋找其他可以在色紙內摺製邊長三等分點的方式，結果得到「芳賀第二定理」。以下是第二定理的說明：

「芳賀第二定理」

如右圖，在正方形紙 $ABCD$ 中，將 $\overline{AB}$ 對摺在中點 E 作摺痕，接著把端點 C、E 連線將 B 往右下摺得 B' 點，設 $\overline{EB'}$ 的延長線摺出和 $\overline{AD}$ 的交點為 F，則 $\overline{AF}:\overline{FD}$ =2:1。



在此我們提供以下幾個問題供大家一同思考：

Q4. $\overline{CF}$ 是否平分 $\angle B'CD$？ $\overline{B'F}$ 與 $\overline{DF}$ 是否等長?

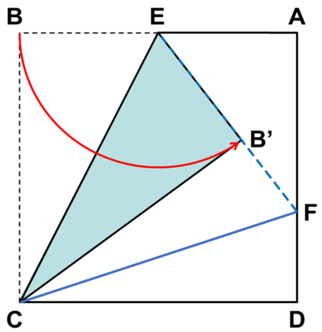


圖 10

如上圖 10，連 $\overline{CF}$，在 $\triangle FCB'$ 和 $\triangle FCD$ 中，

已知 $\angle CB'F = \angle CDF = 90^\circ$， $\overline{CB'} = \overline{CD}$ ， $\overline{CF}$ 共用邊，

則 $\triangle FCB' \cong \triangle FCD$ (RHS 全等)，

故 $\angle FCB' = \angle FCD$(對應角)，即 $\overline{CF}$ 平分 $\angle B'CD$。

且 $\overline{B'F} = \overline{DF}$ (對應邊)。

Q5. 證明 $\overline{AF} : \overline{FD} = 2:1$

設正方形 $ABCD$ 邊長為1， $\overline{B'F} = \overline{DF} = x$， $\overline{AF} = 1 - x$，

$\overline{BE} = \overline{EA} = \frac{1}{2} = \overline{EB'}$ ， $\overline{EF} = \frac{1}{2} + x$

在直角 $\triangle AEF$ 中， $\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2$

$$\left(\frac{1}{2} + x\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 - x)^2$$

$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$\overline{AF} : \overline{FD} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) : \frac{1}{3} = 2:1$$

Q6. 想一想，除了上面的方式，是否有其他的操作方式也可以用同樣的方法說明邊長三等分點？

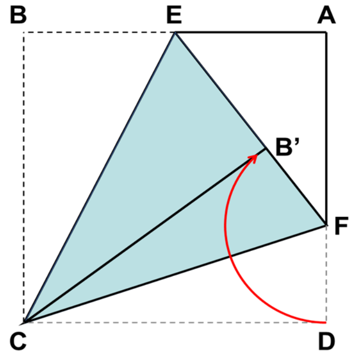


圖 11

操作說明：如圖 11，在正方形紙 $ABCD$ 中取 $\overline{AB}$ 中點 E，接著把端點 C、E 連線將 B 往右下摺得 B'點，接著摺$\angle B'CD$ 角平分線交 $\overline{AD}$ 於 F 點，則 D 點與 B' 點重合，且 $\overline{AF}:\overline{FD}=2:1$。

Q7. 思考看看，除了上面的證明，還有其他的證明也可以得知 $\overline{AF}:\overline{FD}=2:1$。

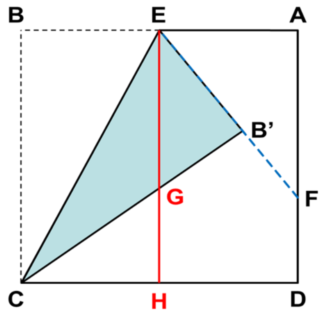


圖 12

如上圖 12，作 $\overline{EH}$ 垂直 $\overline{CD}$，且與 $\overline{CB'}$ 相交於 G 點

在$\triangle EGB'$ 和$\triangle CGH$ 中，

因為$\angle GB'E=\angle GHC=90^{\circ}$，$\overline{EB'}=\overline{BE}=\overline{CH}$，$\angle EGB'=\angle CGH$(對頂角)，

則$\triangle EGB'\cong\triangle CGH$ (AAS 全等)

設正方形$ABCD$邊長為1，$\overline{GH}=x$，$\overline{EG}=1-x=\overline{CG}$，

$\overline{BE} = \overline{CH} = \dfrac{1}{2} = \overline{EB'}$，

在直角△CGH中，$\overline{CG}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{GH}^2$

$$(1-x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x^2$$

$$2x = \frac{3}{4}$$

$$x = \frac{3}{8}$$

所以 $\overline{GH} : \overline{CH} : \overline{CG} = \dfrac{3}{8} : \dfrac{1}{2} : \dfrac{5}{8} = 3:4:5 = \overline{GB'} : \overline{EB'} : \overline{EG}$

又△EGB' ～△FEA (AA 相似性質)

$$由\ \overline{GB'} : \overline{EB'} = \overline{EA} : \overline{FA}$$

$$3:4 = \frac{1}{2} : \overline{FA}$$

得 $\overline{FA} = \dfrac{2}{3}$，故 $\overline{AF} : \overline{FD} = \dfrac{2}{3} : (1-\dfrac{2}{3}) = 2:1$

若我們將上述結果作進一步的討論，可再說明如下：

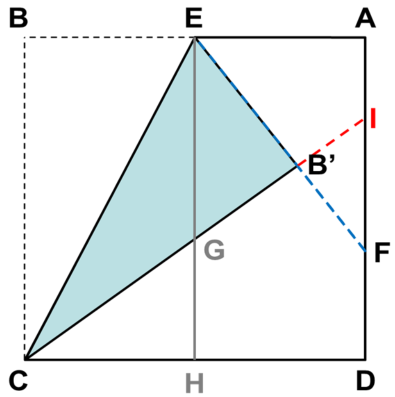


圖 13

(一)如圖 13，由 AA 相似找到 5 個三角形相似，三角形邊長比皆是 3:4:5

△EGB'～△FIB'～△FEA~△CGH～△CID

設正方形 $ABCD$ 邊長為 1，將 5 個相似三角形邊長計算其值，如下表:

	3r	4r	5r
$\triangle EGB'$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ ($\frac{4}{8}$)	$\frac{5}{8}$
$\triangle FIB'$	$\frac{1}{4}$ ($\frac{3}{12}$)	$\frac{1}{3}$ ($\frac{4}{12}$)	$\frac{5}{12}$
$\triangle FEA$	$\frac{1}{2}$ ($\frac{3}{6}$)	$\frac{2}{3}$ ($\frac{4}{6}$)	$\frac{5}{6}$
$\triangle CGH$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$ ($\frac{4}{8}$)	$\frac{5}{8}$
$\triangle CID$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{5}{4}$

(二)如圖 14，由端點 C、E 連線將 B 往右下摺得 B' 點，摺 $\angle B'EA$ 的角平分線 $\overline{EI}$，A 點與 B' 點重合，則 2 組直角三角形全等，且 C、B'、I 三點共線，又 $\angle CEI$ 為直角，加上直角三角形母子相似性質，可知直角$\triangle ECB'$、$\triangle ECB$、$\triangle IEB'$、$\triangle IEA$、$\triangle ICE$ 這 5 個三角形彼此相似或全等。

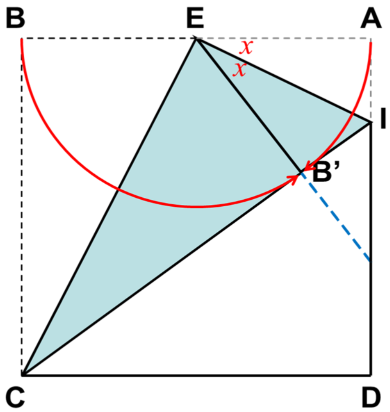


圖 14

其中$\triangle ECB' \cong \triangle ECB$，$\triangle IEB' \cong \triangle IEA$

且在直角$\triangle ICE$ 中，$\triangle ECB' \sim \triangle IEB' \sim \triangle ICE$，三角形邊長比皆是 $1:2:\sqrt{5}$

設正方形 $ABCD$ 邊長為 1，將相似三角形邊長計算其值，如下表:

對應三角形	1r	2r	$\sqrt{5}$ r
$\triangle ECB'$ ($\triangle ECB$)	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{5}}{2}$
$\triangle IEB'$ ($\triangle IEA$)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$
$\triangle ICE$	$\frac{\sqrt{5}}{4}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$\frac{5}{4}$

從芳賀第二定理的討論，發現邊長 3:4:5 及 $1:2:\sqrt{5}$ 的相似三角形，簡單的摺紙卻隱藏著的數學性質，真是有意思。

五、芳賀第二定理延伸學習與應用

芳賀先生用摺紙方法將正方形色紙邊長三等分，從「芳賀第二定理」的性質討論找到線段不同邊長比相同的相似直角三角形。再進一步思考，將第二定理中的摺紙步驟亦可用尺規作圖的方式辦到，以下延伸學習將說明國中生所使用的基本作圖方法。

摺紙步驟中：如下圖 15，取正方形紙 $ABCD$ 的一邊 $\overline{AB}$ 中點 E，可由哪一種基本作圖做到？沒錯，$\overline{AB}$ 的中垂線作圖即可找到 $\overline{AB}$ 中點 E，接著以三角形 SSS 全等作圖作$\triangle CEB' \cong \triangle CEB$，(三角形 SSS 全等作圖說明如下:分別以 C、E 兩點為圓心，$\overline{CB}$ 、$\overline{EB}$ 為半徑畫弧交於 B' 點，)連接 E、B' 兩點畫直線與 $\overline{AD}$ 交於 F 點，以 F 點為圓心，$\overline{DF}$ 為半徑畫弧，交 $\overline{AF}$ 於 G 點(或作 $\overline{AF}$ 的中垂線作圖即可找到 $\overline{AF}$ 中點 G)，則 F、G 點三等分 $\overline{AD}$ 。

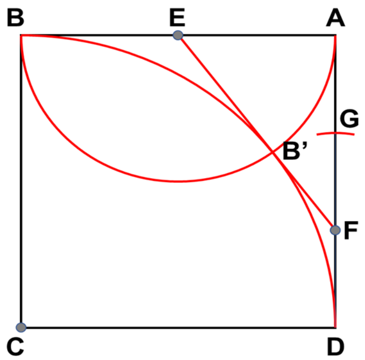


圖 15

依「芳賀第二定理」的摺紙方法進一步思考 B 點在其他等分點往右下方摺至 G 點，再將$\overrightarrow{FG}$延長與正方形邊長的交點 H 點位置如下圖 16 所示三種情形，

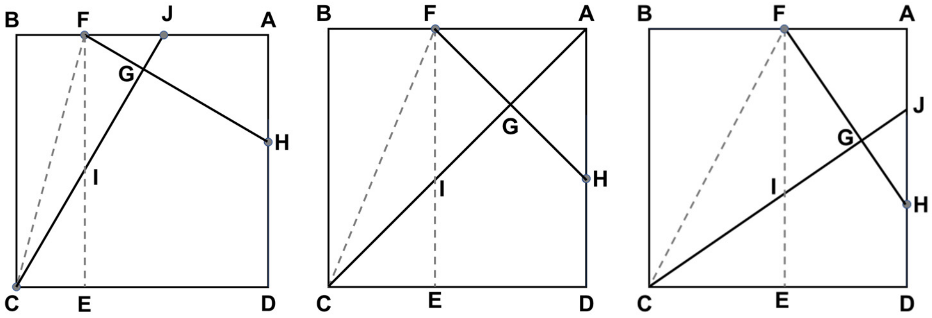


圖 16

其中以 G 點在對角線$\overline{AC}$的情形來看，因為$\triangle ABC$、$\triangle GAF$均為等腰直角三角形，令$\overline{AB}=\overline{CG}=1$，$\overline{BF}=\overline{FG}=\overline{AG}=x$，由 $\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=\overline{AC}^2$

$$1^2+1^2=(1+x)^2$$

$$x+1=\pm\sqrt{2}$$

$$x=-1\pm\sqrt{2}\quad (負不合)$$

由此可知，

(1) 若$\overline{BF}<\sqrt{2}-1$，$\overrightarrow{CG}$延長與正方形邊長的交點 J 點位在$\overline{FA}$上。

(2) 若$\overline{BF}=\sqrt{2}-1$，$\overrightarrow{CG}$延長與正方形邊長的交點位置在 A 點。

(3) 若$\overline{BF}>\sqrt{2}-1$，$\overrightarrow{CG}$延長與正方形邊長的交點 J 點位在$\overline{AD}$上。

由「芳賀第二定理」可知，當$\overline{BF}=\frac{1}{2}$ (符合 $\overline{BF}>\sqrt{2}-1$)，$\overline{DH}=\frac{1}{3}$，接著依上述第(3)情況探討其它等分點，

若$1>\overline{BF}>\sqrt{2}-1$，H 點位在$\overline{AD}$上，$\overline{DH}$會產生什麼變化。

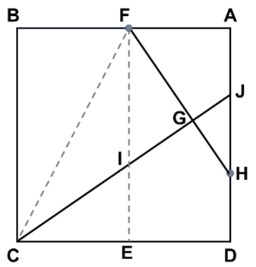


圖 17

由$\Delta CIE\cong\Delta FIG$，令$\overline{BF}=\overline{CE}=x$，$\overline{CI}=y$，$\overline{IG}=1-y=\overline{IE}$，

由畢氏定理可知，直角$\triangle CIE$ 三邊長關係式 $\overline{CI}^2=\overline{CE}^2+\overline{IE}^2$

得　$y^2 = x^2 + (1-y)^2$

$y = \frac{x^2+1}{2}$　，則　$1 - y = \frac{1-x^2}{2}$

又∵　$\Delta CIE \sim \Delta CJD$　，$\frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{x}{1} = \frac{\overline{IE}}{\overline{JD}} = \frac{1-y}{\overline{JD}}$　，

則　$\overline{JD} = \frac{1-x^2}{2x}$　，$\overline{AJ} = 1 - \frac{1-x^2}{2x} = \frac{x^2+2x-1}{2x}$

又∵　$\Delta CJD \sim \Delta HFA$　，$\frac{\overline{CD}}{\overline{HA}} = \frac{1}{\overline{HA}} = \frac{\overline{DJ}}{\overline{AF}} = \frac{\frac{1-x^2}{2x}}{1-x}$

則$\overline{HA} = \frac{2x}{1+x}$　，　$\overline{HD} = 1 - \frac{2x}{1+x} = \frac{1-x}{1+x}$　，$\overline{JH} = \overline{HA} + \overline{JD} - \overline{AD} = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2x(1+x)}$

將 F 點在$\overline{AB}$的位置，即$\overline{BF}$長代入上述代數式計算$\overline{HD}$，如下表所示:

$\overline{BF} = x$	$\overline{FA} = 1 - x$	$\overline{JD} = \frac{1-x^2}{2x}$	$\overline{AJ} = \frac{x^2+2x-1}{2x}$	$\overline{HA} = \frac{2x}{1+x}$	$\overline{HD} = \frac{1-x}{1+x}$	$\overline{JH} = \frac{(1-x)(1+x^2)}{2x(1+x)}$	$\overline{AD} = \overline{AJ} + \overline{JH} + \overline{HD}$
1/2	1/2	3/4	1/4	2/3	1/3	2/5	1
2/3	1/3	3/7	4/7	4/5	1/5	2/9	1
3/4	1/4	2/7	5/7	6/7	1/7	1/7	1
4/5	1/5	2/9	7/9	8/9	1/9	1/9	1
5/6	1/6	1/5	4/5	10/11	1/11	6/65	1
6/7	1/7	1/6	5/6	12/13	1/13	7/90	1

由上述 F 點在$\overline{AB}$的位置所得各線段值，由「芳賀第二定理」得到$\overline{HD}$等分線段，　再檢視△ICE 的三邊長比的「勾股數」，如下表所示　:

$\overline{BF}=\overline{CE}=x$	$\overline{IE}=\frac{1-x^2}{2}$	$\overline{CI}=\frac{x^2+1}{2}$	$\overline{IE}$: $\overline{CE}$: $\overline{CI}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	3 : 4 : 5
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$	5 : 12 : 13
$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{32}$	$\frac{25}{32}$	7 : 24 : 25
$\frac{4}{5}$	$\frac{9}{50}$	$\frac{41}{50}$	9 : 40 : 41
$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{72}$	$\frac{61}{72}$	11 : 60 : 61
$\frac{6}{7}$	$\frac{13}{98}$	$\frac{85}{98}$	13 : 84 : 85

發現如此規律的結果，不禁讓人讚嘆。

六、芳賀第三定理說明與性質討論

延續前兩個定理，芳賀和夫接下來繼續思考其他在摺紙色紙上三等分的應用。這一次他應用了更複雜的數學原理與摺紙技法進行操作：

如下圖 18，在正方形色紙上方取中點 P’，接著將左方邊上的 C 點摺至右側邊上 C’點，且此時 P’點恰與$\overline{BC}$上一點 P 重合。

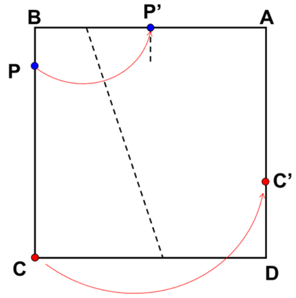


圖 18

則右側的 C’點即為邊長$\overline{AD}$的三等分點，我們將於底下繼續說明其三等分的原因。

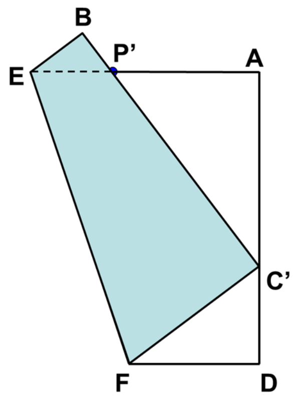


圖 19

要說明三等分的原因，我們不妨把翻摺後的圖形編號如上圖 19，連接 P’、E 後，可根據 AA 相似說明△P’BE~△P’AC’~△C’DF。由於相似三角形的對應邊長比=周長比，亦等於部份對應邊長和的比，若我們假設此正方形的邊長為 1，$\overline{P'B} = a$，$\overline{BE} = x$，故$\overline{P'A} = \frac{1}{2}$，且$\overline{P'E} = \frac{1}{2} - x$、$\overline{P'C'} = 1 - a$（∵P’為色紙邊長中點，且$\overline{P'E}$+$\overline{BE} = \frac{1}{2}$）。

接下來我們先看△C’DF，由於$\overline{C'F} + \overline{FD} = 1$（色紙邊長），恰為其相似三角形△P’BE 的對應邊長$\overline{P'E} + \overline{BE} = \frac{1}{2}$ 的兩倍，根據△P’BE~△C’DF，得知△C’DF 各邊長恰為△P’BE 對應邊的兩倍。故$\overline{C'D} = 2a$且$\overline{FD} = 2x$，可推得$\overline{AC'} = 1 - 2a$。

在直角△P’AC’中，根據已推出的三邊長與勾股定理，我們可以得知以下關係：

$$(1-a)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-2a)^2$$

展開後整理可得$12a^2-8a+1=0$➔$(2a-1)(6a-1)=0$

得知 $a=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{1}{6}$。

若 $a=\frac{1}{2}$ 則$\overline{C'D}=1$與題意明顯不符，故 $a=\frac{1}{6}$，即$\overline{C'D}=\frac{1}{3}$為邊長$\overline{AD}$的三等分。

繼續前兩個定理的討論，我們這個定理似乎也有可以進一步探索的內容。根據圖 18 至圖 19 的摺製步驟，我們將色紙左側的點 P、C 分別摺至正上方的中點 P’與右側的 C’點，可以得到 C’為色紙邊長的三等分點。若我們摺至正上方的 P’點並非中點，則會得到邊長的幾等分點呢？又會產生什麼樣的直角三角形呢？

為了確認這個結論，我們先試著仿照上述方式，將 P’點分別摺至以下幾個較容易完成的等分點：從上側邊長的 1/4、1/3、3/4 與 2/3，並且製表如下：

P’點位置	△P’AC’三邊長關係式	△P’BD、△P’AC’、△C’DE 邊長比	$\overline{C'D}$邊長等分點
1/4	$(1-a)^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2+(1-4a)^2$	8：15：17	$\frac{3}{5}$
1/3	$(1-a)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+(1-3a)^2$	3：4：5	$\frac{1}{2}$
2/3	$(1-a)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(1-\frac{3a}{2}\right)^2$	5：12：13	$\frac{1}{5}$
3/4	$(1-a)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(1-\frac{4a}{3}\right)^2$	7：24：25	$\frac{1}{7}$

跟我們的預測一樣！摺至色紙上方每個有理等分點後，都可以得到一組畢氏三角形，且右側也可以得到另一個有理等分點，其中摺至上方 1/3 得到右側 1/2 的結果，恰與芳賀第三定理的摺製方式互為對偶。

七、芳賀第三定理延伸學習與應用

根據前面的討論，接下來我們想要繼續探索其一般式了，在此我們不妨假設 P’ 點在色紙上方的 p 等分位置（其中 $0<p<1$，並預設 p 為有理數）。根據我們之前的討論，根據直角△P’AC’的三邊長，可以列出底下算式：

$$(1-a)^2=(1-p)^2+\left(1-\frac{a}{p}\right)^2$$

這是一個 a 的一元二次方程式，展開後化簡可得：

$$(a-p)[(1+p)a-(p-p^2)]=0$$

得知 a = p 或 a=$\frac{p-p^2}{1+p}$

明顯得知 a≠p（否則$\overline{AC'}$將=0），故 a= $\frac{p-p^2}{1+p}$為其唯一解。

接下來我們將 a 的值代入△P’AC’三邊長：

可以得到 $\overline{AP'}$:$\overline{AC'}$: $\overline{P'C'}$=$(1-p^2):(2p):(1+p^2)$

恰為第一定理中畢氏數一般式的另一形式**【註 2】**，且此時右下方$\overline{C'D}$長度為色紙長度的$\frac{1-p}{1+p}$。

接下來，我們可再藉由不同的 p 值，列出不一樣的畢氏三角形，並計算$\overline{C'D}$在色紙上的所在位置（與色紙邊長比值）如下表：

p 值	所形成直角三角形	$\overline{C'D}$位置	備註
p	$(1-p^2):(2p):(1+p^2)$	$\frac{1-p}{1+p}$	與$\frac{1-p}{1+p}$互為對偶
1/2	3：4：5	$\frac{1}{3}$	與 1/3 互為對偶
1/4	15：8：17	$\frac{3}{5}$	與 3/5 互為對偶
1/3	4：3：5	$\frac{1}{2}$	與 1/2 互為對偶
2/3	5：12：13	$\frac{1}{5}$	與 1/5 互為對偶
3/4	7：24：25	$\frac{1}{7}$	與 1/7 互為對偶
1/5	12：5：13	$\frac{2}{3}$	與 2/3 互為對偶
2/5	21：20：29	$\frac{3}{7}$	與 3/7 互為對偶
3/5	8：15：17	$\frac{1}{4}$	與 1/4 互為對偶
4/5	9：40：41	$\frac{1}{9}$	與 1/9 互為對偶

上表中已囊括中學中常見的畢氏三元數，這裏值得再一提的是$\overline{C'D}$的所在位置恰與 p 值互為對偶，也就是若我們將原來 p 值與$\overline{C'D}$互換，其結果仍是成立的，是不是很有趣呢？

而接下來我們還想探索的是既然前兩個定理都有其對應的尺規作圖，不曉得這個第三定理所對應的尺規作圖又是什麼呢？

為了思考這個問題，我們再次看到圖 18 如下，發現在 P 摺至 P’點與 C 摺至 C’點的同時，我們的圓心跟半徑都是不確定的，這又象徵著什麼意義呢？

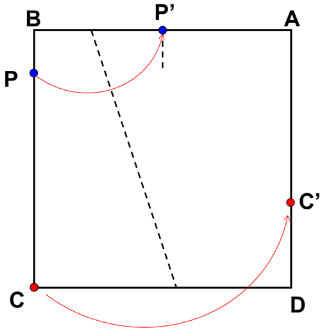


圖 20

沒錯！這個摺法並沒有對應的尺規作圖，其原因是根據法國數學家 Jacques Justin 與日裔義大利數學家藤田文章分別於 1989 及 1991 提出的摺紙公理 6，若給定兩已知點 P_1 與 P_2 與兩直線 L_1 和 L_2（如圖 18 的 P’、C 兩點、$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{AD}$兩直線），可以一次將 P_1 與 P_2 分別摺至 L_1 和 L_2 上，這在摺紙上是可行的，就如同在此活動中，P’與 C 點分別會摺至色紙的左、右兩邊直線$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{AD}$上。然而因此作法在操作中需要將紙作「滑動」的動作，將對應到二刻尺作圖解三次方程的概念，與尺規作圖相當於解二次方程的概念有所不同，所以這個摺法並沒有其對應的尺規作圖。**【註 3】**

八、結語

本文介紹了芳賀和夫教授所發現的三個定理與色紙邊長三等分摺紙的數學性質，延伸應用在這三個定理在色紙上不同位置，也能製作出畢氏三角形與其他等分點的探討，進一步討論這三個摺法與尺規作圖的關聯性，在中學階段，除了可與畢氏定理、相似形與尺規作圖等單元作結合，還能進一步討論這三個摺法的一般式，並研究尺規作圖到摺紙公理的內容。希望這樣的結合，可以讓讀者體會到只需要小小的一個摺紙動作，就能蘊藏許多數學原理在裏面的感受。

本文的完成要特別感謝「藝數摺學寫作社團」中仁德文賢國中的王儷娟老師、師大附中彭良禎老師、香山高中曾椿惠老師與台中二中的吳惠美老師給予意見，以及中平國中葉振福老師整理提供相關資料，文末【註 4】並附上芳賀定理相關的參考資料。希望以此篇芳賀和夫教授所發現的三個定理與三等分摺紙的數學性質多面向延伸探討，提供數學教師在國中階段作為幾何補充教材教學參考，引領學生從簡單摺紙應用所學一探幾何數學的奧妙。

備註:

【註1】李政憲（2015），從摺紙學數學－從有理數到畢氏數，科學研習54卷第4期，12-19。

【註2】李政憲、陳昭地(2013)。主題1-4 畢氏三元數組，陳昭地主編：國民中學數學教材原型C冊(pp.87-106)。新北市：國家教育研究院。

【註3】關於各摺紙公理所對應到的尺規作圖，因與本文的主題較無相關，請讀者不妨上網搜尋相關資料參考理解，或是待日後有機會再完整寫一篇文章以饗讀者。

【註4】芳賀定理參考資料：

Josefina C. Fonacier, Masami Isoda（磯田正美）譯（2008）。Mathematical Explorations through Paper folding。（原作者：芳賀和夫）World Scientific Publishing Company, Pte. Ltd., Singapore,Origamics。

數學百子櫃系列（十七） 摺紙與數學 作者 阮華剛 譚志良（網路資料）：https://www.edb.gov.hk/attachment/tc/curriculum-development/kla/ma/res/Cabinet%2017.pdf（檢索日期：2021,10,23）

張萍譯（2016）。摺紙玩數學：日本摺紙大師的幾何學教育。（原作者：芳賀和夫）世茂出版社。（原著出版年：2014）