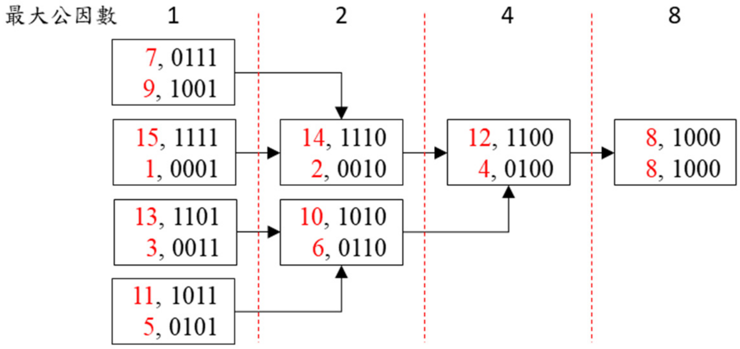
動態穩定新篇章：一堆 vs. 黑洞(上)

宋侑穎　陳星穎　蘇柏奇*　游淑媛
苗栗縣立興華高級中學

陳奕均[1]探討將兩堆石頭移成數量相等的充要條件及移動次數，其移動規則為：「若 $x > y$，則 $(x, y) \to (x-y, 2y)$」。林建銘等人[2]將之推廣到更多堆的情形，規定從中任取兩堆移動，即：「若 $x > y > z$，則 $(x, y, z) \to (x-y, 2y, z) or (x-z, y, 2z) or (x, y-z, 2z)$」。上述兩項研究皆規定數量相等的兩堆無法移動，許雅晴等人[3]則規定數量相等仍可互移，即：「若 $x \geq y$，則 $(x, y) \to (x-y, 2y)$。特例: $(x, x) \to (0, 2x)$」，因而產生堆數減少的結果。本研究改變移動規則，將移動數量改為兩堆的最大公因數且數量相等仍可移動，發現除了僅剩一堆的狀態外，還有進入後便無法脫離的黑洞狀態。另外，n 堆黑洞狀態相當於「給定 n 個數滿足任兩數之差等於兩數的最大公因數」，本文所得方法能推廣到求更多堆的狀況，並給出此問題的解法。



不難看出，當 $x+y = 2^k$ 且 $\gcd(x, y) = 2^m$ 時，形成穩定狀態的過程即為最大公因數由 2^m 變成 2^{k-1} 的過程，因每次移動最大公因數變成移動前的兩倍，故需經 $k-1-m$ 次形成穩定狀態。陳奕均所得結果如下：

> 文獻結論 1（陳奕均, 2015）
>
> 若 x+y=p×2k (p 為奇數)，且 x,　y 的最大公因數為 r×2m (r 為奇數)，則：
>
> 1. p＝r 時，(x, y) 形成穩定狀態的次數為 k－1－m 次。
> 2. p ≠ r 時，(x, y)無法形成穩定狀態。

$$\begin{matrix}13\\7\\4\end{matrix}\begin{cases}1101\\0111\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}6\\14\\4\end{matrix}\begin{cases}0110\\1110\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}12\\8\\4\end{matrix}\begin{cases}1100\\1000\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,3堆}}\begin{matrix}8\\8\\8\end{matrix}\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

$$\begin{matrix}14\\6\\4\end{matrix}\begin{cases}1110\\0110\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}8\\12\\4\end{matrix}\begin{cases}1000\\1100\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}\begin{matrix}8\\8\\8\end{matrix}\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

上兩例中，每次移動後最大公因數變成移動前的 2 倍。由最大公因數的變化似乎可以得到最少移動次數，但若應移動的兩堆數量相等而無法互移，便會產生例外的狀況，例如(10,10,4)移動後最大公因數不變，須經 3 次移動才成為穩定狀態：

$$\begin{matrix}10\\10\\4\end{matrix}\begin{cases}1010\\1010\\0100\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}\begin{matrix}10\\6\\8\end{matrix}\begin{cases}1010\\0110\\1000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}4\\12\\8\end{matrix}\begin{cases}0100\\1100\\1000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}8\\8\\8\end{matrix}\begin{cases}1000\\1000\\1000\end{cases}$$

林建銘等人因上述例外而未能得到形成穩定狀態的移動次數，對此，許雅晴等人[3]進而規定兩堆數量相等時，仍可互移，移動後其中一堆數量變為 0，產生堆數減少的結果，進而移動成僅有一堆的狀態（稱為「一堆狀態」)，如：

$$(4,2,2)\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}(4,4,0)\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}(8,0,0)\text{。}$$

他們解決林建銘等人的例外狀況，進而得三堆形成一堆狀態的條件與最少移動次數，如文獻結論 3-1。

文獻結論 3-1（許雅晴等人, 2017）

當 $x_1+x_2+x_3=p\times 2^k$, $\gcd(x_1,x_2,x_3)=r\times 2^m$, p 及 r 為奇數，

若 $p=r$ ，則 (x_1,x_2,x_3) 能形成一堆狀態且最少移動次數為 $k-m$.

此外，許雅晴等人[3]提供一種方法，可使任意 (x_1, x_2, x_3) 逐步減少「兩堆之差」直至 0，即堆數變成兩堆：$(x_1, x_2, x_3) \to ... \to (x, x, y) \to (0, 2x, y)$。不失一般性，令 $x_1 < x_2 < x_3$，他們將由第二堆移動到第一堆的方式記為 f，即 $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{f} (2x_1, x_2 - x_1, x_3)$；由第三堆移動到第一堆的方式記為 g，即 $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{g} (2x_1, x_2, x_3 - x_1)$。先將 x_2 除以 x_1 算得商與餘數分別為 a、b，即 $x_2 = ax_1 + b$，$0 \le b < x_1$，再令 $a = 2^r + 2^{r_1} + 2^{r_2} + ... + 2^{r_i}$，$r > r_1 > r_2 > ... > r_i \ge 0$，則得：「經過 r 次移動，可得第一、二堆的差為 b，並且其中的第 $r_1 + 1$、$r_2 + 1$、...、$r_i + 1$ 次移動方式為 f，其餘的移動方式為 g」。

顯然，當 b=0 時，經 $r+1$ 次移動即形成一堆狀態。例如(9,108,136)，由 $108 = 12 \times 9 + 0$ 且 $12 = 2^3 + 2^2$，即得 $(r, r_1) = (3,2)$，即先經過 3 次移動得到前兩堆之差為 0 的狀態，且第 $r_1 + 1 = 3$ 次的移動為 f，其移動過程為：

$(9,108,136) \xrightarrow{g} (18,108,127) \xrightarrow{g} (36,108,109) \xrightarrow{f} (72,72,109)$，

再經 1 次移動 $(72,72,109) \xrightarrow{f} (144,0,109)$ 形成兩堆狀態。

而當 $b \ne 0$ 時，反覆多次，即可逐步減少「兩堆之差」直至 0。例如：(5,66,136)，由 $66 = 13 \times 5 + 1$ 且 $13 = 2^3 + 2^2 + 2^0$，即得 $(r, r_1, r_2) = (3,2,0)$，即經過三次移動得到前兩堆之差為餘數 1 且第 $r_1 + 1 = 3$、$r_2 + 1 = 1$ 次的移動為 f，其移動過程為：

$(5,66,136) \xrightarrow{f} (10,61,136) \xrightarrow{g} (20,61,126) \xrightarrow{f} (40,41,136)$。

此時，前兩堆之差減少為 1，再經一次移動，$(40,41,136) \xrightarrow{f} (80,1,136)$，調整為 $(1,80,136)$。再由 $80 = 80 \times 1 + 0$ 且 $80 = 2^6 + 2^4$，即得 $(r, r_1) = (6,4)$，即經過六次移動得到前兩堆之差為餘數 0 且第 $r_1 + 1 = 5$ 次的移動為 f，其移動過程為：

$(1,80,136) \xrightarrow{g} (2,80,135) \xrightarrow{g} (4,80,133) \xrightarrow{g} (8,80,129) \xrightarrow{g}$

$(16,80,121) \xrightarrow{f} (32,64,121) \xrightarrow{g} (64,64,89)$，

再經 1 次移動，$(64,64,89) \xrightarrow{f} (128,0,89)$形成兩堆狀態。

更多堆時，從中任選三堆，必能使其中一堆為 0，反覆多次，則能形成兩堆狀態。是否能進一步形成一堆狀態？取決於 p 與 r 是否相等（不難得到文獻結論 3-1 所得三堆形成

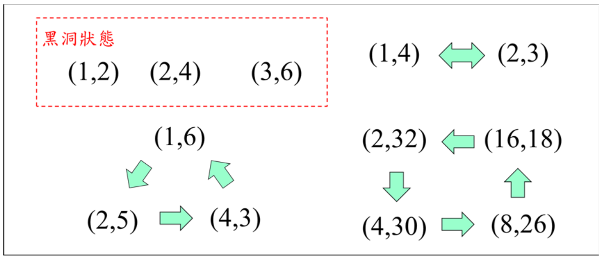
一堆狀態的條件與次數也適用於兩堆的情形），如文獻結論 3-2。

文獻結論 3-2（許雅晴等人, 2017）

若 $\sum_{i=1}^{n} x_i = p \times 2^k$，$\gcd(x_1, x_2, ..., x_n) = r \times 2^m$，則

1. 若 $p = r$，則 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 能形成一堆狀態。
2. 若 $p \neq r$，則 $(x_1, x_2, ..., x_n)$ 能形成兩堆狀態。

陳奕均[1]、林建銘等人[2]及許雅晴等人[3]皆僅關注形成穩定狀態或一堆狀態的條件與次數，我們發現未進入穩定、一堆狀態時，會進入循環，例如：(1,33) → (2,32) → (4,30) → (8,26) → (16,18)，數量差越來越小，接著數量大小互換(16,18)→(32,2)，因此前已出現過 $(32,2)$，故進入循環。有時大小互換多次才進入循環，如：(1,12) → (2,11) → (4,9) → (8,5) → (3,10) → (6,7) → (12,1)；或全部數對都在循環中：(1,18) → (2,17) → (4,15) → (8,11) → (16,3) → (13,6) → (7,12) → (14,5) → (9,10) → (18,1)。圖示部分循環如下，其中，(1,2)、(2,4)、(3,6)為單個的循環，我們將之稱為「黑洞狀態」。



本文改變上述三項研究移動的規則，將移動數量由「較少一堆的個數」改為「兩堆的最大公因數」，發現：「所有的數對進入一堆狀態或黑洞狀態」。為何我們的移動法不會進入多個數對的循環呢？若 $\gcd(x, y) = d$ 且 $x > y$，設 $x = dm$，$y = dn$，$\gcd(m, n) = 1$，不難得知 (x, y) 的移動相當於 (m, n) 的移動。討論 (m, n) 的移動如下：

(1) 當 $m - n > 2$ 時，$(m, n) \to (m-1, n+1)$，兩堆數量差減少 2；

(2) 當 $m - n = 2$ 時，$(n+2, n) \to (n+1, n+1) \to (0, 2n+2)$ 進入一堆狀態；

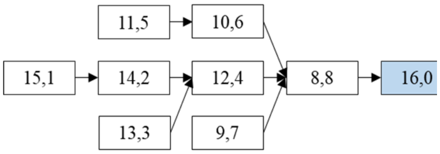
(3) 當 $m-n=1$時，$(n+1,n)\to(n,n+1)$大小互換，進入黑洞狀態。

綜上所述，我們的移動方法大小互換時即進入黑洞狀態，不會有多個循環的現象。

若 $s=x+y=p\times 2^{k}$, p 為奇數，初步分三類討論：

1. 當 $p=1$且 $k>0$時：所有的數對都進入一堆狀態，如 $s=16$，詳如第二節之探討。

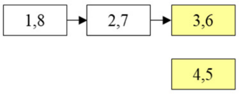
S=16



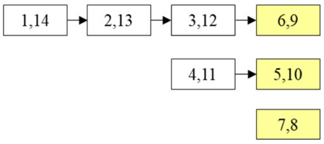
2. 當 $p>1$且 $k=0$時：

當和為奇數時，不可能形成穩定狀態（穩定狀態的兩堆和必為偶數），也就無法形成一堆狀態；另一方面，我們的移動法不會進入多個數對的循環，故得所有的數對都進入黑洞狀態，如 $s=9,15,21$，詳如第三節之探討。

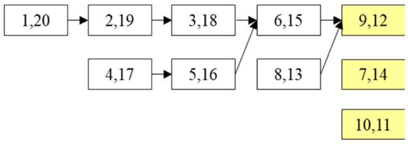
S=9=3×3



S=15=3×5



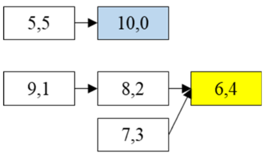
S=21=3×7



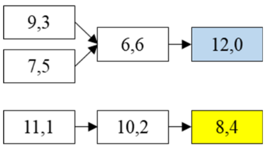
3. 當 $p\neq 1$且 $k>0$時：

所有數對進入一堆狀態或黑洞狀態，如 $s=10,12,14$。

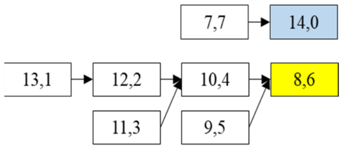
s=10



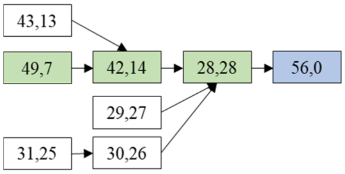
s=12

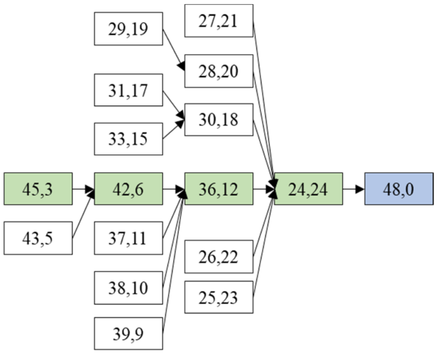


s=14



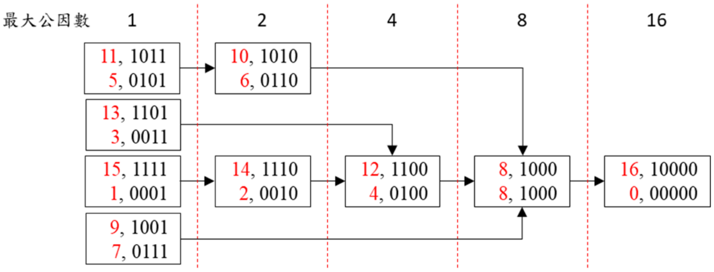
顯然，須先形成穩定狀態才能形成一堆狀態，而在形成穩定狀態的過程中，有些主要的狀態：$(s-p\times 2^i, p\times 2^i)$，$i=0\sim k-1$，若能移動到這些主要狀態，則能形成一堆狀態，反之，若未能進入這些主要狀態，則進入黑洞狀態。例如：和為 $56=7\times 2^3$ 時，有三個主要狀態(49,7)、(42,14)、(28,28)；和為 $48=3\times 2^4$ 時，有四個主要狀態(45,3)、(42,6)、(36,12)、(24,24)。

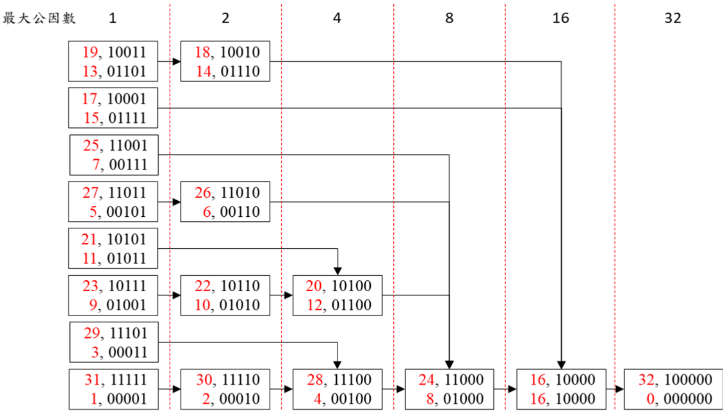




貳、一堆狀態

本節探討一堆狀態，發現：若 $x+y=2^k$，所有數對都進入一堆狀態，如 $x+y=16,32$ 的移動過程如下。





之前的移動方法，移動後的最大公因數必為移動前最大公因數的兩倍，進而依此得到移動次數；而我們的移動方法，則可能不止兩倍，例如：(18,14)→(16,16)、(17,15)→(16,16)、(25,7)→(24,8)…等。我們發現：由較大數的二進位表法可得形成一堆狀態的移動次數！若 $x+y=2^k$，$x>y$，$\gcd(x,y)=2^m$ 且令 $x=\sum_{i=0}^{k} a_i \times 2^i$ 、 $y=\sum_{i=0}^{k} b_i \times 2^i$ ，則有：

$$\begin{cases} a_i+b_i=0, & i=0\sim m-1 \\ a_i+b_i=2, & i=m \\ a_i+b_i=1, & i=m+1\sim k-2 \\ a_{k-1}=1 & \\ b_{k-1}=0 & \end{cases}$$

	2^k	2^{k-1}	…	2^m	2^{m-1}	…	2^0
x	0	1	0 或 1	1	0	…	0
y	0	0	0 或 1	1	0	…	0
$x+y$	1	0	…	0	0		0
a_i+b_i		1		2	0		

移動時，$x \to x-2^m$，移動後，x 之二進位表示法僅有 a_m 由 1 變為 0，其它的 $a_i, i \neq m$ 皆不變，且每次移動皆是如此，故較大數的二進位表法中有幾個 1，就需移動幾次而形成一堆狀態，歸納以下結果：

> 結論 1：形成一堆狀態的移動次數
>
> 若 $x+y=2^k$，$x>y$ 且 $x=\sum_{i=0}^{k} a_i \times 2^i$ ，
>
> 則形成一堆狀態的移動次數為 $\sum_{i=0}^{k} a_i$.

另外，較小數之二進位表示法影響移動後最大公因數的變化！若 $b_i=\begin{cases} 0, i=0\sim m-1 \\ 1, i=m\sim m+n-1 \\ 0, i=m+n \end{cases}$，移動後的最大公因數為 2^{m+n} 。如下：

		…	2^{m+n}	2^{m+n-1}	…	2^{m+1}	2^m	2^{m-1}	…	2^0
移動前	x	0 或 1	1	0		0	1	0	…	0
	y	0 或 1	0	1	…	1	1	0	…	0
移動後	$x-2^m$	0 或 1	1	0	…	0	0	0	…	0
	$y+2^m$	0 或 1	1	0	…	0	0	0	0	0

歸納如下：

結論 2：最大公因數的變化

當 $x+y=2^k$， $x>y$， $\gcd(x,y)=2^m$ 且 $y=\sum_{i=0}^{k} b_i \times 2^i$ ，

若 $b_i=\begin{cases}0, i=0\sim m-1\\ 1, i=m\sim m+n-1\\ 0, i=m+n\end{cases}$，則移動後 $\gcd(x,y)=2^{m+n}$ 。

接著討論三堆的情形，三堆中任取兩堆移動的方式有三種，例如：

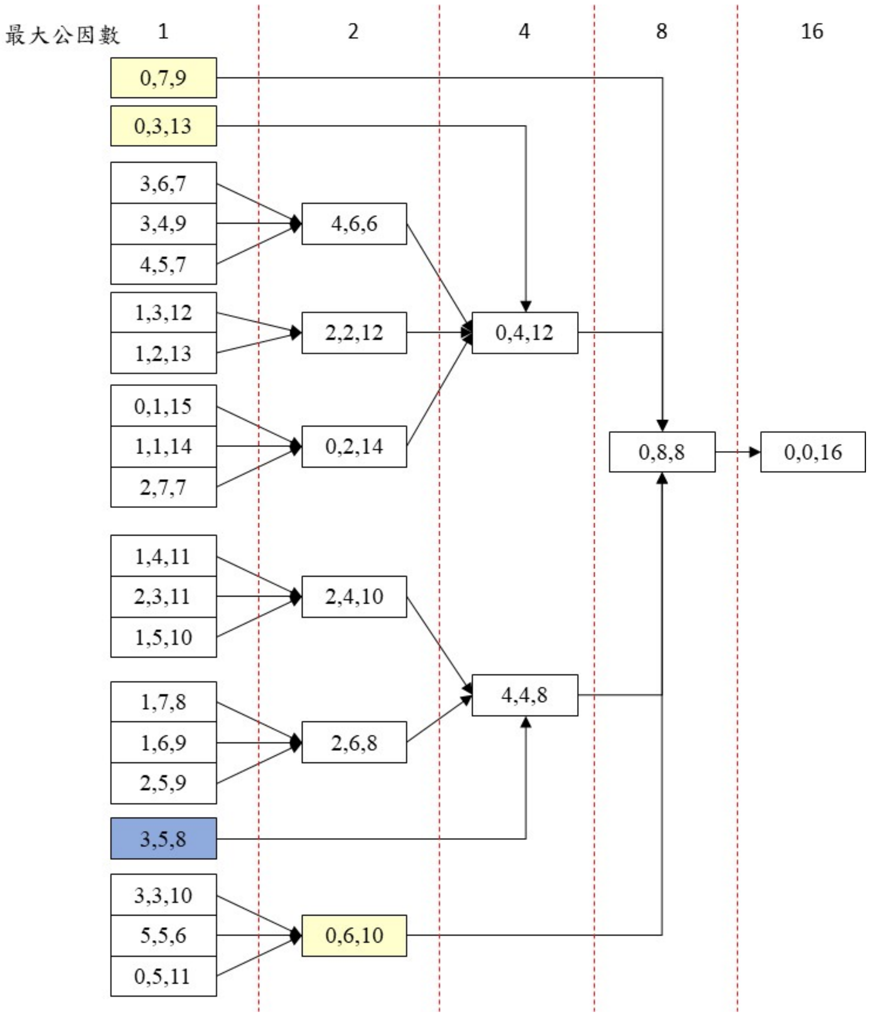
$$(12,3,2)\begin{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}(9,6,2)\\ \xrightarrow{\text{移動第1,3堆}}(10,3,4)\\ \xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}(12,2,3)\end{cases}$$

。該如何移動？因形成穩定狀態後才能形成一堆狀態，且不論是陳奕均等人([1]、[2]、[3])或我們的移動法，在「逐步使二進位表法最低位值上的 1 變成 0」上有異曲同工之妙，因此，林建銘等人[2]所提供的移動方式（如文獻結論 2）也適用於本研究，且依此法移動，形成一堆狀態所需的移動次數最少，例如：

$$\begin{matrix}3\\6\\7\end{matrix}\begin{cases}0011\\0110\\0111\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,3堆}}\begin{matrix}4\\6\\6\end{matrix}\begin{cases}0100\\0110\\0110\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}\begin{matrix}4\\12\\0\end{matrix}\begin{cases}0100\\1100\\0000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}8\\8\\0\end{matrix}\begin{cases}1000\\1000\\0000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}16\\0\\0\end{matrix}\begin{cases}10000\\00000\\00000\end{cases}$$

$$\begin{matrix}2\\3\\11\end{matrix}\begin{cases}0010\\0011\\1011\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}\begin{matrix}2\\4\\10\end{matrix}\begin{cases}0010\\0100\\1010\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,3堆}}\begin{matrix}4\\4\\8\end{matrix}\begin{cases}0100\\0100\\1000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第1,2堆}}\begin{matrix}0\\8\\8\end{matrix}\begin{cases}0000\\1000\\1000\end{cases}\xrightarrow{\text{移動第2,3堆}}\begin{matrix}0\\16\\0\end{matrix}\begin{cases}00000\\10000\\00000\end{cases}$$

當 $x+y+z=2^k$ 時，所有數對會進入一堆狀態，以 $x+y+z=16$ 為例，所有數對形成一堆狀態的過程如下：



通常移動後的最大公因數會變成移動前的 2 倍，但若移動的兩堆之較小數的二進位表法符合結論 2，則最大公因數可能變成不止 2 倍。例如：(3,5,8)僅經一次移動變成(4,4,8)，最大公因數由 1 變成 4（如藍色標示），列出此移動前後的二進位表法如下：

$$\begin{array}{c} 3 \\ 5 \\ 8 \end{array}\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \rightarrow \begin{array}{c} 4 \\ 4 \\ 8 \end{array}\left\{\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

許雅晴[3]等人所得三堆形成一堆狀態的過程中，每次移動後的最大公因數皆變成原來的兩倍，所以當三數的和為 2^k，最大公因數為 2^m 時，經過 $k-m$ 次移動會形成一堆狀態；而本研究之移動，在符合結論 2 的情況下，最大公因數可能由 2^m 變為 2^{m+n}，故可能不需 $k-m$ 次移動便能形成一堆狀態，得到以下結果：

結論 3：三堆形成一堆狀態的次數

當三數的和為 2^k，最大公因數為 2^m，則形成一堆狀態的次數上限為 $k-m$.

更多堆時，若和為 2^k，根據林建銘等人所提供的移動規則，可經過若干次移動而使最大公因數變為 2^k，即形成一堆狀態。例如：四堆 $x_1+x_2+x_3+x_4=2^k$ 且 $\gcd(x_1,x_2,x_3,x_4)=2^m$ 時，可分成兩類如下，分別經過 1、2 次移動（第一類移動 x_1,x_2；第二類從中任取兩堆移動，則變成第一類），可使最大公因數變為 2^n，$n>m$。

	$2^{m+n}\ldots2^{m+1}$	2^m	$2^{m-1}\ldots2^0$
x_1	0 或 1	1	0
x_2	0 或 1	1	0
x_3	0 或 1	0	0
x_4	0 或 1	0	0

	$2^{m+n}\ldots2^{m+1}$	2^m	$2^{m-1}\ldots2^0$
x_1	0 或 1	1	0
x_2	0 或 1	1	0
x_3	0 或 1	1	0
x_4	0 或 1	1	0

得到以下結果：

結論 4：多堆形成一堆狀態的條件

當 $\sum_{i=0}^{n} x_i = 2^k$，則 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 皆能形成一堆狀態。

【待續】