動態穩定新篇章：一堆 vs. 黑洞(下)

宋侑穎 陳星穎 蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

參、黑洞狀態

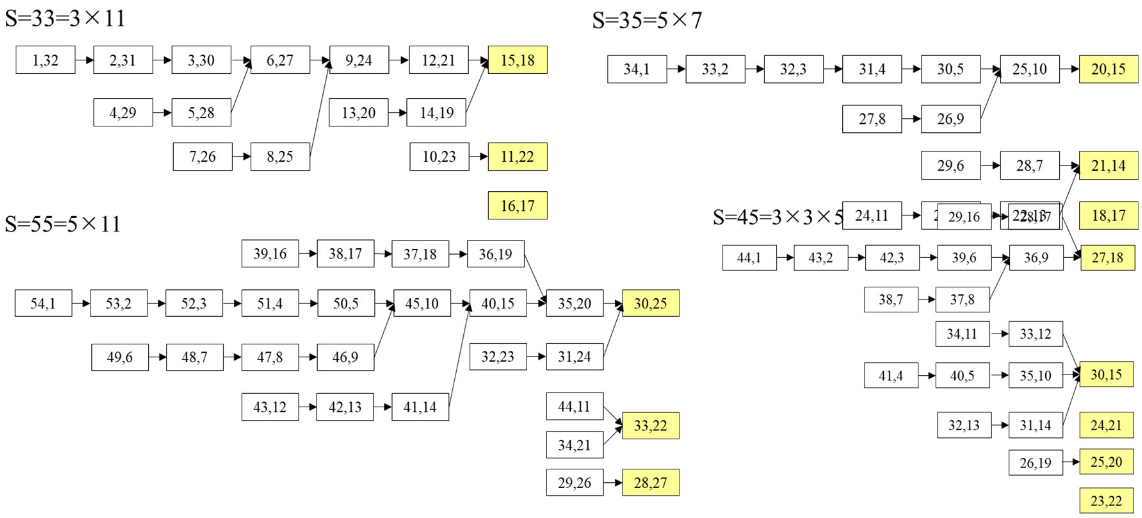
接著討論黑洞狀態，先看 $x+y=p$, p 為奇質數的情形，因 p 為奇質數，得 x 和 y 互質，故每次移動都是從較多一堆拿 1 顆到較少一堆，直至進入黑洞狀態：

$$(p-1,1)\to(p-2,2)\to(p-3,3)\to\ldots\to(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2})$$

例如： $x+y=11$ 時，(10,1)→(9,2)→(8,3)→(7,4)→(6,5)。我們得到：

> 結論 5：和為奇質數的黑洞狀態
>
> 當 $x+y=p$, p 為奇質數，所有數對皆進入黑洞狀態 $(\frac{p+1}{2},\frac{p-1}{2})$ 。

接著討論 $s=x+y=p$, p 為奇數的情形，先畫出部分狀況如下： 觀察發現黑洞狀態的充要條件，假設 $\gcd(x,y)=d$ 且 $x>y$ ，則 $(x,y)\to(x-d,y+d)$，若 (x,y) 為黑洞狀



態，得 $\begin{cases} x-d=y \\ y+d=x \end{cases}$，即 $x-y=d$。亦即兩數的最大公因數恰為兩數的差。歸納如下：

> 結論 6：兩堆黑洞狀態的判別
>
> (x,y) 為黑洞狀態的充要條件是 $\gcd(x,y)=x-y$。

設 $\gcd(x,y)=d$ 且 $x>y$，若 (x,y) 為黑洞狀態，由結論 6，得 $x=y+d$，不妨設 $y=dn$，則得 $s=x+y=2dn+d=d(2n+1)$，再設 $f=2n+1$，即 $s=df$，故 f 為非 1 的奇數且為 s 的因數，再將 $n=\frac{f-1}{2}$ 代入黑洞狀態 $(x,y)=(dn+d,dn)=(\frac{df+d}{2},\frac{df-d}{2})=(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2})$，又由 $d=\frac{s}{f}$ 且 $f\neq 1$ 得：「$d\neq s$ 且為 s 的因數」。據此過程，即可算得黑洞狀態，例如：當 $s=55$ 時，先得 $d=1,5,11$，再代入 $(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2})$ 得黑洞狀態：$(\frac{55+1}{2},\frac{55-1}{2})=(28,27)$、$(\frac{55+5}{2},\frac{55-5}{2})=(30,25)$、$(\frac{55+11}{2},\frac{55-11}{2})=(33,22)$。再如 $s=45$ 時，先得 $d=1,3,5,9,15$，再分別得黑洞狀態：(23,22)、(24,21)、(25,20)、(27,18)、(30,25)。

承上討論，當和為偶數時，令 $s=x+y=2^k\times p$（p 為奇數且 $k>0$），得 $d=\frac{s}{f}=2^k\times\frac{p}{f}$，設 $f'=\frac{p}{f}$，代入得 $(\frac{s+d}{2},\frac{s-d}{2})=(\frac{s+2^k\times f'}{2},\frac{s-2^k\times f'}{2})$，又因 f 為非 1 的奇數且為 p 的因數，得 $f'\neq p$ 且為 p 的因數。如 $s=10=2\times 5$ 時，先得 $f'=1$ 再得 $(\frac{10+2\times 1}{2},\frac{10-2\times 1}{2})$ =(6,4)；再如 $s=12=2^2\times 3$ 時，先得 $f'=1$ 再得黑洞狀態(8,4)，歸納如下：

> 結論 7：兩堆黑洞狀態
>
> 若 $s=2^k\times\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$（$p_1<p_2<\ldots<p_r$ 為奇質數），

> s 有 $N=\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i+1)$ 個奇因數，記為 f_i, $i=1,2,\ldots,N$, 其中 $f_i<f_{i+1}$。則：
>
> s 有 $N-1$ 個黑洞狀態，分別為 $(\frac{s+2^k\times f_i}{2},\frac{s-2^k\times f_i}{2})$, $i=1,2,\ldots,N-1$。

由結論 7，列出 s 的 $N-1$ 個奇因數，即可算得黑洞狀態，另外，若 (x,y) 為 $s=p$ 的黑洞狀態，則 $(2^k x,2^k y)$ 為 $s=2^k\times p$ 的黑洞狀態，反之亦然，例如 $s=45,90$ 的黑洞狀態如下：

	S=45	S=90
$f_1=1$	$(\frac{45+1}{2},\frac{45-1}{2})=(23,22)$	$(\frac{90+2\times1}{2},\frac{90-2\times1}{2})=(46,44)$
$f_2=3$	$(\frac{45+3}{2},\frac{45-3}{2})=(24,21)$	$(\frac{90+2\times3}{2},\frac{90-2\times3}{2})=(48,42)$
$f_3=5$	$(\frac{45+5}{2},\frac{45-5}{2})=(25,20)$	$(\frac{90+2\times5}{2},\frac{90-2\times5}{2})=(50,40)$
$f_4=9$	$(\frac{45+9}{2},\frac{45-9}{2})=(27,18)$	$(\frac{90+2\times9}{2},\frac{90-2\times9}{2})=(54,36)$
$f_5=15$	$(\frac{45+15}{2},\frac{45-15}{2})=(30,15)$	$(\frac{90+2\times15}{2},\frac{90-2\times15}{2})=(60,30)$

接著討論三堆的情形，若 (x,y,z) 滿足 (x,y)、(x,z)、(y,z) 皆為黑洞狀態，則 (x,y,z) 稱為三堆黑洞狀態，我們想知道是否存在三堆的黑洞狀態？假設三堆黑洞狀態，由小而大分別為 $a\xrightarrow{+dm}b\xrightarrow{+dn}c$, 其中 m,n 互質，由結論 6，得

$$\begin{cases}\gcd(a,b)=dm\\ \gcd(b,c)=dn\\ \gcd(a,c)=d(m+n)\end{cases}$$

，進一步假設

$$\begin{cases}l_a=lcm(dm,dm+dn)\\ l_b=lcm(dm,dn)\\ l_c=lcm(dn,dm+dn)\end{cases}$$

，(a,b,c) 須滿足 $\frac{a}{l_a}$, $\frac{b}{l_b}$, $\frac{c}{l_c}$ 為整數的條件，因 m,n 互質，得 $m,n,m+n$ 兩兩互質，即 $\frac{a}{dm(m+n)}$, $\frac{b}{dmn}$, $\frac{c}{dn(m+n)}$ 為整數。根據 $\frac{a}{dm(m+n)}$ 為整數、$b-a=dm$ 及 $c-b=dn$，假設

$\begin{cases} a = dm(m+n)k \\ b = dm(m+n)k + dm \\ c = dm(m+n)k + dm + dn \end{cases}$，代入 $\dfrac{b}{dmn}, \dfrac{c}{dn(m+n)}$ 為整數之條件，計算得

$$\begin{cases} \dfrac{b}{dmn} = \dfrac{dm(m+n)k + dm}{dmn} = \dfrac{(m+n)k+1}{n} = k + \dfrac{mk+1}{n} \\ \dfrac{c}{dn(m+n)} = \dfrac{dm(m+n)k + dm + dn}{dn(m+n)} = \dfrac{mk+1}{n} \end{cases},$$

即 $\dfrac{mk+1}{n}$ 為整數，不妨設 $\dfrac{mk+1}{n} = \alpha$，化簡得 $mk = n\alpha - 1$，代入得

$\begin{cases} a = dn(m+n)\alpha - dn - dm \\ b = dn(m+n)\alpha - dn \\ c = dn(m+n)\alpha \end{cases}$，因 $l_c = lcm(dn, dm+dn) = dn(m+n)$，故可表示為

$\begin{cases} a = l_c\alpha - dn - dm \\ b = l_c\alpha - dn \\ c = l_c\alpha \end{cases}$，其中 α 為 $nx - my = 1$ 中 x 的整數解，因 m, n 互質，

故 x, y 必有整數解。檢驗是否滿足黑洞狀態的條件如下（其中 $n\alpha = my + 1$）：

$$\begin{cases} \dfrac{a}{dm(m+n)} = \dfrac{dn(m+n)\alpha - dm - dn}{dm(m+n)} = \dfrac{d(m+n)(my+1) - dm - dn}{dm(m+n)} = y \\ \dfrac{b}{dmn} = \dfrac{dn(m+n)\alpha - dn}{dmn} = \dfrac{dmn + dn(my+1) - dn}{dmn} = 1 + y \\ \dfrac{c}{dn(m+n)} = \dfrac{dn(m+n)\alpha}{dn(m+n)} = \alpha \end{cases}$$

由此，所得(a,b,c)為一組黑洞狀態。

另一方面，若 (a,b,c) 為黑洞狀態，令 $l = lcm(dm, dn, dm+dn)$，則 l 是 l_a, l_b, l_c 的倍數，故 $\dfrac{a+lt}{l_a}, \dfrac{b+lt}{l_b}, \dfrac{c+lt}{l_c}$ 亦為整數，即得 $(a+lt, b+lt, c+lt)$ 也為黑洞狀態。得到以下結論：

結論 8：三堆黑洞狀態

黑洞狀態 (a,b,c) 滿足 $a \xrightarrow{+dm} b \xrightarrow{+dn} c$，$m,n$ 互質且 $\begin{cases} l_c = lcm(dn, dm+dn) \\ l = lcm(dm, dn, dm+dn) \end{cases}$，

則 $\begin{cases} a = lt + l_c\alpha - dn - dm \\ b = lt + l_c\alpha - dn \\ c = lt + l_c\alpha \end{cases}$,其中 α 為 $nx - my = 1$ 中 x 的整數解。

例如：當 $dm = 1, dn = 1$ 時，先算得 $x - y = 1$ 的整數解 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$，再得 $\begin{cases} a = 2t \\ b = 2t+1 \\ c = 2t+2 \end{cases}$。

即得黑洞狀態(2,3,4)、(4,5,6)、(6,7,8)⋯。

例如：當 $dm = 2, dn = 4$ 時，先算得 $2x - y = 1$ 的整數解 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$，再得 $\begin{cases} a = 12t+6 \\ b = 12t+8 \\ c = 12t+12 \end{cases}$。

即得黑洞狀態(6,8,12)、(18,20,24)、(30,32,36)⋯。

四堆呢？四堆黑洞狀態 (a,b,c,d) 滿足 (a,b)、(a,c)、(a,d)、(b,c)、(b,d)、(c,d) 皆為黑洞狀態，根據結論 6，此四數須滿足：「任取兩數，兩數之差等於兩數之最大公因數的條件」，是否存在這樣的黑洞狀態呢？若 (a,b,c,d) 為黑洞狀態且 $a \xrightarrow{+p} b \xrightarrow{+q} c \xrightarrow{+r} d$，須滿足 $\gcd(a,b) = p$，$\gcd(a,c) = p+q$，$\gcd(a,d) = p+q+r$，$\gcd(b,c) = q$，$\gcd(b,d) = q+r$，$\gcd(c,d) = r$，即須滿足 $\dfrac{a}{lcm(p,p+q,p+q+r)}$、$\dfrac{b}{lcm(p,q,q+r)}$、$\dfrac{c}{lcm(p+q,q,r)}$ 及 $\dfrac{d}{lcm(p+q+r,q+r,r)}$ 皆為整數的條件。另外，若 (a,b,c,d) 為黑洞狀態且令 $l = lcm(p,q,r,p+q,q+r,p+q+r)$，不難得到 $(a+lt, b+lt, c+lt, d+lt)$ 亦為黑洞狀態。

以下試求黑洞狀態 (a,b,c,d)：由 $\dfrac{d}{lcm(p+q+r,q+r,r)}$ 為整數之條件，先設 $l_d = lcm(r,q+r,p+q+r)$，則得 $d = k \times l_d \cdots(1)$，另一方面，若 $d > c > b > a > l$，則得 $(a-l,b-l,c-l,d-l)$ 亦為黑洞數對，因此，不妨令 $a \le l$。故 $d \le l + p + q + r \cdots(2)$，由 (1)(2)得 $kl_d \le l + p + q + r$，即 $k \le \dfrac{l}{l_d} + \dfrac{p+q+r}{l_d}$，再因 k 為整數且 $\dfrac{p+q+r}{l_d} \le 1$，故得 $k \le \dfrac{l}{l_d} + 1$（註：當 $l_d \ne p+q+r$ 時，因 $\dfrac{p+q+r}{l_d} < 1$ 得 $k \le \dfrac{l}{l_d}$）。至此，可利用 Excel 來快速求得黑洞數對！以 $a \xrightarrow{+1} b \xrightarrow{+2} c \xrightarrow{+2} d$ 為例，分別在儲存格 B1~B3 輸入 1、2、2 後，在儲存格 B4 ~B6 計算 $l_d = lcm(p+q+r,q+r,r)$、$l = lcm(p,q,r,p+q,q+r,p+q+r)$、$\dfrac{l}{l_d}$，利用 $d = kl_d$、$c = d - r$、$b = c - q$、$a = b - p$ 算得 E~H 欄，再於 J~L 欄檢查 a、b、c 是否符合 $\dfrac{a}{lcm(p,p+q,p+q+r)}$、$\dfrac{b}{lcm(p,q,q+r)}$、$\dfrac{c}{lcm(p+q,q,r)}$ 為整數的條件，若符合則出現 1，反之則出現 0，當三者皆為 1，則在 I 欄顯示 yes，即獲得黑洞數對！如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	1		k	a	b	c	d	黑洞	檢查 a	檢查 b	檢查 c
2	q	2		1	15	16	18	20	yes	1	1	1
3	r	2		2	35	36	38	40		0	1	0
4	l_d	20		3	55	56	58	60		0	1	0
5	l	60		4	75	76	78	80	yes	1	1	1
6	l/l_d	3		5	95	96	98	100		0	1	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	3		k	a	b	c	d	黑洞	檢查 a	檢查 b	檢查 c
2	q	2		1	21	24	26	28		0	1	0
3	r	2		2	49	52	54	56		0	0	0
4	l_d	28		3	77	80	82	84		0	0	0
5	l	420		4	105	108	110	112	yes	1	1	1
6	l/l_d	15		5	133	136	138	140		0	0	0

此外，相對於三堆時，對任意的 p, q 都能找到三堆黑洞數對，四堆似乎未必如此。例如 $a \xrightarrow{+1} b \xrightarrow{+3} c \xrightarrow{+1} d$，在 $k \le \dfrac{l}{l_d}+1$ 的範圍內，皆無黑洞數對，故得此狀況無黑洞數對。

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	1		k	a	b	c	d	黑洞	檢查 a	檢查 b	檢查 c
2	q	3		1	15	16	19	20		0	0	0
3	r	1		2	35	36	39	40		0	1	0
4	l_d	20		3	55	56	59	60		0	0	0
5	l	60		4	75	76	79	80		0	0	0
6	l/l_d	3		5	95	96	99	100		0	1	0

再者，當 $l=l_d$ 且 $l_d \ne p+q+r$ 時， $k=1$ 即可決定是否有黑洞數對，如下：

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	2		k	a	b	c	d	黑洞	檢查 a	檢查 b	檢查 c
2	q	3		1	408	410	413	420		0	0	0
3	r	7		2	828	830	833	840		0	0	0
4	l_d	420		3	1248	1250	1253	1260		0	0	0
5	l	420		4	1668	1670	1673	1680		0	0	0
6	l/l_d	1		5	2088	2090	2093	2100		0	0	0

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	p	1		k	a	b	c	d	黑洞	檢查 a	檢查 b	檢查 c
2	q	2		1	405	406	408	420	yes	1	1	1
3	r	12		2	825	826	828	840	yes	1	1	1
4	l_d	420		3	1245	1246	1248	1260	yes	1	1	1
5	l	420		4	1665	1666	1668	1680	yes	1	1	1
6	l/l_d	1		5	2085	2086	2088	2100	yes	1	1	1

以下給定 p、q，探討哪些 r 值存在黑洞狀態？考慮 $a \xrightarrow{+1} b \xrightarrow{+1} c \xrightarrow{+r} d$ 的情形，須滿足 $\dfrac{a}{lcm(1,2,r+2)},\dfrac{b}{lcm(1,1,r+1)},\dfrac{c}{lcm(1,2,r)},\dfrac{d}{lcm(r,r+1,r+2)}$ 為整數的條件，在求最小公倍數時，需依照 r 的奇偶性討論如下：

1. 當 r 為奇數時，令 $r=2k+1$，由 $\frac{a}{2(2k+3)},\frac{b}{2k+2}$ 為整數，故得 a,b 皆為偶數，但已知 $b-a=1$，得到矛盾，故 r 為奇數時，不存在黑洞數對。

2. 當 r 為偶數時，令 $r=2k$，須滿足 $\frac{a}{2k+2},\frac{b}{2k+1},\frac{c}{2k},\frac{d}{2k(2k+1)(k+1)}$ 為整數，由 $\frac{d}{2k(2k+1)(k+1)}$ 為整數，假設 $d=2k(k+1)(2k+1)$，並將 $a=d-2k-2,\ b=d-2k-1,\ c=d-2k$ 代入條件，不難得 $\frac{a}{2k+2},\frac{b}{2k+1},\frac{c}{2k}$ 皆為整數。

歸納如下：

> 結論 9：四堆黑洞狀態
>
> 黑洞狀態 $a\xrightarrow{+1}b\xrightarrow{+1}c\xrightarrow{+r}d$，則：
>
> 1. r 為奇數時，不存在黑洞狀態。
> 2. r 為偶數時，$\begin{cases}a=\alpha t+\alpha-r-2\\ b=\alpha t+\alpha-r-1\\ c=\alpha t+\alpha-r\\ d=\alpha t+\alpha\end{cases}$，其中 $\alpha=lcm(r,r+1,r+2)$。

再如 $a\xrightarrow{+1}b\xrightarrow{+2}c\xrightarrow{+r}d$，須滿足 $\frac{a}{lcm(3,r+3)}$、$\frac{b}{lcm(2,r+2)}$、$\frac{c}{lcm(2,3,r)}$、$\frac{d}{lcm(r,r+2,r+3)}$ 為整數的條件，取最小公倍數時，將 r 分類討論如下：

1. 當 r 為奇數時，令 $r=2k+1$，由 $\frac{a}{lcm(3,2k+4)},\frac{b}{lcm(2,2k+3)}$ 為整數，得 a,b 皆為偶數，但已知 $b-a=1$，得到矛盾，故 r 為奇數時，不存在黑洞數對。

2. 當 $r=6k+4$ 時，由 $\frac{a}{lcm(3,6k+7)},\frac{b}{lcm(2,6k+6)}$ 為整數，得 $\begin{cases}a=3m\\ b=6n\end{cases}$，得 $b-a=3(2n-m)$，但已知 $b-a=1$，得到矛盾，不存在黑洞數對。

3. 當 $r=6k$ 或 $r=6k+2$ 時，取 $d=lcm(r,r+2,r+3)$，並將 $a=d-(r+3)$,

$b=d-(r+2)$, $c=d-r$，驗證得 $\dfrac{a}{lcm(3,r+3)}$、$\dfrac{b}{lcm(2,r+2)}$、$\dfrac{c}{lcm(2,3,r)}$ 皆為整數。

歸納如下：

> 結論 15：四堆黑洞狀態
>
> 黑洞狀態 $a\xrightarrow{+1}b\xrightarrow{+2}c\xrightarrow{+r}d$ ，則：
>
> 1. r 為奇數或 $r=6k+4$ 時，不存在黑洞狀態。
> 2. 當 $r=6k+2\ or\ 6k$ ，$\begin{cases}a=\alpha t+\beta-r-3\\ b=\alpha t+\beta-r-2\\ c=\alpha t+\beta-r\\ d=\alpha t+\beta\end{cases}$ 其中
>
> $\begin{cases}\alpha=lcm(3,r,r+2,r+3)\\ \beta=lcm(r,r+2,r+3)\end{cases}$。

不難發現，隨著 p、q 的變大，r 值的分類也越複雜，可以利用 Excel 的輔助，快速得到猜想，並進而驗證。

肆、結語

我們改變陳奕均等人的移動規則，展開另一段探索的過程。此兩種移動方法在二進位表法中，實有異曲同工之妙，藉由二進位表法的規律，得到形成一堆狀態的條件與次數；另一方面，我們探索黑洞狀態，依序得兩堆、三堆黑洞狀態的代數式，在探討四堆黑洞狀態時，藉由 Excel 的輔助來加速找到黑洞狀態，得到給定 p 及 q，在特定的 r 時存在黑洞狀態(例如：當 $p=q=1$時，r 為偶數時有黑洞狀態；再如 $p=1,\ q=2$時，$r=6k+2\ or\ 6k$ 時有黑洞狀態)，但迄今為止，尚未得到給定 p、q，對任意 r 值皆不存在黑洞狀態的情形，

留待後續研究探討。另外，我們也發現 n 堆黑洞狀態相當於「給定 n 個數滿足任兩數的差等於此兩數的最大公因數」，我們所得的方法，能推廣到求更多堆的狀況，給此問題提供一個解法。

參考資料

陳奕均(2015)，第 55 屆全國中小學科展國中組數學科作品。從平分問題到動態穩定。

林建銘、高暐芬、廖昇偉(2016)，第 56 屆全國中小學科展國中組數學科作品。再探均分問題的動態穩定。

許雅晴、黃芊、胡國應、蘇柏奇、游淑媛(2017)，石子移動之最少堆數及次數之探討。科學教育月刊，第 403 期。

【完】