中學生通訊解題第 141 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14101

設連續自然數的集合$A_n=\{1,2,3,\cdots,n\}$，其中$n\geq 2$，將A_n去除某一個元素k之後，剩下的$n-1$個數的算術平均數為 10，試求數對(n,k)。

【簡答】 $(n,k)=(18,1)$或$(19,10)$或$(20,20)$

【詳解】 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$，而$10=\frac{10(n-1)}{n-1}$，則$k=\frac{n(n+1)}{2}-10(n-1)$

$$=\frac{n^2-19n+20}{2}=\frac{(n-\frac{19}{2})^2-\frac{281}{4}}{2}$$

(1) 當$2\leq n\leq 17$時，

$$\frac{-15}{2}\leq n-\frac{19}{2}\leq\frac{15}{2},(n-\frac{19}{2})^2\leq\frac{225}{4},k=\frac{(n-\frac{19}{2})^2-\frac{281}{4}}{2}\leq\frac{\frac{225}{4}-\frac{281}{4}}{2}<0$$

(2) 當$n=18$時，$1+2+\cdots+18=\frac{18(18+1)}{2}=171$，

而$10=\frac{170}{17}$，則$k=171-170=1$。

(3) 當$n=19$時，$1+2+\cdots+19=\frac{19(19+1)}{2}=190$，

而$10=\frac{180}{18}$，則$k=190-180=10$。

(4) 當$n=20$時，$1+2+\cdots+20=\frac{20(20+1)}{2}=210$，

而$10=\frac{190}{19}$，則$k=210-190=20$。

(5) 當$n\geq 21$時，$k-n=\frac{n^2-21n+20}{2}=\frac{(n-\frac{21}{2})^2-\frac{361}{4}}{2}\geq\frac{(21-\frac{21}{2})^2-\frac{361}{4}}{2}>0$，

即$k>n$矛盾。

由(1)~(5)的討論可知，數對$(n,k)=(18,1)$或$(19,10)$或$(20,20)$。

【解題評析】

此題算是偏易的數論題，只要好好進行各種情況的討論，就能得到正確的三個解而得到滿分 7 分。

問題編號
14102

設正整數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n+3} = a_{n+2}(a_{n+1} + 2a_n), n = 1,2,\cdots$ 且 $a_6 = 560$，求 a_1, a_2, a_3 之值。

【簡答】 $a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = 2$

【詳解】

$a_6 = a_5(a_4 + 2a_3) = a_4(a_3 + 2a_2)(a_4 + 2a_3)$

$= a_3(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_2)(a_3(a_2 + 2a_1) + 2a_3)$

$= {a_3}^2(a_2 + 2a_1)(a_3 + 2a_2)(a_2 + 2a_1 + 2)$

因為 $a_6 = 560 = 2^4 \times 5 \times 7$，所以由 $a_2 + 2a_1 + 2$ 與 $a_2 + 2a_1$ 相差 2，

且都是 560 的正因子，只能有 $\begin{cases} a_2 + 2a_1 + 2 = 7 \\ a_2 + 2a_1 = 5 \end{cases}$，從而 ${a_3}^2(a_3 + 2a_2) = 2^4$。

由此可得 $a_3 = 1$ 或 2。若 $a_3 = 1$，則 $a_2 = \dfrac{15}{2}$ 不是自然數，矛盾。

所以 $a_3 = 2$，則 $a_2 = 1$，代回得 $a_1 = 2$。

【解題評析】

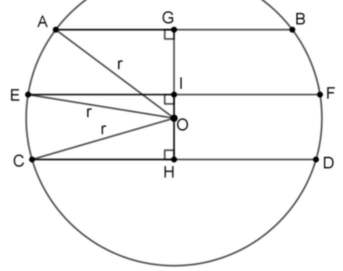
本題共有 10 位同學參加徵答，其中 8 人得到 7 分、2 人得到 3 分。答對的同學中，討論過程分析得很清楚，有找出因數分解時的關鍵條件，解起來就會比較快。

問題編號
14103

已知圓 Γ 內有兩弦 $\overline{AB}, \overline{CD}$，其中 $\overline{AB} = 40, \overline{CD} = 48$，且 $\overline{AB} // \overline{CD}$，又 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 之距離為 22，若弦 $\overline{EF}$ 在 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的正中間，且 $\overline{AB} // \overline{CD} // \overline{EF}$，求弦 $\overline{EF}$ 的長度。

【簡答】 $2\sqrt{609}$

【詳解】 設圓心為 O，從 O 作 $\overline{AB},\overline{CD},\overline{EF}$ 之垂足分別為 G,H,I，
則 $\overline{AG}=20,\overline{CH}=22$，設半徑為 r，則 $\overline{OA}=\overline{OC}=\overline{OE}=r$，
設 $\overline{OG}=x$，則 $\overline{OH}=22-x$，在直角三角形 $\triangle AOG$ 與 $\triangle COH$ 中，
由畢氏定理知 $20^2+x^2=r^2=24^2+(22-x)^2$，
化簡得 $x=15$，則 $r=25$，
則 $\overline{OI}=15-\dfrac{15+7}{2}=4$，
在直角三角形 $\triangle EOI$ 中，
由畢氏定理知
$\overline{EI}=\sqrt{25^2-4^2}=\sqrt{609}$，
$\therefore \overline{EF}=2\sqrt{609}$。



【解題評析】

此題算是偏易的幾何題，雖然詳解中只有列出 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 在圓心異側的正確情況，但是不少同學也有把 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 在圓心同側的錯誤情況列出來並加以反駁，表示許多同學思考縝密，值得嘉許。

問題編號
14104

試求所有的正整數數對 (a,b,c)，滿足 $a+b+c=10$，且在平面上有相異的 a 個紅點，b 個藍點，c 個綠點，使得

(1) 每個紅點均與藍點相連，所有線段長度之和為 37；

(2) 每個綠點均與紅點相連，所有線段長度之和為 30；

(3) 每個藍點均與綠點相連，所有線段長度之和為 1。

【簡答】 (8,1,1)

【詳解】

構造以藍、紅、綠三點為頂點的三角形，這樣的三角形可以是退化的，

由三角不等式，紅藍點之距 ≤ 藍綠點之距 + 紅綠點之距，

將這些不等式相加，

因為對每對固定的紅點、藍點，可以選擇的綠點有 c 個；

同理，對每對固定的紅點、綠點，可以選擇的藍點有 b 個；

對每對固定的藍點、綠點，可以選擇的紅點有 a 個，

因此，$37c \le 30b + a$，

又 $a + b + c = 10$，則 $37c \le 30b + (10 - b - c) = 10 + 29b - c$，

$\Rightarrow\ 38c \le 10 + 29b\ \Rightarrow\ \dfrac{38c - 10}{29} \le b$，

同理，$30b \le 37c + a \Rightarrow 30b \le 37c + (10 - b - c) = 10 + 36c - b$，

$\Rightarrow 31b \le 10 + 36c \Rightarrow b \le \dfrac{36c + 10}{31}$，

得 $\dfrac{38c - 10}{29} \le b \le \dfrac{36c + 10}{31} \Rightarrow 31(38c - 10) \le 29(10 + 36c) \Rightarrow c \le 4$；

(1)當 $c = 1$ 時，則 $\dfrac{38 - 10}{29} \le b \le \dfrac{36 + 10}{31} \Rightarrow b = 1$；$a = 8$；

(2)當 $c = 2$ 時，則 $\dfrac{76 - 10}{29} \le b \le \dfrac{72 + 10}{31} \Rightarrow b$ 無解；

(3)當 $c = 3$ 時，則 $\dfrac{114 - 10}{29} \le b \le \dfrac{108 + 10}{31} \Rightarrow b$ 無解；

(4)當 $c = 4$ 時，則 $\dfrac{152 - 10}{29} \le b \le \dfrac{144 + 10}{31} \Rightarrow b$ 無解；

接著證明：有相異 8 個紅點，1 個藍點，1 個綠點滿足條件；

取藍點為(0 , 0)，綠點為(1 , 0)，紅點為$\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{15}}{2}\right)$、$(n , 0)$(其中 $2 \le n \le 8$)，

則所有紅藍點之距 $= 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 37$，

所有紅綠點之距 $= 2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 30$，

所有藍綠點之距 $= 1$；得證。

【解題評析】

(1) 先說明此題所應用的數學原理與解題想法：

這題解法的核心觀念是：平面上相異三點，兩邊之和大於等於第三邊。用這個性質，算兩次，得到 b 的上下界(以 c 表示)，因此得 c 的上界，再分別討論得之。

(2) 對於解法中兩不等式 $37c \le 30b + a$，$30b \le 37c + a$ 提供另一淺顯的方法說明之：

設 d_1 為紅點、藍點間的平均距離，d_2 為紅點、綠點間的平均距離，d_3 為藍點、綠點間的平均距離，

$\Rightarrow abd_1 = 37,\ acd_2 = 30,\ bcd_3 = 1$，

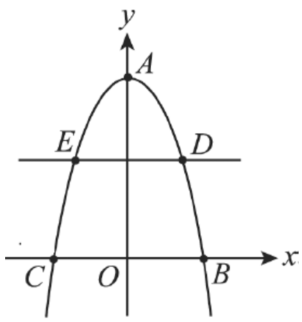
$\Rightarrow d_1 = \dfrac{37}{ab},\ d_2 = \dfrac{30}{ac},\ d_3 = \dfrac{1}{bc}$，$\overline{藍綠} + \overline{紅綠} \ge \overline{紅藍}$，$\overline{藍綠} + \overline{紅藍} \ge \overline{紅綠}$，

$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{bc}abc + \dfrac{30}{ac}abc \ge \dfrac{37}{ab}abc \\ \dfrac{1}{bc}abc + \dfrac{37}{ab}abc \ge \dfrac{30}{ac}abc \end{cases}$，$\Rightarrow \begin{cases} a + 30b \ge 37c \\ a + 37c \ge 30b \end{cases}$。

(3) 必須說明在平面上有相異 8 個紅點，1 個藍點，1 個綠點滿足條件。

問題編號
14105

二次函數 $f(x) = -x^2 + k$ 的圖形如下，直線 $\overleftrightarrow{ED}$ 平行於 x 軸且在 x 軸上方，若五邊形 $ADBCE$ 的面積之最大值為 $\dfrac{135}{4}$，試求 k 值為何？



【簡答】 9

【詳解】 令 $D(t, k - t^2)$，$E(-t,\ k - t^2)$ $\Rightarrow$ $\overline{DE} = 2t$

$\therefore \triangle ADE$ 面積 $= \dfrac{1}{2} \times 2t \times [k - (k - t^2)] = t^3$

梯形 $EDBC$ 的面積 $= \dfrac{1}{2} \times (2t + 2\sqrt{k}) \times (k - t^2) = (t + \sqrt{k})(k - t^2) = -t^3 - \sqrt{k}t^2 + kt + k\sqrt{k}$

$\therefore$ 五邊形 $ADBCE$ 面積 $= \triangle ADE +$ 梯形 $EDBC$ 的面積

$$= t^3 - t^3 - \sqrt{k}t^2 + kt + k\sqrt{k}$$

$$= -\sqrt{k}t^2 + kt + k\sqrt{k} = -\sqrt{k}(t - \frac{\sqrt{k}}{2})^2 + \frac{5k\sqrt{k}}{4}$$

$ADBCE$ 的面積有最大值 $\dfrac{135}{4}$，即 $\dfrac{5k\sqrt{k}}{4} = \dfrac{135}{4} \Rightarrow k\sqrt{k} = 27 \Rightarrow k = 9$

【解題評析】

本題屬於二次函數的代數簡易題，透過圖形表徵轉換，將圖形上的點坐標適當假設，再依題目條件解出正確答案。