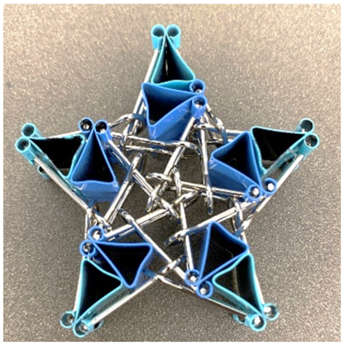
長尾夾的藝數細胞

連崇馨 [1]　顏敏姿 [2*]

[1] 高雄市立鳳山高級中學
[2] 高雄市立楠梓國民中學

壹、前言

在 youtube 上，有一部 《唐老鴨奇幻數學樂園》影片，影片中講述古希臘時代的數學討論都是秘密地進行，只有畢達哥拉斯學派的人，才能一同討論數學，他們之間有一個暗號，那就是神秘的五角星(影片中 7:12 處)。在現代的我們，想要成為「數學怪人」，擁有一顆神秘的五角星並不難，只要拿出 10 個長尾夾，就能完成，如下圖一、二所示。



圖一：筆樂牌

圖二：SDI 手牌

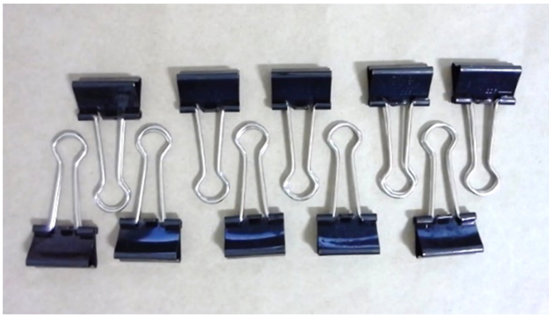
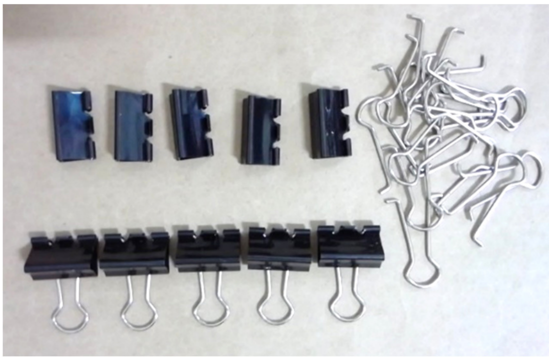
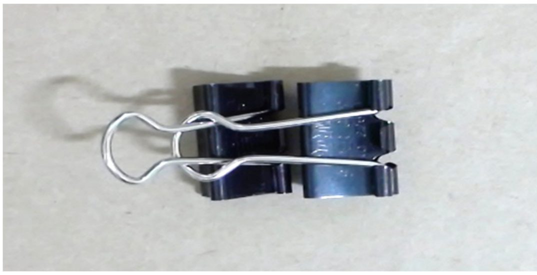
不過筆者發現不同牌子的長尾夾的勾環長度略有不同，扣出來的星星形狀稍有差異，差別的地方是在中間的五邊形大小。圖一採用的牌子為筆樂，中間的五邊形縮至最小，看起來像是一個很小的五角星；圖二採用的牌子為 SDI(手牌)，中間形成的五邊形結構較為鬆散。

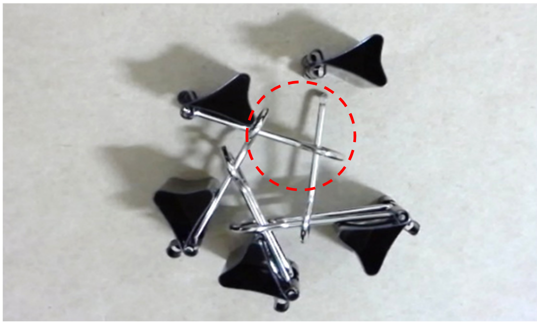
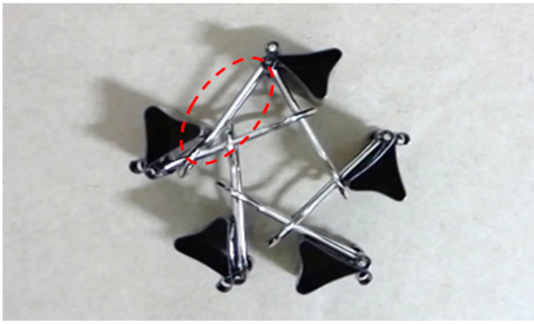
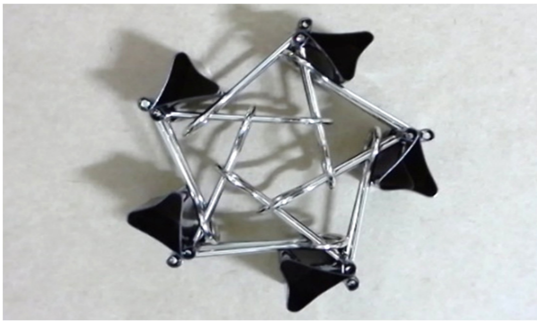
圖三

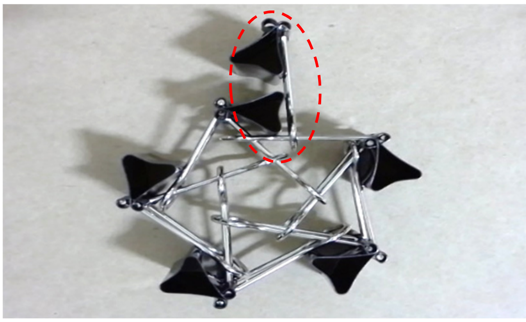
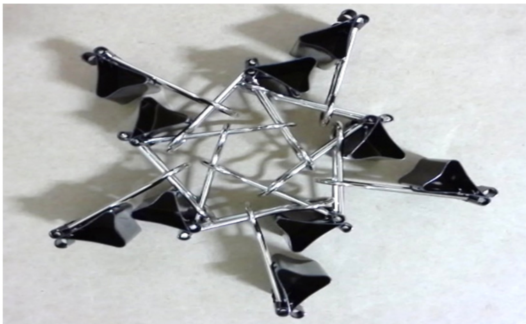
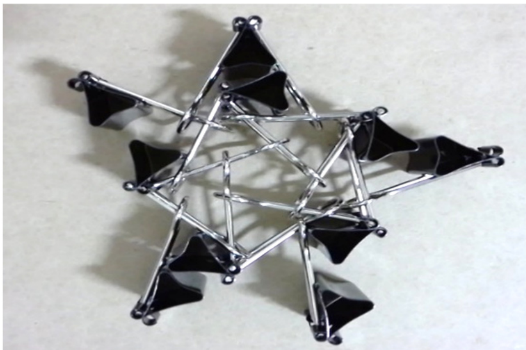
*為本文通訊作者

圖三中最大的五角星是用 32mm 的長尾夾製作，接著是 25mm，19mm 與 15mm。建議一開始試做的人，可以選擇 SDI 這個牌子，他的勾環比較長，比較不會有很難扣的情形，等熟悉之後，可以嘗試用筆樂這個牌子，做出最內層的小五角星。

貳、長尾夾五角星的製作過程

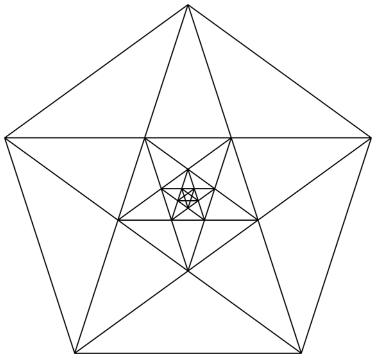
 圖 1  圖 2	1. 準備 10 個大小相同的長尾夾，一般長尾夾的大小分幾種規格，如果是讓學生操作，建議先用 19MM 的尺寸，但如果想要做出上面的效果，牌子必須是筆樂 15MM，而且不同牌子的長尾夾兩側的勾環長度比例不同，做出來的效果也不盡相同。 2. 將其中 5 個拆掉同一側邊的勾環，另外 5 個兩側的勾環都拆掉後放旁邊，如圖 2 所示。
 圖 3  圖 4	3. 將這 5 個單邊的長尾夾，以同方向串接互扣，如圖 3 及圖 4。

 圖 5	4. 將 5 個互扣的零件，圍成一個封閉的五邊形。（須將第 5 個零件的勾環拆除，並與第一個互扣後再裝上，才能圍成五邊形）
 圖 6	5. 這裡要注意，每個單邊的長尾夾，方向都需要轉到同一邊。（註：可以檢查一下，當面對長尾夾的開口時，勾環是否都在夾子的同一側）
 圖 7	6. 依序加入長尾夾另一側的勾環，扣成外圍的第二個五邊形。過程中，您會發現，放入的另一側勾環，會與剛剛內層的勾環，構成一個三角形。
 圖 8	7. 5 個長尾夾兩側的勾環，互扣完成內外兩層正反的五邊形，如圖 8 所示。

<table>
<tr><td>
圖 9</td><td>8. 加入最外層的長尾夾，將長尾夾右側的勾環勾在第二個五邊形的邊上，如圖 9 所示。</td></tr>
<tr><td>
圖 10</td><td>9. 依序加入最外層的 5 個夾子，使其右側勾環，勾在第二層五邊形的邊上。</td></tr>
<tr><td>
圖 11</td><td>10. 依序加入最外層的長尾夾另一側(左側)的勾環，讓兩個外層夾子互扣形成五角星。</td></tr>
<tr><td>
圖 12</td><td>11. 完成圖
(注意：加入的外環，是與外層的長尾夾互扣，並沒有勾住內層的五邊形。)</td></tr>
</table>

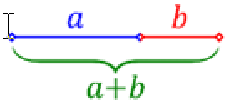
參、長尾夾五角星與黃金比

記得小時候學生時代，第一個學會的一筆畫圖形，就是五角星形，長大後發現，原來一筆畫完成正五邊形的 5 條對角線，就是畫星星，更神奇的是，如果我們先畫一個正五邊形，再畫出五條對角線，也可以得到一個五角星；在這五角星中的五邊形，繼續畫出對角線，又可得到一個五角星，如此一直不斷畫下去(如圖四)，可以發現，正五邊形與五角星之間，存在一個特別的比例關係，就是所謂的黃金比例。



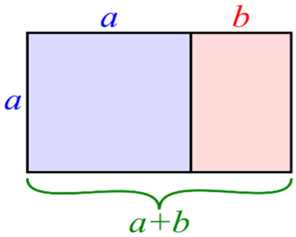
圖四

黃金比例，又稱黃金分割，一般以希臘字母 φ 表示。可以透過以下代數式定義：

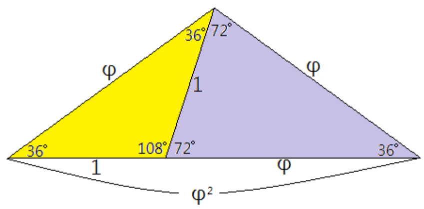


$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}=\varphi \quad (a>b>0)$$

這也是黃金比例一名的由來，而黃金比例的準確值為$\frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$。所以當一個長方形的長寬比符合黃金比例時，就是所謂的黃金矩形，如圖五。除了黃金矩形外，也有黃金三角形，所謂的黃金三角形是一種特殊的等腰三角形，因為它的腰與底邊（或底邊與腰）的比值等於黃金比，如圖六，而且這兩種黃金三角形剛好在正五邊形裡都可以看得到。

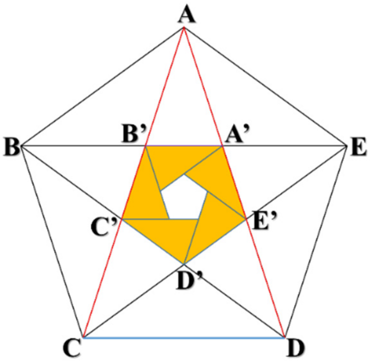


圖五



圖六

仔細觀察，長尾夾完成的五角星中，可以看到三角形與正五邊形的架構，而且若不考慮夾子的彎曲，我們把夾子視為直線，則長尾夾五角星裡也存在著黃金三角形，如圖七、圖八。

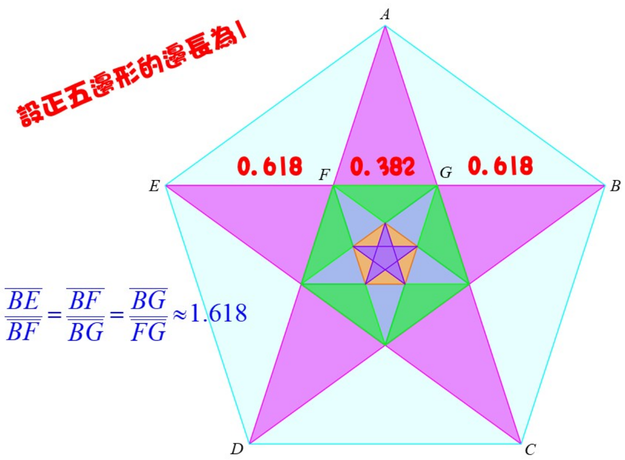


圖七

圖八

五角星之所以吸引人，是因為其中邊與邊之間存在一個迷人的比值，即黃金比。正五邊形被對角線所分割，得出兩種不同的等腰三角形，有一種是頂角為 36°的等腰三角形，如圖九中的 ΔAFG 、ΔACD，有一種是頂角為 108°的等腰三角形，如圖九中的 ΔABC 。這兩種等腰三角形，其腰長與底邊的比值都符合一個等殊值，就是黃金比例，圖中利用相似三角形

的性質可得 $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BG}}=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{FG}}=\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 。



圖九

若在高中端，我們可以利用這兩個黃金三角形的相似性質，求得 $\sin 18^{\circ}$ 的值，作法如下，ΔABC 是一個頂角為 36° 的等腰三角形，$\overline{AM}$ 與 $\overline{BC}$ 分別為 $\angle A$ 與 $\angle B$ 的角平分線，如圖所示：

作圖如圖十，等腰 ΔABC 中，頂角 $\angle A = 36^{\circ}$，兩底角 $\angle ABC = \angle C = 72^{\circ}$，

作 $\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$，交 $\overline{AC}$ 於 D 點，取 $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$，$\overline{BC} = x$，則

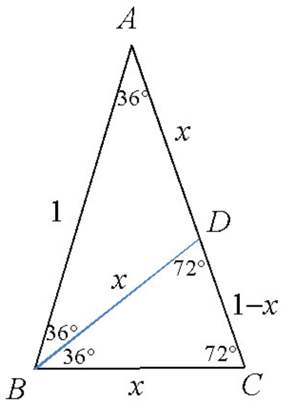
$\overline{BD} = \overline{DA} = x \Rightarrow \overline{CD} = 1 - x$，由圖得知 $\Delta ABC \sim \Delta BCD \Rightarrow \dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$，

即 $\dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$，

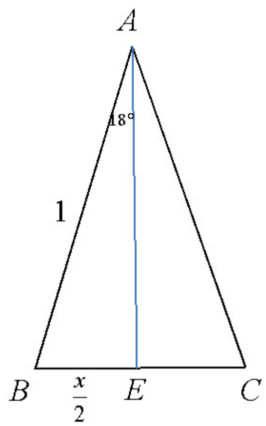
因為 $x > 0$，所以 $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

再做頂角的角平分線 $\overline{AE}$，如圖十一，則 $\angle BAE = 18^{\circ}$ 且 $\overline{BE} = \dfrac{x}{2}$

由定義可知 $\sin 18^{\circ} = \dfrac{\frac{x}{2}}{1} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$



圖十



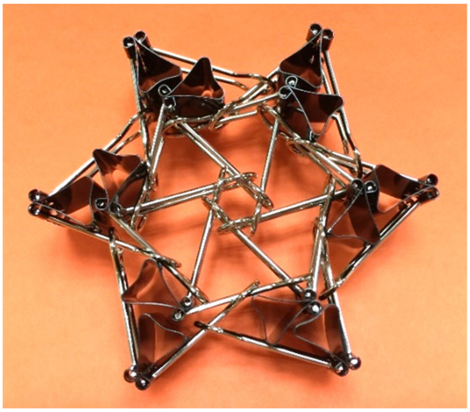
圖十一

楠梓國中林涵勛同學，在學會了這個結構之後，也被黃金比例所深深吸引，沉醉在無限循環的五邊形與五角星之中，做出如圖十二中的作品，此作品是不是又更貼近了正五邊形、五角星與黃金比的感覺呢?

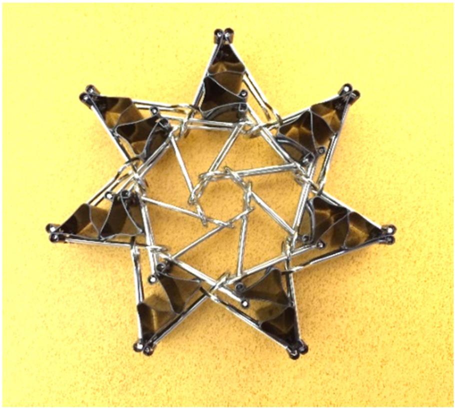
圖十二

肆、進階挑戰

根據本文長尾夾五角星的作法，可以利用相同的結構模式，仿製出長尾夾六角星、七角星，如圖十三、十四，就留給有興趣的讀者去挑戰囉!



圖十三



圖十四

註：若要製作六角星、七角星，建議以 SDI(手牌)的長尾夾製作。

文末在此要特別感謝「藝數摺學寫作社團」中新北市林口國中李政憲老師與苗栗高商的蔣小娃老師協助修正校稿。

伍、參考資料與延伸閱讀

1．唐老鴨 - 數學冒險之旅(1959) https://www.youtube.com/watch?v=vlwLsKWk52A

2．利用長尾夾製作多面體-林鼎鈞-科學研習月刊-201507(54:7 期)