中學生通訊解題第 142 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14201

已知 x 的方程式 $x^2-4x-(n^2+6n)=0$ 的二根都是整數，求整數 n 之值。

【簡答】 0 或 -6

【詳解】 $x=2\pm\sqrt{4+n^2+6n}$ 是整數，

設 $4+n^2+6n=m^2$，$m>0$

$\Rightarrow (n+3)^2-m^2=5$

$\Rightarrow (n+3+m)(n+3-m)=5$

$\Rightarrow \begin{cases} n+3+m=5 \\ n+3-m=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} n+3+m=-1 \\ n+3-m=-5 \end{cases}$

$\Rightarrow n=0$ 或 -6

【解題評析】

本題屬偏易的數論題，需運用到二次方程式求解，再對解進行分析。可能會用到根式的化簡、因式分解等技巧。有些同學會忽略了負整數的情況，但大部分同學都能掌握要點得到正確答案。本題共 17 位同學參與徵答，12 位同學獲得滿分。

問題編號
14202

有一個數列 $x_1, x_2, \cdots, x_{2018}$，其中 $x_1=\dfrac{1}{5}$ 且 $x_{k+1}={x_k}^2+x_k$，$k=1,2,\cdots,2017$，

試求 $\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\dfrac{1}{x_3+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_{2018}+1}$ 的整數部分。

【簡答】 4

【詳解】

$$x_{k+1}=x_k^{\ 2}+x_k=x_k(x_k+1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k(x_k+1)}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1} \Rightarrow \frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2017}+1}$$

$$=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3})+\cdots+(\frac{1}{x_{2017}}-\frac{1}{x_{2018}})+\frac{1}{x_{2018}+1}$$

$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2018}}+\frac{1}{x_{2018}+1}=5-\frac{1}{x_{2018}(x_{2018}+1)}$$

又 $x_{2018}(x_{2018}+1)>1$，故 $0<\dfrac{1}{x_{2018}(x_{2018}+1)}<1$

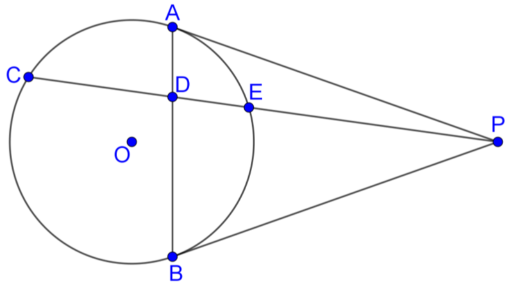
$$\Rightarrow \left[5-\frac{1}{x_{2018}(x_{2018}+1)}\right]=4$$

【解題評析】

本題為中等偏易的數列級數問題，重點在將 x_{k+1} 表為 x_k 因式分解的形式，倒數後即可拆為二個分式相減，利用分項對消的性質化簡級數，從而估計其值的範圍。

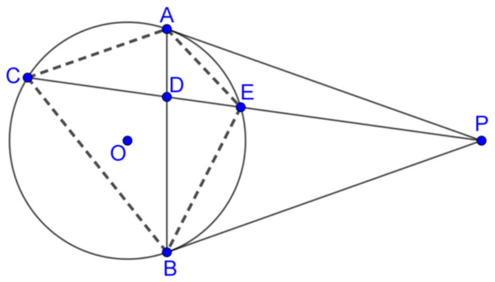
問題編號
14303

設有一圓心為 O 的圓，其中 $\overline{PA},\overline{PB}$ 是圓的兩條切線，且 $\overline{PC}$ 為圓的割線並交圓於一點 E，又 D 是 $\overline{PC}$ 與 $\overline{AB}$ 的交點，如下的示意圖。若 $\overline{PE}=4,\overline{CD}=2$，求 $\overline{AD}\times\overline{DB}$ 的值。



【簡答】 $-6+2\sqrt{17}$

【詳解】 設 $\overline{DE}=x$，連接 $\overline{AC},\overline{CB},\overline{BE},\overline{EA}$，



因為 $\overline{PA},\overline{PB}$ 是圓的兩條切線，

所以 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 且 $\angle PAE=\angle ACE,\angle PBE=\angle BCE,$

則 $\Delta PAE\sim\Delta PCA,\Delta PEB\sim\Delta PBC$

$$\therefore\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{BP}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}$$

$$\therefore\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}\cdot\frac{\overline{PE}}{\overline{AP}}=\frac{\overline{PE}}{\overline{CP}}=\frac{4}{x+4+2}\text{，}$$

又圓內接四邊形 $ACBE$ 中，因為 $\Delta ADE\sim\Delta CDB,\Delta EDB\sim\Delta ADC$

所以 $\frac{\overline{AE}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}},\frac{\overline{BE}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{DA}}$，則 $\frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{EB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}=\frac{x}{2}$，

可得 $\frac{4}{x+6}=\frac{x}{2}\ \Rightarrow\ x^2+6x-8=0\ \Rightarrow\ x=\frac{-6\pm\sqrt{68}}{2}=-3\pm\sqrt{17}$ (負不合)

再由圓內冪性質知 $\overline{AD}\times\overline{DB}=\overline{CD}\times\overline{DE}=2\times\left(-3+\sqrt{17}\right)=-6+2\sqrt{17}$ 。

【解題評析】

本題徵答人數為 5 人，屬於幾何難題，全部答對得 7 分者有 3 人，特別值得嘉許，三位同學皆使用了好幾組畢氏定理及圓冪性質求得答案、有些搭配相似形，有位同學則用餘弦定理解題。

問題編號
14204

39 個人聚會，有人問每個與會者「其餘人中有幾個與你同年齡、同姓？」結果，回答包含了從 0 到 11 的所有整數。證明：必有兩個人既同年齡又同姓。

【證明】

將 39 個人標記為$1,2,\cdots,39$。設這 39 個人中不同的年齡為 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，不同的姓為 $B_1,B_2,\cdots,B_n$，作出如圖所示的表格：

對第 k 個人，若他的年齡為 A_i，則在第 k 列與 A_i 所在的行的交差格子中填 1，否則填 0；若他姓 B_j，則在第 k 列與 B_j 所在的行的交差格子中填 1，否則填 0。

顯然每一列中有兩個 1，記 A_i 所在的行中有 a_i 個 1，B_j 所在的行中有 b_j 個 1（$1\le i\le m$，$1\le j\le n$）。分別按行與列計算表格中 1 的個數，結果應相同，故有 $a_1+\cdots+a_m+b_1+\cdots+b_n=2\times 39=78$。

另一方面，a_i 是年齡為 A_i 的人數，b_j 是同姓 B_j 的人數。由問題的已知條件可知 $a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n$ 中包含著數$1,2,3,\cdots,12$。

因此 $a_1+\cdots+a_m+b_1+\cdots+b_n\ge 1+2+\cdots+12=78$。

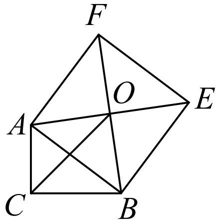
結合上式可知 $a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_n$ 必是$1,2,3,\cdots,12$的一個排列，因而 $m+n=12$。故 $m,n\le 11$。不妨設 $a_1=12$，即年齡為 A_1 的共有 12 人，因姓氏的數目 $n\le 11$，故這 12 個人中必有兩人同姓。

【解題評析】

本題有 4 人參與徵答，最高分是雲林縣福智高中覺尚容同學為 6 分。覺同學論述得非常完整，利用 39 個人共有 78 個答案，與 0~11 都要有人回答，知道 0~11 恰好各回答一次，接著舉例說明必有兩人既同年齡又同姓。有的同學似乎誤解題意，『其餘人中有幾個與你同年齡、同姓？』這是兩個問題，所以每個人都要回答兩個數字；另外『必有兩個人既同年紀又同姓』的反面意思是『沒有人同年紀或同姓』。關於邏輯的問題，同學們容易解讀錯誤，進而得到錯誤的結論。再者，如果這個命題是正確的，就不能只舉一個例子說明；如果命題是錯誤的，當然舉一個反例即可。

問題編號
14205

如圖（只是示意圖），在直角□ABC中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AC}=6$，以 $\overline{AB}$ 為一邊向三角形外作正方形 $ABEF$，正方形的中心為 O，且 $\overline{OC}=8\sqrt{2}$。試問 $\overline{BC}$ 的長為何？

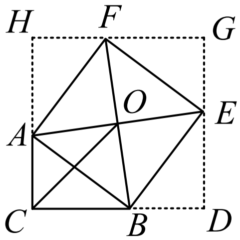


【簡答】 10

【詳解】

解法一：使用輔助線構造正方形

如右圖，過點 E 作 $\overline{CB}$ 延長線的垂線且與過點 F 作 $\overline{CA}$ 延長線的垂線交於點 G。



易知 $\triangle ABC \cong \triangle BED \cong \triangle EFG \cong \triangle FAH$。

故 $\overline{AC} = \overline{BD} = \overline{EG} = \overline{FH} = 6$，

及 $\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{GF} = \overline{HA}$。

所以，四邊形 $CDGH$ 是正方形，

則 $\overline{OC}$ 是正方形對角線的一半。

由 $\overline{OC} = 8\sqrt{2}$，則正方形 $CDEF$ 的邊長為 $\overline{CD} = \overline{CB} + \overline{BD} = \sqrt{2}\,\overline{OC} = 16$。

於是，$\overline{BC} = \overline{CD} - \overline{BD} = 10$。

解法二：四點共圓，使用托勒密定理

因為 $\angle ACB = \angle AOB = 90^\circ$，所以 O, A, C, B 四點共圓。

又知 $\overline{AB} = \sqrt{2}\,\overline{OA}$

考慮托勒密定理，$\overline{AO} \times \overline{CB} + \overline{AC} \times \overline{OB} = \overline{AB} \times \overline{OC}$，

$\overline{OA} \times (\overline{BC} + \overline{AC}) = \sqrt{2}\,\overline{OA} \times \overline{OC}$，

$\overline{BC} + \overline{AC} = 16$，得 $\overline{BC} = 10$。

【解題評析】

本題徵答人數為 12 人，全部答對得 7 分者有 11 人，這個問題是偏向簡單的幾何問題，所以有許多的作答方法，大致上可以分成三方向來作答。第一、使用輔助線構造正方形法，如此就可以使用畢氏定理求解。第二、觀察出四邊形 $OACB$，是由兩個直角三角形構成，也可看出對角互補，所以四點共圓，於是可以運用托勒密定理，也可以求解。第三、若同學超前學習高中課程，也可以使用餘弦定理，也容易得到答案。而得到部分分數的同學是因為在說明時不夠清楚且符號使用錯誤或不合理，因而扣一些分數。