

摺剪幾何花拼圖

李政憲¹ 王儷娟² 翁條雄^{3*}

¹ 新北市立林口國民中學

² 臺南市立仁德文賢國民中學

³ 臺北市立濱江實驗國民中學

剪紙在日常生活中常被當做是一門藝術在看待，事實上剪紙與數學有著密不可分的關係，不僅麻省理工學院有相關研究，早在 1727 年有一位名叫多賀谷環中仙的日本人把摺紙與一刀剪的題目編成了一本書，書名叫做《和國智惠較》的日本書，在《和國智惠較》書中有著一道經典的問題，號稱是在考驗數學能力的剪紙題目就是如何將一張正方形的色紙經過數次摺疊後剪一刀，再將色紙攤開後作品呈現三個菱形疊在一起的「三階菱」家紋(如圖一)[1]

2021 年 7-8 月在日本東京都舉辦的第 32 屆夏季奧林匹克運動會以及第 16 屆夏季帕拉林匹克運動會，其 Logo 如圖二[2]是由日本設計大師野老朝雄所設計，Logo 上的組市松紋由三種不同的長方形組成，代表來自世界各地參加奧運的隊伍各有其國家、文化和思想，也就是採用「和而不同」(Unity in diversity) 方式，來呈現奧運和帕運的多元性，並串聯為四海一家的深遠意涵。

令人好奇的是這些長方形如何能頂點與頂點銜接得無懈可擊?而三種長方形它們的長與寬的比例彼此間又有何關係呢?本文將透過色紙的摺剪活動引導讀者一起進入數學幾何的美麗世界!

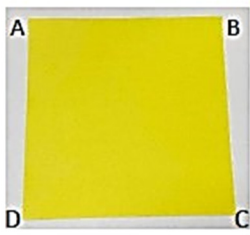


圖一：三階菱に釘抜

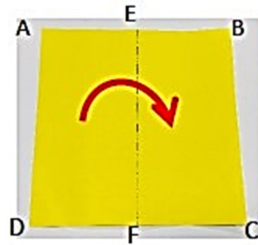


圖二：第 32 屆夏季奧林匹克運動會 Logo(左)
第 16 屆夏季帕拉林匹克運動會 Logo(右)

活動一:如何在一張色紙內摺剪 $60^{\circ} - 120^{\circ}$ 的菱形



準備一張色紙



步驟 1

向右對摺摺出 \overline{AB}
的中垂線 \overline{EF}



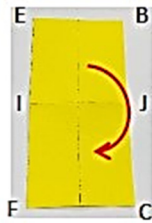
步驟 2

向右對摺，色紙
開口向右



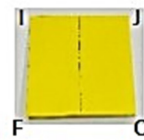
步驟 3

向右對摺摺出 \overline{BE} 的
中垂線 \overline{GH}



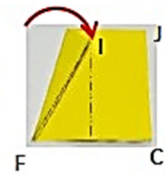
步驟 4

向下對摺摺出 \overline{EF}
的中垂線 \overline{IJ}



步驟 5

向下對摺摺，
色紙開口向下



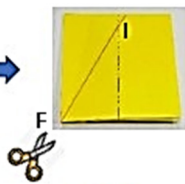
步驟 6

將 I 點摺到 \overline{CF}
中垂線上



步驟 7

用筆與直尺畫
出直線 \overline{IF}



步驟 8

最後沿著 \overline{IF} (即紅
線)剪下



步驟 9

將左上方直角
三角形攤開可得



步驟 10

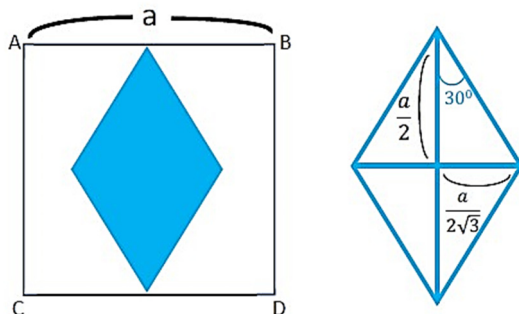
攤開直角三角
形可得 $60^{\circ} - 120^{\circ}$
的菱形

$60^{\circ} - 120^{\circ}$ 的菱形

思考題：

在一張色紙內像這樣剪出來的 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形是否是最大的 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形？

答：否，上述的菱形長軸是以正方形的邊長當作是菱形長軸，若要取最大的 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形，只需要以正方形的對角線當作是菱形長軸即可（說明如下）。



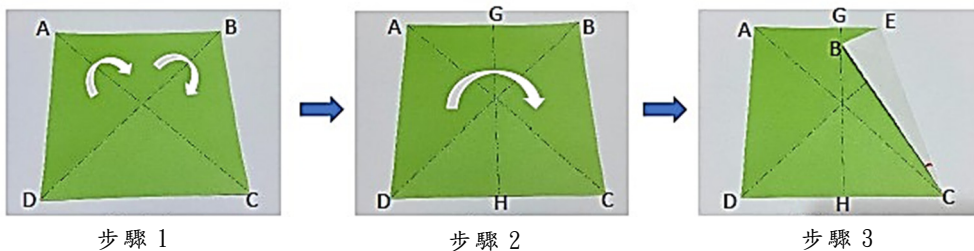
$$\text{菱形面積} = \frac{a \times \frac{a}{2\sqrt{3}}}{2} = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}$$

，其中 a 為菱形的長軸

所以面積要最大，代表長軸愈長愈好。而在正方形 ABCD 內，能找得到最長的長軸就是正方形的對角線 $\sqrt{2}a$ ，此時菱形的面積為 $\frac{(\sqrt{2}a)^2}{2\sqrt{3}} = \frac{a^2}{\sqrt{3}}$ 。

接著介紹以正方形的對角線當作是菱形長軸來製作 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形的作法。

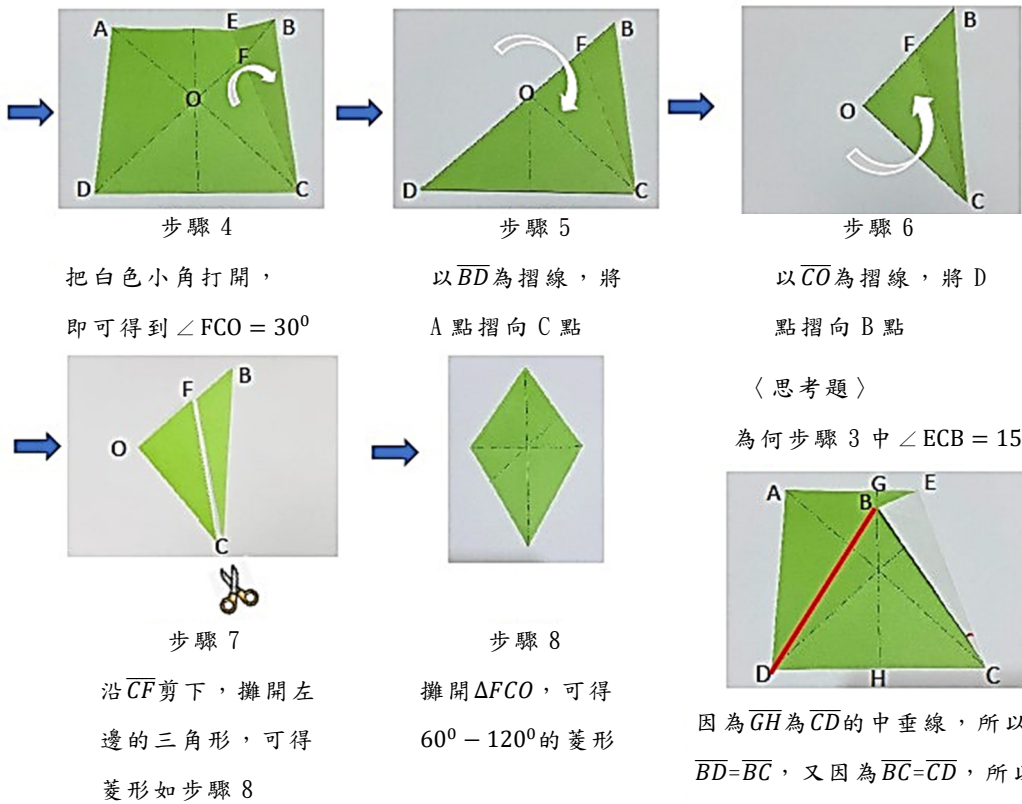
首先摺出正方形的兩對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} （如步驟 1），接著將色紙向右對摺摺出 \overline{AB} 的中垂線 \overline{GH} （如步驟 2），然後固定 C 把 B 摺到 \overline{AB} 的中垂線 \overline{GH} 上（如步驟 3），我們會得到一條摺線 \overline{CE} ，而那個小角 $\angle ECB = 15^\circ$ ，再把白色小角打開，即可得到 $\angle FCO = 30^\circ$ （如步驟 4），然後以 \overline{BD} 為摺線，將 A 點摺向 C 點（如步驟 5），以 \overline{CO} 為摺線，將 D 點摺向 B 點（如步驟 6），最後沿 \overline{CF} 剪下（如步驟 7），攤開左邊的三角形 $\triangle FCO$ 就可以得到 $60^\circ - 120^\circ$ 的菱形（如步驟 8）。



步驟 1
摺出正方形的兩對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD}

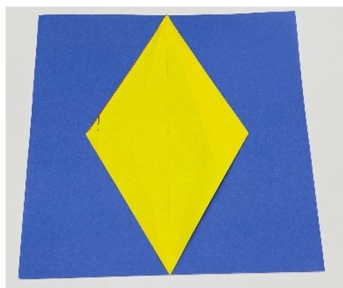
步驟 2
向右對摺摺出 \overline{AB} 的中垂線 \overline{GH}

步驟 3
固定 C 把 B 摺到 \overline{AB} 的中垂線 \overline{GH} 上，產生一條摺線 \overline{CE} ，可得 $\angle ECB = 15^\circ$

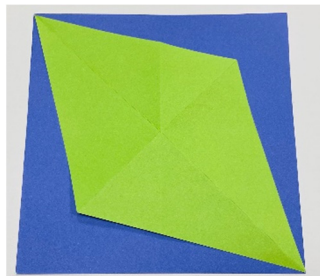


比較兩者 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形大小

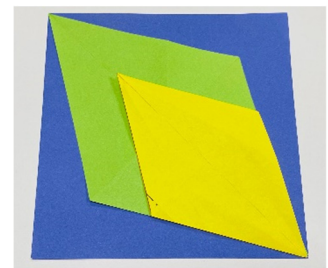
圖三中的 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形為正方形的邊長當作是菱形長軸，圖四中的 $60^\circ - 120^\circ$ 菱形以正方形的對角線當作是菱形長軸，圖五為將兩種菱形重疊在正方形色紙上，藉由重疊可以清楚比較兩種菱形大小差異。



圖三：以正方形的邊長
當作是菱形長軸



圖四：以正方形的對角線
當作是菱形長軸

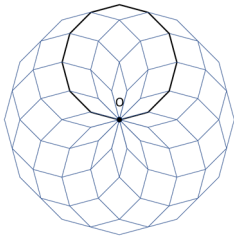


圖五：將兩種菱形重疊
在正方形色紙上

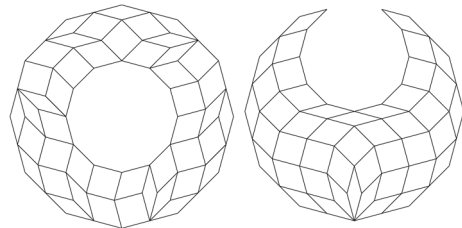
活動二:利用摺剪製作出 2020 東京奧運與帕運 Logo 的框架

2020 東京奧運與帕運 Logo 設計背後的框架可以視為 1 個正 12 邊形繞著 O 點每 30 度旋轉一次(如圖六),此圖中包含了 24 個 30° - 150° 的菱形、24 個 60° - 120° 的菱形以及 12 個正方形。經過設計大師野老朝雄的巧妙安排只取了其中的 18 個 30° - 150° 的菱形、18 個 60° - 120° 的菱形以及 9 個正方形而得 2020 東京奧運與帕運 Logo 設計背後的框架。(如圖七)

如何將一張正方形利用色紙摺疊後可以得到多個一樣大小的菱形?以及如何摺剪可以讓 30° - 150° 的菱形、 60° - 120° 的菱形以及正方形邊長相等?請讀者不妨拿出色紙跟著下方的步驟試試看(為求各四邊形邊長的等長與拼貼的方便性,此處在色紙內盡可能摺製較多的小菱形,並使得邊長為正方形色紙的四分之一)。

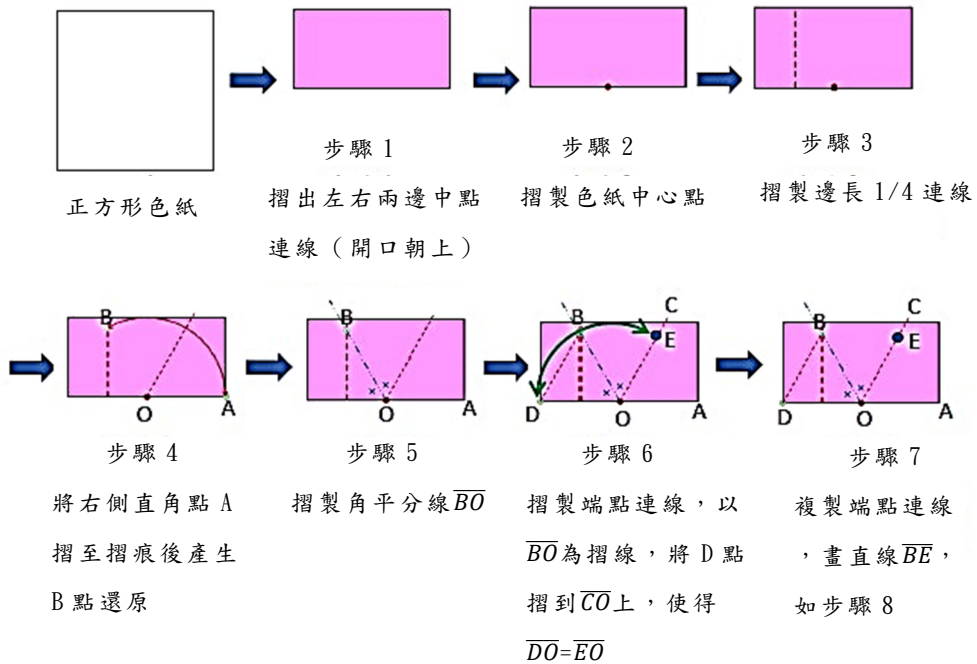


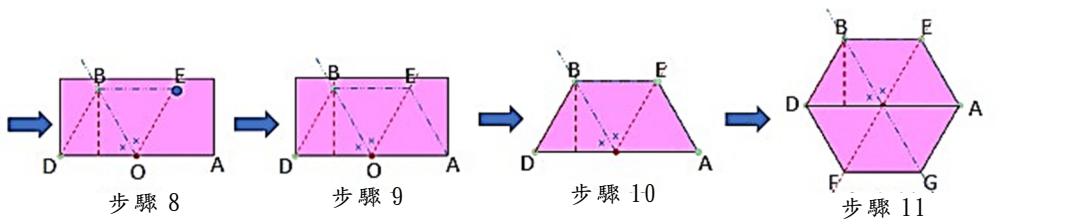
圖六:1 個正 12 邊形繞著 O 點
每旋轉 30 度旋轉一次



圖七: 2020 東京奧運(左)與帕運(右)
Logo 設計背後的框架

活動二之一: $60^{\circ} - 120^{\circ}$ 的小菱形摺剪



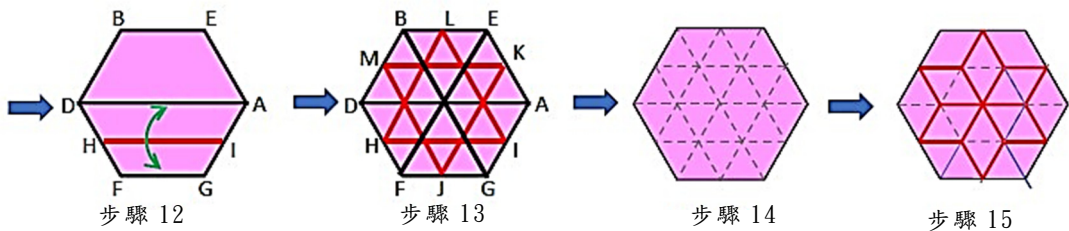


步驟 8
複製端點連線，
畫直線 \overline{BE}

步驟 9
複製端點連線，
畫直線 \overline{AE}

步驟 10
剪去不需要部份

步驟 11
攤開完成正六邊形 AEBDFG

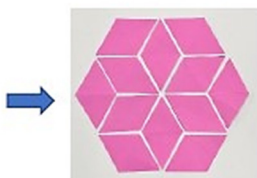


步驟 12
摺製梯形兩腰中點連
線，將 \overline{FG} 摺至 \overline{AD} 上，
產生摺痕 \overline{HI}

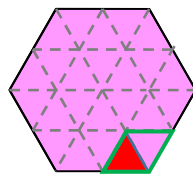
步驟 13
摺製梯形兩腰中點連
線，同樣方法，可以產生
摺痕 \overline{JK} 、 \overline{IL} 、 \overline{KM} 、 \overline{LH} 、 \overline{MJ}

步驟 14
摺製梯形兩腰
中點連線，如步
驟 14 的圖

步驟 15
沿著紅線裁切剛好可
以把正六邊形，分成
12 個小菱形



步驟 16
把正六邊形分
成 12 個小菱形

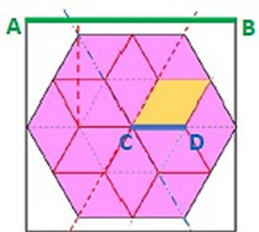


說明：為何小菱形的內角為 $60^\circ - 120^\circ$ ？

因為正六邊形可分成 24 個小正三角形，每一個小菱形皆由兩個小正三角形構成，所以小菱形的內角為 $60^\circ - 120^\circ$

思考題：

觀察一下 $60^\circ - 120^\circ$ 小菱形的邊長 \overline{CD} 與原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 有什麼關聯性？



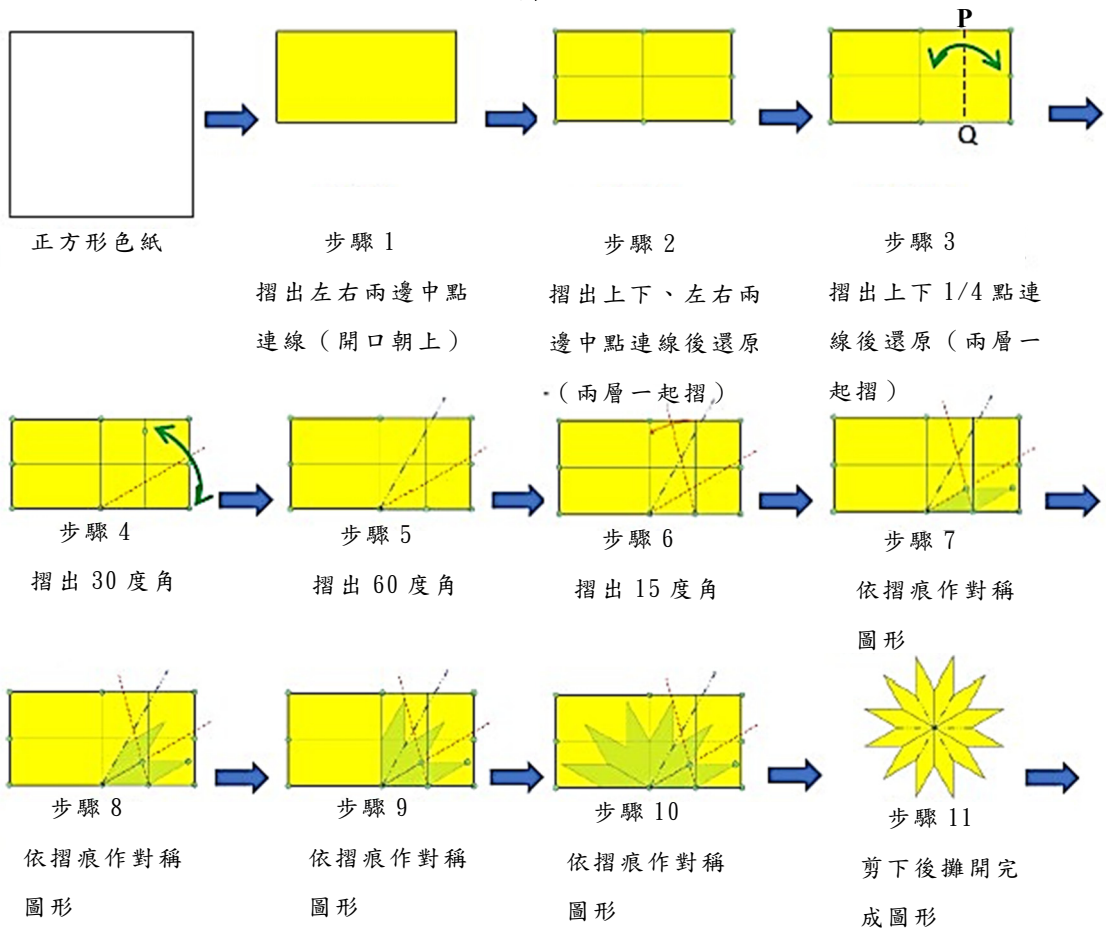
對照原色紙邊長 \overline{AB}

對照原色紙邊長 \overline{AB} ，可觀察出 $60^\circ - 120^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{EF} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB}

答：

$60^\circ - 120^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{CD} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB}

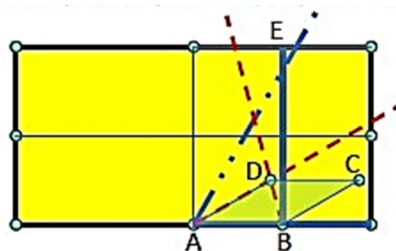
活動二之二：30° - 150°的小菱形摺剪



步驟 12

沿著紅線摺疊可
進行一刀裁切

說明：為何小菱形的內角為 30° - 150° ？



（步驟 12：沿著紅線摺剪可得 12 個小菱形）

由步驟 4 可得 $\angle DAB = 30^\circ$ 且

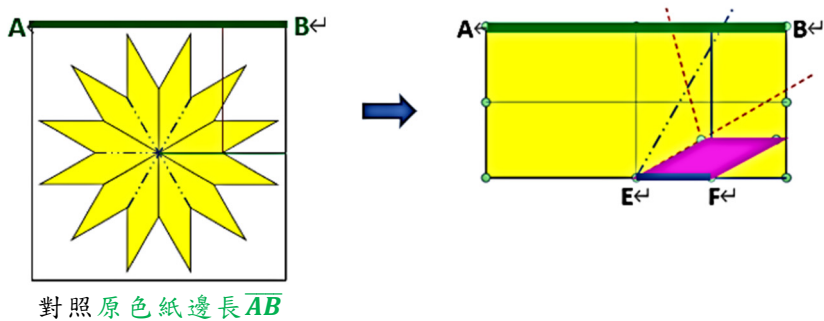
由步驟 6 可得 $\angle EBD = 15^\circ$ ，所以 $\angle ABD = 75^\circ$

因為菱形 ABCD 的對稱軸為 \overline{BD} ，所以 $\angle ABC = 150^\circ$

故菱形 ABCD 的內角為 $30^\circ - 150^\circ$

思考題：

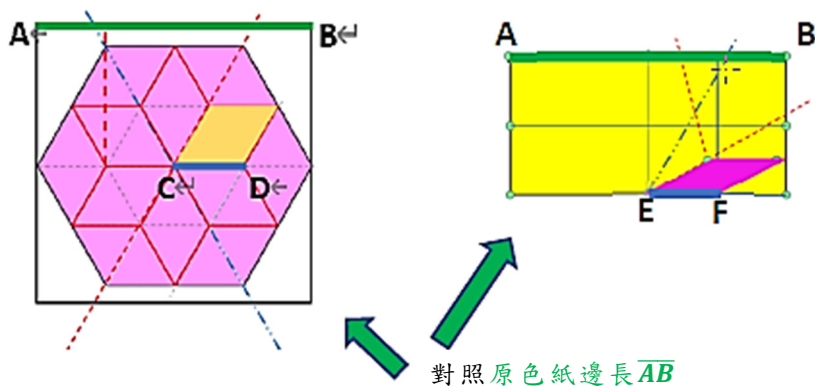
觀察一下 $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形的邊長 \overline{EF} 與原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 有什麼關聯性？



對照原色紙邊長 \overline{AB} ，可觀察出 $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{EF} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB}

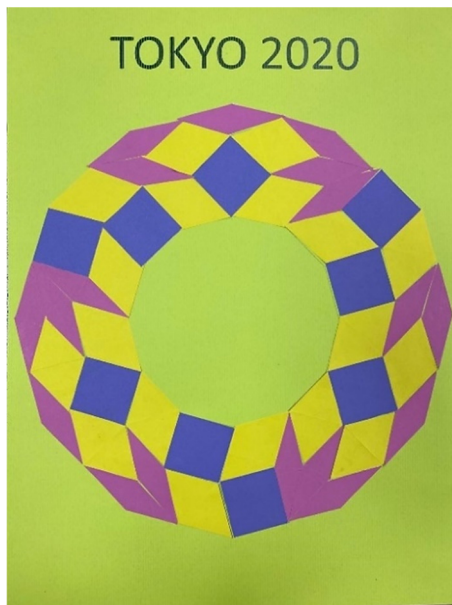
答： $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{EF} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB}

所以由上可以得知，活動二之一的 $60^\circ - 120^\circ$ 邊長 \overline{CD} 與活動二之二的 $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形的邊長 \overline{EF} 皆等於原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 的 $\frac{1}{4}$ (如下圖)。



由圖可以觀察到 $\overline{CD} = \overline{EF} = \frac{1}{4} \overline{AB}$

所以由活動二之一製作的 $60^\circ - 120^\circ$ 小菱形與活動二之二製作的 $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形，另外再準備小正方形，且小正方形的邊長 = $\frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長，就可以拼成「Tokyo 2020」如圖八。



圖八：「Tokyo 2020」

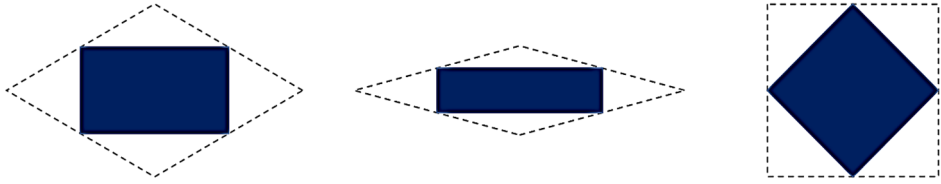
從圖八中可以觀察出「Tokyo 2020」圖形為十二邊形，其中外側十二邊形的邊長=小菱形邊長 $\times 2 = \frac{1}{2}$ 原正方形色紙的邊長，且每一內角為 150° ，所以由此可知「Tokyo 2020」圖形為正十二邊形。

另外，由活動二之一製作的 $60^\circ - 120^\circ$ 小菱形、活動二之二製作的 $30^\circ - 150^\circ$ 小菱形，再加上小正方形，其中小正方形的邊長= $\frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長，一樣也可以拼成很美麗的「TOKYO 2020 PARALYMPIC GAMES」如圖九。



圖九：TOKYO 2020 PARALYMPIC GAMES

完成了圖八與圖九之後，如果更進一步想完成圖二的組市松紋設計該如何做呢?只要將每一個菱形和正方形的四個頂點摺向中心就可以得到長方形，如圖十。



圖十

思考題：

如果圖十中的白色的菱形與正方形邊長均為 1，則三種藍色矩形的面積比為何?

答： $\sqrt{3}:1:2$ （與原菱形的面積比相同，有興趣的讀者不妨想想原因為何？）

活動三:利用菱形製作「伊斯蘭窗花」

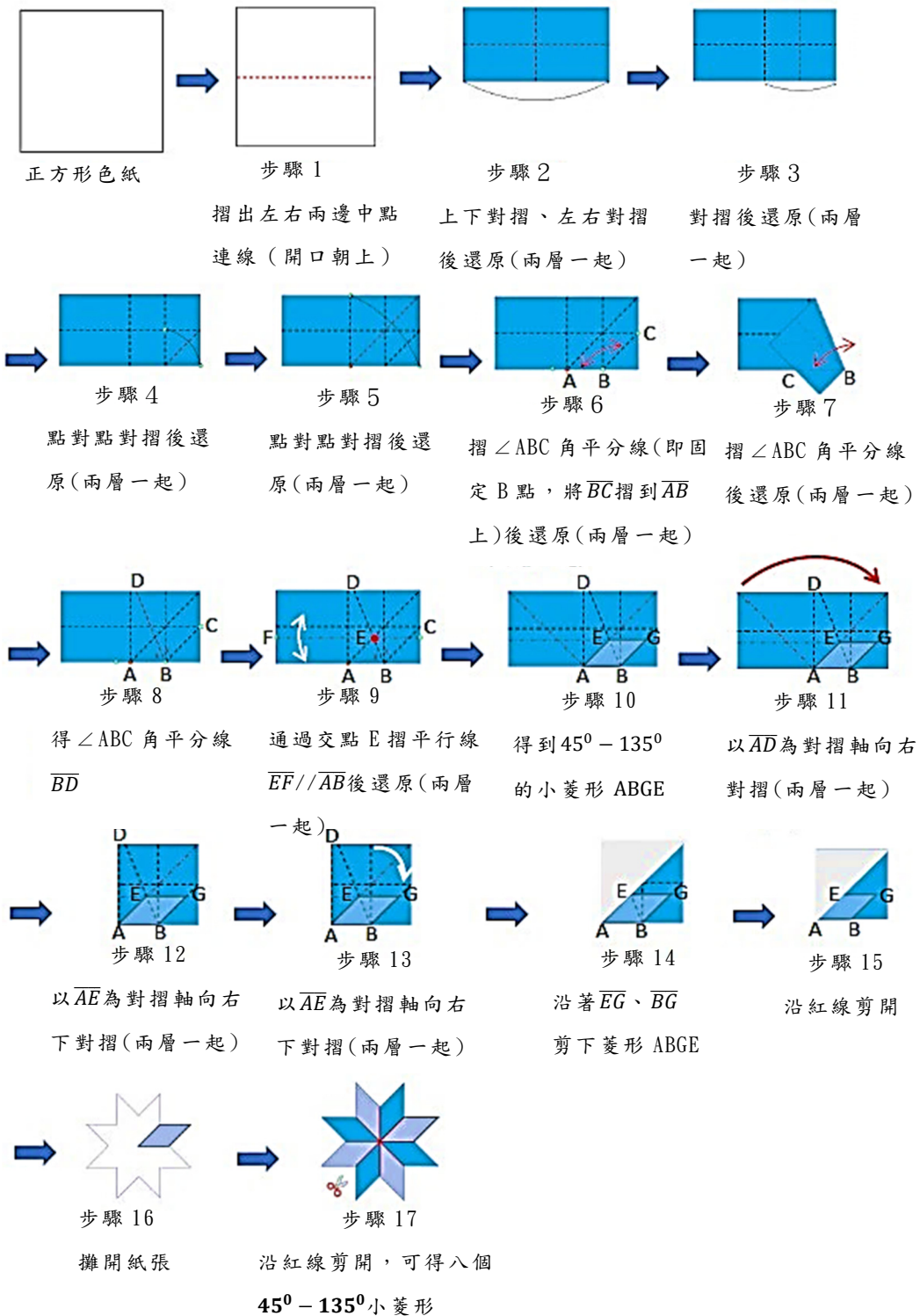
「伊斯蘭窗花」中常見的菱形，可不是隨意的圖形，是透過 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形與相同邊長小正方形所構成的。 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形的對角線比例是 $1:(1+\sqrt{2})$ ，稱為白銀比例。[3] 且不難發現圖十一中的「伊斯蘭窗花」為正八邊形。

為了製作「伊斯蘭窗花」我們需要 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形，讓我們跟著活動三之一的步驟來製作 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形。



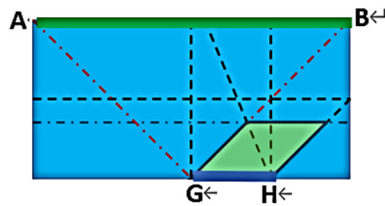
圖十一:伊斯蘭窗花

活動三之一： $45^{\circ} - 135^{\circ}$ 的小菱形摺剪



思考題：

觀察一下 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形的邊長 \overline{GH} 與原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 有什麼關聯性？

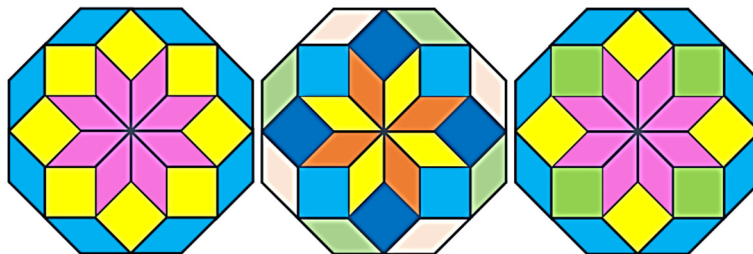


對照原色紙邊長 \overline{AB}

對照原色紙邊長 \overline{AB} ，可觀察出 $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{EF} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 。

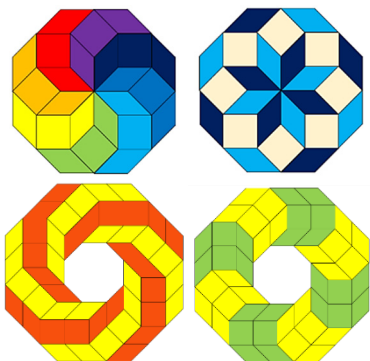
答： $45^\circ - 135^\circ$ 小菱形的邊長 $\overline{GH} = \frac{1}{4}$ 原正方形色紙的邊長 \overline{AB} 。

可以不同顏色的菱形進行拼貼如下圖：

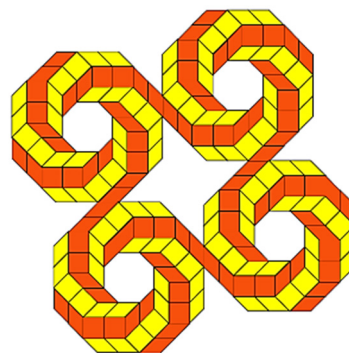


活動四：「創意菱形拼貼」

透過活動二與活動三的菱形拼貼，可以讓作品有立體感，不妨跟著我們一起來動手體驗摺剪菱形，做出屬於自己的「幾何花拼圖」。



圖十二：是平面？還是立體？



圖十三：莫斯烏比環系列

創意發想:利用菱形製作「團團圓圓」

是否曾想過有稜角的圖形排列後竟能妝點出圓仔花圓潤的感覺？想一想圖十四中每一顆柿子所需要的菱形種類有哪些？聰明眼尖的讀者是否也發現到此文章內有尚未介紹到的菱形種類呢？不妨觀察圖十四看看少了哪一種類的菱形？而文章內未介紹的菱形又該如何摺剪呢？



圖十四：團團圓圓[4]

致謝：

本文的完成特別感謝師大附中彭良禎老師、居仁國中游曉琦老師協助修正與提供寶貴意見。

參考資料：

[1] 「三階菱」家紋參考維基百科

https://zh.wikipedia.org/wiki/File:Japanese_crest_Sanngai_Hisi_ni_itutu_Kuginuki.svg

[2] 圖二圖三取自維基百科

[3] 【數感動手做——伊斯蘭窗花】

<https://www.facebook.com/numeracylab/videos/1168176319870059/>

[4] Barbara Sbrega 的臉書，2021.07.15 臉書中 Una-primavera-di-rombi-def.的貼文。