外心三角形與垂心三角形的面積關係

連威翔

壹、前言

在高中數學學科電子報 143 期《一對奇特的比例式：由外心面積比逆求三角形邊長比》一文[1]中，作者陳建燁老師先證明了底下的結果：

公式 1：設 O 為銳角 ΔABC 的外心，且 $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$，則

$$\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=a^2(b^2+c^2-a^2):b^2(c^2+a^2-b^2):c^2(a^2+b^2-c^2). \qquad (1)$$

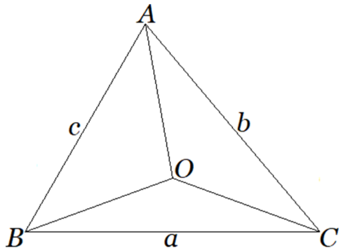

圖 1

接著，陳老師利用上述公式證明「由外心面積比逆求三角形邊長比」公式，此即[1]文標題的由來。

此外，在高中數學學科電子報 148 期《由垂心面積比逆求三角形邊長比》一文[2]中，陳建燁老師介紹了另一個與上述公式 1 類似的結果，並將其稱為「垂心面積比的邊長公式」，如下：

公式 2：設 H 為銳角 ΔABC 的垂心，且 $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$，則

$$\begin{aligned}&\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB\\&=(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4):(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4):(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4).\end{aligned} \qquad (2)$$

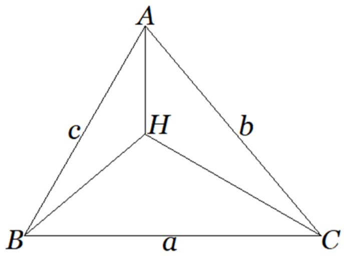

圖 2

若按照公式 2 的命名方式，則公式 1 可稱為「外心面積比的邊長公式」。

如同圖 1 與圖 2，當我們將一銳角 ΔABC 的外心 O 及垂心 H 與三頂點連線後，可得 $\Delta OBC,\Delta OCA,\Delta OAB$ 與 $\Delta HBC,\Delta HCA,\Delta HAB$ 這兩組三角形，不妨將這兩組三角形分

別稱為 ΔABC 的「外心三角形」與「垂心三角形」。

注意(1), (2)兩式分別以 ΔABC 的三邊長 a, b, c 表示出兩組三角形的面積比，我們可以問，是否能進一步以 a, b, c 寫出(1), (2)兩式中六個三角形的面積表達式呢？答案是肯定的。除此之外，筆者還發現這兩組三角形的面積彼此之間的關聯性。底下第二節中，筆者將介紹自己的發現供讀者參考。

貳、兩組三角形面積的表達式與關聯性

首先觀察圖 1，並利用(1)式假設 ΔABC 的「外心三角形」面積如下：

$$\Delta OBC = a^2(b^2+c^2-a^2)T, \tag{3}$$

$$\Delta OCA = b^2(c^2+a^2-b^2)T, \tag{4}$$

$$\Delta OAB = c^2(a^2+b^2-c^2)T, \tag{5}$$

其中 T 為正數。不難證明銳角 ΔABC 的外心 O 都落在三角形的內部，如圖 1，因此以上述三式配合海龍面積公式，可寫下 $\Delta OBC, \Delta OCA, \Delta OAB$ 的面積和等於 ΔABC 面積之關係式如下：

$$\begin{aligned} &[a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)]T \\ &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}, \end{aligned} \tag{6}$$

其中 s 為 ΔABC 的半周長。觀察(6)式的頭尾，可分別計算出

$$\begin{aligned} &a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2) \\ &= 2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4 \end{aligned} \tag{7}$$

以及

$$\begin{aligned} &\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} \\ &= \sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]} \\ &= \sqrt{[2ab+(a^2+b^2-c^2)][2ab-(a^2+b^2-c^2)]} \\ &= \sqrt{(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2} \\ &= \sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}. \end{aligned} \tag{8}$$

注意(7), (8)兩式最後的計算結果只差了一個根號，因此將(7), (8)兩式的結果代入(6)式後，可解得

$$T = \frac{1}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

將上式代回(3), (4), (5)三式，即得 $\Delta OBC, \Delta OCA, \Delta OAB$ 的面積表達式如下：

$$\Delta OBC=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}, \tag{9}$$

$$\Delta OCA=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}, \tag{10}$$

$$\Delta OAB=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}. \tag{11}$$

接著觀察圖 2，並利用(2)式假設 ΔABC 的「垂心三角形」面積如下：

$$\Delta HBC=(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)U, \tag{12}$$

$$\Delta HCA=(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)U, \tag{13}$$

$$\Delta HAB=(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)U, \tag{14}$$

其中 U 為正數。不難證明銳角 ΔABC 的垂心 H 都落在三角形的內部，如圖 2，因此以上述三式配合海龍面積公式，可寫下 $\Delta HBC,\Delta HCA,\Delta HAB$ 的面積和等於 ΔABC 面積之關係式如下：

$$\begin{aligned}&[(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)+(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)+(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)]U\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}\\ &=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)},\end{aligned} \tag{15}$$

其中 s 為 ΔABC 的半周長。觀察(15)式最左邊的式子，我們可計算出

$$\begin{aligned}&(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)+(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)+(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)\\ &=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4,\end{aligned} \tag{16}$$

而(15)式最右邊式子的計算結果可參考(8)式。注意(16),(8)兩式計算到最後的結果只差了一個根號，因此將(16),(8)兩式的結果代入(15)式後，可解得

$$U=\frac{1}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}.$$

將上式代回(12),(13),(14)三式，即得 $\Delta HBC,\Delta HCA,\Delta HAB$ 的面積表達式如下：

$$\Delta HBC=\frac{a^4-b^4+2b^2c^2-c^4}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}, \tag{17}$$

$$\Delta HCA=\frac{b^4-c^4+2c^2a^2-a^4}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}, \tag{18}$$

$$\Delta HAB=\frac{c^4-a^4+2a^2b^2-b^4}{4\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}}. \tag{19}$$

完成上述工作後，筆者發現(9),(10),(11)三式與(17),(18),(19)三式中的六個面積值彼此間存在著某種關係。在開始介紹此關係之前，我們先回顧(6),(8)兩式的計算結果，可知

$$4\cdot\Delta ABC=4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-b)}=\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}$$
$$=\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4}.$$

注意於(9),(10),(11),(17),(18),(19)六式中分式的分母處，都出現了上式最後的式子，因此若將 ΔABC 的面積簡記為 Δ，則我們可利用上式將(9),(10),(11)三式改寫如下：

$$\Delta OBC=\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)}{16\Delta}=\frac{2a^2(b^2+c^2-a^2)}{32\Delta},$$

$$\Delta OCA=\frac{b^2(c^2+a^2-b^2)}{16\Delta}=\frac{2b^2(c^2+a^2-b^2)}{32\Delta},$$

$$\Delta OAB=\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)}{16\Delta}=\frac{2c^2(a^2+b^2-c^2)}{32\Delta}.$$

接著，我們令 X,Y,Z 三數如下：

$$X=b^2+c^2-a^2,\qquad Y=c^2+a^2-b^2,\qquad Z=a^2+b^2-c^2.$$

因為 ΔABC 是銳角三角形，可知

$$X=b^2+c^2-a^2=2ca\cos A>0,$$
$$Y=c^2+a^2-b^2=2ca\cos B>0,$$
$$Z=a^2+b^2-c^2=2ab\cos C>0,$$

即 X,Y,Z 三數均正。利用 X,Y,Z 三數，可將於上方寫出的 $\Delta OBC,\Delta OCA,\Delta OAB$ 面積表達式依序改寫為

$$\Delta OBC=\frac{[(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)](b^2+c^2-a^2)}{32\Delta}=\frac{ZX+XY}{32\Delta},\tag{20}$$

$$\Delta OCA=\frac{[(a^2+b^2-c^2)+(b^2+c^2-a^2)](c^2+a^2-b^2)}{32\Delta}=\frac{XY+YZ}{32\Delta},\tag{21}$$

$$\Delta OAB=\frac{[(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)](a^2+b^2-c^2)}{32\Delta}=\frac{YZ+ZX}{32\Delta}.\tag{22}$$

另一方面，利用平方差公式，及面積 Δ 與 X,Y,Z 三數，我們也可將(17),(18),(19)三式改寫為

$$\Delta HBC=\frac{a^4-(b^2-c^2)^2}{16\Delta}=\frac{(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{16\Delta}=\frac{YZ}{16\Delta},\tag{23}$$

$$\Delta HCA=\frac{b^4-(c^2-a^2)^2}{16\Delta}=\frac{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)}{16\Delta}=\frac{ZX}{16\Delta}, \tag{24}$$

$$\Delta HAB=\frac{c^4-(a^2-b^2)^2}{16\Delta}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{16\Delta}=\frac{XY}{16\Delta}. \tag{25}$$

觀察(20),(21),(22),(23),(24),(25)六式的關係後，我們會發現只要計算$\frac{1}{2}[(24)+(25)]$、$\frac{1}{2}[(25)+(23)]$與$\frac{1}{2}[(23)+(24)]$，即可分別得到

$$\frac{1}{2}(\Delta HCA+\Delta HAB)=\frac{ZX+XY}{32\Delta}=\Delta OBC, \tag{26}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta HAB+\Delta HBC)=\frac{XY+YZ}{32\Delta}=\Delta OCA, \tag{27}$$

$$\frac{1}{2}(\Delta HBC+\Delta HCA)=\frac{YZ+ZX}{32\Delta}=\Delta OAB. \tag{28}$$

上述三式就告訴我們外心三角形與垂心三角形彼此之間的面積關係，此即本文標題的由來。此時，若將$\Delta OBC,\Delta OCA,\Delta OAB$與$\Delta HBC,\Delta HCA,\Delta HAB$的面積分別簡記為$p,q,r$與$P,Q,R$，則上述(26),(27),(28)三式的面積關係可改寫成

$$p=\frac{1}{2}(Q+R), \tag{29}$$

$$q=\frac{1}{2}(R+P), \tag{30}$$

$$r=\frac{1}{2}(P+Q). \tag{31}$$

有了(29),(30),(31)三式之後，我們剛好可以看看[1],[2]兩參考文獻的作者<u>陳建燁</u>老師所證明的兩個有趣結果。若以$a=\overline{BC},b=\overline{CA},c=\overline{AB}$表示$\Delta ABC$的三邊長，則陳老師在[1]文中證明了底下的結果：

公式 3：若 O 為銳角 ΔABC 的外心，且 $\Delta OBC:\Delta OCA:\Delta OAB=p:q:r$，則

$$a:b:c=\sqrt{p(q+r-p)}:\sqrt{q(r+p-q)}:\sqrt{r(p+q-r)}. \tag{32}$$

而在[2]文中，陳老師則另外證明了底下的結果：

公式 4：若 H 為銳角 ΔABC 的外心，且 $\Delta HBC:\Delta HCA:\Delta HAB=P:Q:R$，則

$$a:b:c=\sqrt{P(Q+R)}:\sqrt{Q(R+P)}:\sqrt{R(P+Q)}. \tag{33}$$

注意在[2]文中，陳老師將(33)式稱為「垂心面積比逆求邊長比公式」，按照此命名方式，則(32)式可稱為「外心面積比逆求邊長比公式」。請讀者注意，在(29)式上方$\Delta OBC,\Delta OCA,\Delta OAB,\Delta HBC,\Delta HCA,\Delta HAB$面積依序為$p,q,r,P,Q,R$的條件下，公式 3

與公式 4 依然成立。

筆者發現，其實上面的(29), (30), (31)三式可扮演公式 3 與公式 4 之間的橋梁。怎麼說呢？首先，透過[1]文中陳老師的研究成果，我們知道公式 3 的(32)式成立，此時若將(29), (30), (31)三式代入(32)式，可得

$$a{:}b{:}c=\sqrt{p(q+r-p)}{:}\sqrt{q(r+p-q)}{:}\sqrt{r(p+q-r)}=\sqrt{\frac{1}{2}(Q+R)P}{:}\sqrt{\frac{1}{2}(R+P)Q}{:}\sqrt{\frac{1}{2}(P+Q)R}$$
$$=\sqrt{P(Q+R)}{:}\sqrt{Q(R+P)}{:}\sqrt{R(P+Q)},$$

因此(33)式成立。另一方面，計算 $(30)+(31)-(29)$、$(31)+(29)-(30)$與 $(29)+(30)-(31)$之後，分別可得

$$P=q+r-p, \tag{34}$$
$$Q=r+p-q, \tag{35}$$
$$R=p+q-r. \tag{36}$$

只要將上述三式代入(33)式，即可證得

$$a{:}b{:}c=\sqrt{P(Q+R)}{:}\sqrt{Q(R+P)}{:}\sqrt{R(P+Q)}=\sqrt{2p(q+r-p)}{:}\sqrt{2q(r+p-q)}{:}\sqrt{2r(p+q-r)}$$
$$=\sqrt{p(q+r-p)}{:}\sqrt{q(r+p-q)}{:}\sqrt{r(p+q-r)}.$$

因此(32)式成立。

透過上述討論，我們就知道了(29), (30), (31)三式在公式 3 與公式 4 之間所扮演的角色。注意在[2]文前言的最後一段，作者表明其文章的寫作目的在於揭示公式 3 與公式 4 兩者「內在的共通性」，而當我們有了(29), (30), (31)三式之後，應可更容易看出作者所說的「內在的共通性」究竟為何。

本節最後，若回顧本節前半的討論過程，可發現其中我們共使用了兩次海龍面積公式，在該公式的根號內是底下的對稱式：

$$(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

有趣的是，在討論過程中我們也發現上式可改寫為底下的幾種不同形式：

$$\begin{aligned}
&(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\\
&=a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2)\\
&=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4\\
&=(a^4-b^4+2b^2c^2-c^4)+(b^4-c^4+2c^2a^2-a^4)+(c^4-a^4+2a^2b^2-b^4)\\
&=(a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)+(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)\\
&\quad+(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2-a^2).
\end{aligned}$$

不妨就以上式為本節的討論作結，以上就是筆者所要分享的內容。

參、結語

本文利用[1],[2]兩文的結果，以銳角 ΔABC 三邊長 a,b,c 表示出其「外心三角形」與「垂心三角形」的面積，並從中發現這兩組三角形面積彼此之間的關聯性，即(26),(27),(28)這三個比例式。

在第二節後半，我們將(26),(27),(28)三式簡記為(29),(30),(31)三式後，再配合公式 3的(32)式證明了公式 4的(33)式，而(33)式剛好也是[2]文的主要結果。讀者若有興趣，不妨比較本文與[2]文對(33)式之證明方式的異同，並思考看看是否有其他的證明方式。

本文最後，筆者要特別感謝本文前三個參考文獻的作者陳建燁老師。此外，筆者也要感謝審稿人提供了本文後四個參考文供筆者參考。

參考資料:

陳建燁。一對奇特的比例式：由外心面積比逆求三角形邊長比。高中數學學科電子報 143 期，2019 年 2 月。
陳建燁。由垂心面積比逆求三角形邊長比。高中數學學科電子報 148 期，2019 年 7 月。
陳建燁。「一道面積比公式的另證」的回響：用三角形的 A.S.A.面積公式。 數學傳播季刊，43(1)，74-79，2019
C. Kimberling,(1998).”Triangle Centers and Central Triangles”. Congress Numerantium (129): i-xxv, 1-295
J. R. Smart (1998), Modern Geometries (5th ed.), Brooks/Cole, ISBN 0-534-35188-3
S. Kiss, (2006). “The Orthic-of-Intouch and Intouch-of-Orthic Triangles”. Forum Geometricorum (6): 171-177
R.A. Johnson (2007) [1960], Advanced Euclidean Geometry, Dover, ISBN 978-0-486-46237-0