尋找出含有組合數的級數和：

$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^u$ ＝？

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

型如 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^u$ 這類含有組合數的級數和，其真確數值攸關正整數 u 與 J 兩者間的相互大小關係；即 $u<J$, $u=J$, $u>J$ ，三種不同條件情形就會造成完全相異的各型數值結果！一般而言，都僅計算出 $u<J$, $u=J$ 兩種規律化情形。至於 $u>J$ 條件情況卻較趨變化不規則，需要從 $u=(J+v)$ ，v=1,2,3,4, ⋯等一一對 $f^{(J+v)}(x)$ 作個別獨自運算，始能透過分析整理獲得數值。

審慎地在逐步運算求取 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^u$ 的級數和數值時，意外中竟撞見了組合數的第 2 類史特林數 (Stirling number of the 2nd kind) 蹤影，這些數列巧妙藏身於所選特定函數的各次導函數裡的有序項式中。主文將會靈活有條理、順勢地引導出如何配型成新多項函數進而尋獲第 2 類史特林數的另類思維。

貳、本文

一、 在主文推演過程中需應用到下列數學相關性質-----引理，以承續推理內容；

引理 1：從 J 個彼此完全不同的物件中隨機抽取出 i 個物件來作一直線排列，其相異排列法為 P_i^J ，而其完整運算式為

$$P_i^J = \frac{J\,!}{(J-i)\,!} \qquad \text{(L1)}$$

[證明]：略。

引理 2： 從 J 個彼此完全不同的物件中隨機選取出 r 個物件的相異組合數為 C_r^J ，而其完整運算式為

$$C_r^J = \frac{J\,!}{(r\,!)\cdot(J-r)\,!} \qquad \text{(L2)}$$

[證明]：略。

引理 3： 二項式展開式 $(x-y)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m \cdot x^{m-r} y^r$ (1)

[證明]：略。

二、 自標題 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^u$ 這類含有組合數的級數和探討起，逐批分別就 $u=m<J$, $u=J$, $u>J$ ，三種不同條件情形作推理導證出其真確數值：

[A]. 求證： **(i)** $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^m = 0$ (2)

$0 \le u = m < J$ ，$t \in R$ （R 為實數集合)，$J, m \in N$ （N 為自然數集合), r 為整數。

(ii) $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^J = J!$ ，$u=J$，$t \in R$ ，$J \in N$ ，r 為整數 (3)

[證明(2)式與(3)式]： 考量查驗含自然底數 e 的冪函數 $f(x) = e^{tx}(e^x-1)^J$ (4)

此處 x 為自變實數，$t \in R$ ，$J \in N$ 。

對(4)式應用二項式展開式，再化簡，得 $f(x) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot e^{(J+t-r)x}$ (5)

(a). 對一個比 J 小的整數 m 且 $m \ge 0$，
則令(5)式 $f(x)$ 的第 m 次導函數是 $f^{(m)}(x)$ ，並且得到

$$f^{(m)}(x) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^m \cdot e^{(J+t-r)x} \quad (5.1)$$

對(5.1)式取 $x=0$，得 $f^{(m)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^m$ (5.2)

(b). 再令 (5)式 $f(x)$ 的第 J 次導函數是 $f^{(J)}(x)$，作 J 次導函數運算得

$$f^{(J)}(x) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^J \cdot e^{(J+t-r)x} \quad (5.3)$$

對(5.3)式取 $x=0$，得 $f^{(J)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^J$ (5.4)

(c). 令 (4)式 $f(x)$ 的第 m 次導函數是 $f^{(m)}(x)$ ，並且取 $m = 1,2,3,\cdots,m,\cdots,J-1$,
J 等依次對 (4)式 $f(x)$ 作導函數運算，分別得到下列各階導函數式；

$$f'(x) = t \cdot e^{tx}(e^x-1)^J + J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}$$

$f''(x)=t^2\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+(2t+1)\cdot J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+J(J-1)\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}$

$f'''(x)=t^3\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+(3t^2+3t+1)\cdot J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+(3t+3)\cdot J(J-1)\cdot$
$e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+J(J-1)(J-2)\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}$

$f^{(4)}(x)=t^4\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+(4t^3+6t^2+4t+1)\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+(6t^2+12t+7)\cdot$
$P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+(4t+6)\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+1\cdot P_4^J\cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}$

$=S_1^{(4)}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+S_2^{(4)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+S_3^{(4)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+$
$S_4^{(4)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+S_5^{(4)}\cdot P_4^J\cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}$

此處之 P_i^J 為排列記號數： $P_i^J=\dfrac{J\,!}{(J-i)\,!}=J(J-1)(J-2)\cdots(J-i+1)$ 。

$f^{(5)}(x)=(t^4\cdot t)\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+[t^4+(4t^3+6t^2+4t+1)(t+1)]\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+$
$[(4t^3+6t^2+4t+1)+(6t^2+12t+7)(t+2)]\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+$
$[(6t^2+12t+7)+(4t+6)(t+3)]\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+$
$[(4t+6)+1\cdot(t+4)]\cdot P_4^J\cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}+[\,1+0\cdot(t+5)]\cdot P_5^J\cdot e^{(t+5)x}(e^x-1)^{J-5}$

$=[S_1^{(4)}\cdot t]\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+[S_1^{(4)}+S_2^{(4)}\cdot(t+1)]\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+$
$[S_2^{(4)}+S_3^{(4)}\cdot(t+2)]\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+[S_3^{(4)}+S_4^{(4)}\cdot(t+3)]\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}\cdot$
$(e^x-1)^{J-3}+[S_4^{(4)}+S_5^{(4)}\cdot(t+4)]\cdot P_4^J\cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}+[S_5^{(4)}+S_6^{(4)}\cdot(t+5)]\cdot$
$P_5^J\cdot e^{(t+5)x}(e^x-1)^{J-5}$

$=S_1^{(5)}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+S_2^{(5)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+S_3^{(5)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+$
$S_4^{(5)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+S_5^{(5)}\cdot P_4^J\cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}+S_6^{(5)}\cdot P_5^J\cdot e^{(t+5)x}(e^x-1)^{J-5}$

此處符號 $S_i^{(4)}=S_i^{(4)}(t)$ ， $i=1,2,3,4,5$ ，表示對 $f(x)$ 作第 4 次導函數計算後所依序得出各項的第 1 個係數值，都是 t 的多項式，可對照上述內容而得到對應 $S_i^{(4)}$ 的各多項式內涵， $S_1^{(4)}=t^4$ ， $S_2^{(4)}=(t+1)^4-t^4$ ， $S_4^{(4)}=\sum_{i=1}^{4}(t+i-1)$ ， $S_5^{(4)}=1$ ， $S_6^{(4)}=0$。同理，符號 $S_i^{(5)}=S_i^{(5)}(t)$ ， $i=1,2,3,4,5,6$ ，亦有如此對應數值型式。

繼續以數學歸納法作推演證明，流程如下： ⋯⋯，所以接下來要再 令作第 m 次導函數運算所得出下列 (5.5)式的 $f^{(m)}(x)$ 代表式正確成立；

$$f^{(m)}(x)=t^m\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+S_2^{(m)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+S_3^{(m)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}$$

$$+S_4^{(m)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+\cdots+S_i^{(m)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}+\cdots+S_{m-2}^{(m)}\cdot P_{m-3}^J\cdot e^{(t+m-3)x}(e^x-1)^{J-(m-3)}+S_{m-1}^{(m)}\cdot P_{m-2}^J\cdot e^{(t+m-2)x}(e^x-1)^{J-(m-2)}+$$

$$S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^J\cdot e^{(t+m-1)x}(e^x-1)^{J-(m-1)}+S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^J\cdot e^{(t+m)x}(e^x-1)^{J-m}\quad,\quad J>m\ge 0 \tag{5.5}$$

此處之符號 $S_i^{(m)}=S_i^{(m)}(t)$ ， $i=1,2,3,\cdots,m,m+1$ ，表示對 $f(x)$ 作第 m 次導函數計算後所依序得出各項的第 1 個係數值，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(m)}=t^m$ 且 $S_{m+1}^{(m)}=1$ ，$S_2^{(m)}=(t+1)^m-t^m$ ， $S_{m+2}^{(m)}=0$ ， $S_m^{(m)}=\sum_{i=1}^{m}(t+i-1)$ 。

再運算得 $f^{(m+1)}(x)=t^{m+1}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+[t^m+(t+1)\cdot S_2^{(m)}]\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}$

$$+[S_2^{(m)}+(t+2)\cdot S_3^{(m)}]\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+[S_3^{(m)}+(t+3)\cdot S_4^{(m)}]\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}\cdot(e^x-1)^{J-3}+\cdots\cdots+[S_i^{(m)}+(t+i)\cdot S_{i+1}^{(m)}]\cdot P_i^J\cdot e^{(t+i)x}(e^x-1)^{J-i}+\cdots\cdots+$$

$$[S_{m-2}^{(m)}+(t+m-2)\cdot S_{m-1}^{(m)}]\cdot P_{m-2}^J\cdot e^{(t+m-2)x}(e^x-1)^{J-(m-2)}+[S_{m-1}^{(m)}+(t+m-1)\cdot S_m^{(m)}]\cdot P_{m-1}^J\cdot e^{(t+m-1)x}(e^x-1)^{J-(m-1)}+[S_m^{(m)}+(t+m)\cdot S_{m+1}^{(m)}]\cdot P_m^J\cdot e^{(t+m)x}(e^x-1)^{J-m}+$$

$$[S_{m+1}^{(m)}+(t+m+1)\cdot 0]\cdot P_{m+1}^J\cdot e^{(t+m+1)x}(e^x-1)^{J-(m+1)}$$

$$=S_1^{(m+1)}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+S_2^{(m+1)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+S_3^{(m+1)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}$$

$$+S_4^{(m+1)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+\cdots\cdots+S_i^{(m+1)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}+$$

$$S_{i+1}^{(m+1)}\cdot P_i^J\cdot e^{(t+i)x}(e^x-1)^{J-i}+\cdots\cdots+S_{m-2}^{(m+1)}\cdot P_{m-3}^J\cdot e^{(t+m-3)x}(e^x-1)^{J-(m-3)}+$$

$$S_{m-1}^{(m+1)}\cdot P_{m-2}^J\cdot e^{(t+m-2)x}(e^x-1)^{J-(m-2)}+S_m^{(m+1)}\cdot P_{m-1}^J\cdot e^{(t+m-1)x}(e^x-1)^{J-(m-1)}+$$

$$S_{m+1}^{(m+1)}\cdot P_m^J\cdot e^{(t+m)x}(e^x-1)^{J-m}+S_{m+2}^{(m+1)}\cdot P_{m+1}^J\cdot e^{(t+m+1)x}(e^x-1)^{J-(m+1)} \tag{5.6}$$

此式中的 $S_i^{(m+1)} = S_i^{(m+1)}(t)$ ， $i = 1,2,3,\cdots,m\,,m+1\,,m+2$ ， $S_i^{(m+1)}$ 都是 t 的多項式，而 $S_1^{(m+1)} = t^{m+1}$ 且 $S_2^{(m+1)} = (t+1)^{m+1} - t^{m+1}$ ， $S_{m+2}^{(m+1)} = 1$ ， $S_{m+1}^{(m+1)} = \sum_{i=1}^{m+1}(t+i-1)$ ， $S_{m+3}^{(m+1)} = 0$ ， $J > m+1 \geq 1$ 。對照(5.5)式與(5.6)式，兩者具有完全相同的型態組織結構，所以對 m =1,2,3, $\cdots$, m 正整數其(5.5)式必然正確成立。上述也是先對 $f^{(m+1)}(x)$ 導函數運算後再作配型成各新多項式的思維操作詳細演算過程。

再比對(5.6)式 $f^{(m+1)}(x)$ 的上述這兩式，可得： $S_i^{(m)} + (t+i)\cdot S_{i+1}^{(m)} = S_{i+1}^{(m+1)}$ ，此為第 m 次導函數所得的 $S_i^{(m)}$ 、 $S_{i+1}^{(m)}$ 係數與第 $m+1$ 次導函數所得的 $S_{i+1}^{(m+1)}$ 係數值之間的相連結遞推關係，而此 $S_{i+1}^{(m+1)}$ 係數後必須乘上 $P_i^J \cdot e^{(t+i\,)x}(\,e^x - 1\,)^{J-i}$ 即得出第 $m+1$ 次導函數中完整的第 $i+1$ 項表示式正確內容。

(d). 持續對 $f(x)$ 作第 $m+2$ 次、 $m+3$ 次、$\cdots$、直到作第 J 次導函數運算，得下式；

$$f^{(J)}(x) = t^J \cdot e^{t\,x}(\,e^x - 1\,)^J \;+ S_2^{(J)}\cdot P_1^J \cdot e^{(t+1)x}(\,e^x - 1\,)^{J-1} \;+ S_3^{(J)}\cdot P_2^J \cdot e^{(t+2)x}(\,e^x - 1\,)^{J-2}$$
$$+ S_4^{(J)}\cdot P_3^J \cdot e^{(t+3)x}(\,e^x - 1\,)^{J-3} \;+\; \cdots \;+ S_i^{(J)}\cdot P_{i-1}^J \cdot e^{(t+i-1)x}(\,e^x - 1\,)^{J-(i-1\,)} + \;\cdots\; +$$
$$S_{J-2}^{(J)}\cdot P_{J-3}^J \cdot e^{(t+J-3)x}(\,e^x - 1\,)^3 \;+ S_{J-1}^{(J)}\cdot P_{J-2}^J \cdot e^{(t+J-2)x}(\,e^x - 1\,)^2 \;+$$
$$S_J^{(J)}\cdot P_{J-1}^J \cdot e^{(t+J-1)x}(\,e^x - 1\,) + \; S_{J+1}^{(J)}\cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x} \tag{5.7}$$

此處之符號 $S_i^{(J)} = S_i^{(J)}(t)$ ， $i = 1,2,3,\cdots,J\,,J+1$ ，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(J)} = t^J$ 且 $S_2^{(J)} = (t+1)^J - t^J$ ， $S_{J+1}^{(J)} = 1$ ， $S_J^{(J)} = \sum_{i=1}^{J}(t+i-1)$ ， $S_{J+2}^{(J)} = 0$ 。

(e). 在(c).節裡的(5.5)式 $f^{(m)}(x)$ 展開式中每一項都含有成份 $e^{(t+i-1)x}(\,e^x - 1\,)^{J-(i-1)}$ ， $J > i-1$ ，而每一個多項式 $S_i^{(m)}(t)$ 都只是 t 的非零函數，對此 $f^{(m)}(x)$ 取 $x = 0$ 時，可得其每一項的 $e^{(t+i-1)x}(\,e^x - 1\,)^{J-(i-1)} = 0$ ，因此 $f^{(m)}(0) = 0$ ，再代入 (5.2)式中，即很順利地證明出 (i).的 (2)式恆等式特徵結果；

$$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^m = 0 \qquad ,\; J > m \geq 0 \;,\; t \in R \;,\quad J\,,m \in N \tag{2}$$

至此，(2)式恆等式已得完整驗證。 接著，先來體驗一下 (2)式的幾個示例；

[例 1]. 取 $J=4$，$t=t$(實數)，$m=3$，

則 (2)式 $\Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{4}(-1)^r C_r^4 \cdot (4+t-r)^3 =$

$C_0^4 \cdot (4+t)^3 - C_1^4 \cdot (3+t)^3 + C_2^4 \cdot (2+t)^3 - C_3^4 \cdot (1+t)^3 + C_4^4 \cdot (t)^3$

$= (4+t)^3 - 4\cdot(3+t)^3 + 6\cdot(2+t)^3 - 4\cdot(1+t)^3 + (t)^3$

$= (64+48t+12t^2+t^3) - 4(27+27t+9t^2+t^3)$

$+6(8+12t+6t^2+t^3) - 4(1+3t+3t^2+t^3) + t^3 = 0$

[例 2]. 取 $J=5$，$t=2$，$m=3$，

則 (2)式 $\Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{5}(-1)^r C_r^5 \cdot (5+2-r)^3$

$= C_0^5 \cdot 7^3 - C_1^5 \cdot 6^3 + C_2^5 \cdot 5^3 - C_3^5 \cdot 4^3 + C_4^5 \cdot 3^3 - C_5^5 \cdot 2^3$

=343-1080+1250-640+135-8 = 0

[例 3]. 取 $J=10$，$t=-3$，$m=2$，

則 (2)式 $\Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{10}(-1)^r C_r^{10} \cdot (10-3-r)^2$

$= C_0^{10} \cdot 7^2 - C_1^{10} \cdot 6^2 + C_2^{10} \cdot 5^2 - C_3^{10} \cdot 4^2 + C_4^{10} \cdot 3^2 - C_5^{10} \cdot 2^2 + C_6^{10} \cdot 1^2$

$- C_7^{10} \cdot 0^2 + C_8^{10} \cdot (-1)^2 - C_9^{10} \cdot (-2)^2 + C_{10}^{10} \cdot (-3)^2$

$= 49 - 360 + 1125 - 1920 + 1890 - 1008 + 210 - 0 + 45 - 40 + 9 = 0$

由此(2)式的理論推演與實例檢驗知悉：不論實數 t 的取值多少，只要 J 與 m 的正整數值滿足 $J > m \geq 0$ 條件關係，(2)式恆等式必然正確成立。

(f). 再檢視(d).節裡的 $f^{(J)}(x)$ 展開式中所有各項，除了最末一項 $S_{J+1}^{(J)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x}$ 之外，其餘每一項都含有成份 $e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}$，$J \geq i \geq 1$，且每一個多項式 $S_i^{(J)}(t)$ 都只是 t 的非零函數，對此第 J 次導函數(5.7)式的 $f^{(J)}(x)$ 取 $x=0$ 時，可得其每一項的 $e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)} = 0$，而其最末一項 $S_{J+1}^{(J)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x} = P_J^J = J(J-1)(J-2)\cdots(J-i+1)(J-i)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = J!$，因此 $f^{(J)}(0) = J!$，再代入(5.4)式中，即順利地證明出下列 (L2).的 (3)式恆等式特性結果；

$$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^J = J! \quad , \quad t \in R \quad , \quad J \in N \tag{3}$$

至此，(ii)的 (3)式恆等式又得到完整驗證。同樣來體驗一下 (3)式的幾個示例；

[例 4]. 取 $J=4$，$t=t$(實數)，代入(3)式，則

$$\Rightarrow \quad \sum_{r=0}^{4}(-1)^r C_r^4\cdot(4+t-r)^4=$$

$$C_0^4\cdot(4+t)^4-C_1^4\cdot(3+t)^4+C_2^4\cdot(2+t)^4-C_3^4\cdot(1+t)^4+C_4^4\cdot(t)^4$$

$$=(4+t)^4-4\cdot(3+t)^4+6\cdot(2+t)^4-4\cdot(1+t)^4+(t)^4$$

$$=256+256t+96t^2+16t^3+t^4-4(81+108t+54t^2+12t^3+t^4)$$

$$+6(16+32t+24t^2+8t^3+t^4)-4(1+4t+6t^2+4t^3+t^4)+t^4=24$$

$$=4!$$

[例 5]. 取 $J=5$，$t=-2$，代入(3)式，

則 (3)式 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{5}(-1)^r C_r^5\cdot(5-2-r)^5$

$$=\sum_{r=0}^{5}(-1)^r C_r^5\cdot(3-r)^5$$

$$=C_0^5\cdot 3^5-C_1^5\cdot 2^5+C_2^5\cdot 1^5-C_3^5\cdot 0^5+C_4^5\cdot(-1)^5-C_5^5\cdot(-2)^5$$

$$=243-160+10-0-5+32=285-165=120=5!$$

[例 6]. 取 $J=3$，$t=10$，代入(3)式，

則 (3)式 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{3}(-1)^r C_r^3\cdot(3+10-r)^3$

$$=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r C_r^3\cdot(13-r)^3=C_0^3\cdot 13^3-C_1^3\cdot 12^3+C_2^3\cdot 11^3-C_3^3\cdot 10^3$$

$$=2197-5184+3993-1000=6=3!$$

由此(3)式的理論推演與實例檢驗知悉：不論實數 t 的取值多少，只要 J 的正整數值滿足 $J\geq 1$ 條件關係，(3)式恆等式必然正確成立。

(g). 以矩陣運算式推演出各 $S_i^{(u)}$ 係數值

以矩陣運算型式可簡化並迅速地推求出各次導函數中各 $S_i^{(u)}$ 係數值；

<g1>. 由 $f(x)$ 矩陣運算至 $f'(x)$：　$u=0 \quad\Rightarrow\quad u=1$

由 $f(x)=e^{tx}(e^x-1)^J=S_1^{(0)}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J$，$S_1^{(0)}=1$，$S_2^{(0)}=0$，

$$f'(x)=t\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}$$

$$= S_1^{(1)} e^{tx}(e^x-1)^J + S_2^{(1)} P_1^J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} \quad , \quad S_1^{(1)} = t \quad , \quad S_2^{(1)} = 1 \quad ,$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(0)} & 0 \\ S_1^{(0)}/t & S_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$$

<g2>. 由 $f'(x)$ 矩陣運算至 $f''(x)$ ： $u=1 \Rightarrow u=2$

$$f''(x) = t^2 \cdot e^{tx}(e^x-1)^J + (2t+1)\cdot J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} + J(J-1)\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1/t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(1)} & 0 & 0 \\ S_1^{(1)}/t & S_2^{(1)} & 0 \\ S_2^{(1)}/t & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \end{bmatrix}$$

<g3>. 由 $f''(x)$ 矩陣運算至 $f'''(x)$ ： $u=2 \Rightarrow u=3$

$$f'''(x) = t^3 \cdot e^{tx}(e^x-1)^J + (3t^2+3t+1)\cdot J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} + (3t+3)\cdot J(J-1)\cdot$$
$$e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2} + J(J-1)(J-2)\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t^2 & 0 & 0 & 0 \\ t & 2t+1 & 0 & 0 \\ (2t+1)/t & 0 & 1 & 0 \\ 1/t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ 3t^2+3t+1 \\ 3t+3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(2)}/t & S_2^{(2)} & 0 & 0 \\ S_2^{(2)}/t & 0 & S_3^{(2)} & 0 \\ S_3^{(2)}/t & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 \\ 3t^2+3t+1 \\ 3t+3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(3)} \\ S_2^{(3)} \\ S_3^{(3)} \\ S_4^{(3)} \end{bmatrix}$$

<g4>. 由 $f'''(x)$ 矩陣運算至 $f^{(4)}(x)$ ： $u=3 \Rightarrow u=4$

$$f^{(4)}(x) = t^4 \cdot e^{tx}(e^x-1)^J + (4t^3+6t^2+4t+1)\cdot P_1^J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} + (6t^2+12t+7)\cdot$$
$$P_2^J \cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2} + (4t+6)\cdot P_3^J \cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3} + 1\cdot P_4^J \cdot e^{(t+4)x}(e^x-1)^{J-4}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ t^2 & 3t^2+3t+1 & 0 & 0 & 0 \\ (3t^2+3t+1)/t & 0 & 3t+3 & 0 & 0 \\ (3t+3)/t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \\ t+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^4 \\ 4t^3+6t^2+4t+1 \\ 6t^2+12t+7 \\ 4t+6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(3)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(3)}/t & S_2^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ S_2^{(3)}/t & 0 & S_3^{(3)} & 0 & 0 \\ S_3^{(3)}/t & 0 & 0 & S_4^{(3)} & 0 \\ S_4^{(3)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \\ t+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^4 \\ 4t^3+6t^2+4t+1 \\ 6t^2+12t+7 \\ 4t+6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(4)} \\ S_2^{(4)} \\ S_3^{(4)} \\ S_4^{(4)} \\ S_5^{(4)} \end{bmatrix}$$

<g5>. 由 $f^{(4)}(x)$ 矩陣運算持續之，⋯直到由 $f^{(m-1)}(x)$ 矩陣運算至 $f^{(m)}(x)$ ：

$$u = m-1 \quad \Rightarrow \quad u = m$$

$$\begin{bmatrix} S_1^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(m-1)}/t & S_2^{(m-1)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_2^{(m-1)}/t & 0 & S_3^{(m-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_3^{(m-1)}/t & 0 & 0 & S_4^{(m-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_4^{(m-1)}/t & 0 & 0 & 0 & S_5^{(m-1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{m-2}^{(m-1)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{m-1}^{(m-1)} & 0 & 0 \\ S_{m-1}^{(m-1)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & S_m^{(m-1)} & 0 \\ S_m^{(m-1)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \\ t+4 \\ \vdots \\ t+m-2 \\ t+m-1 \\ t+m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(m)} \\ S_2^{(m)} \\ S_3^{(m)} \\ S_4^{(m)} \\ S_5^{(m)} \\ \vdots \\ S_{m-1}^{(m)} \\ S_m^{(m)} \\ S_{m+1}^{(m)} \end{bmatrix}$$

，接著將 m 變換成 J ；即由 $f^{(J-1)}(x)$ 矩陣運算至 $f^{(J)}(x)$ 可得上述相同型式，只需將矩陣式中的 m 變換成 J 即可。所以，自 $f(x)$ 作 1 次導函數 $f'(x)$ 開始，逐次運算到第 J 次導函數 $f^{(J)}(x)$ ，其各次導函數中各 $S_i^{(u)}$ 係數值皆可按序計算出。

[B]. $u=(J+v)>J$ ，則 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+v} = ?$ ， $t \in R$ ， $v, J \in N$ (6)

(a). 持續對 $f(x)$ 作第 $J+1$ 次導函數運算，此處 $v=1$ ，得下式；

$$f^{(J+1)}(x) = t^{J+1} \cdot e^{t\,x}(e^x-1)^J + S_2^{(J+1)} \cdot P_1^J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} +$$

$$S_3^{(J+1)} \cdot P_2^J \cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2} + S_4^{(J+1)} \cdot P_3^J \cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3} + \cdots +$$

$$S_i^{(J+1)} \cdot P_{i-1}^J \cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)} + \cdots + S_{J-2}^{(J+1)} \cdot P_{J-3}^J \cdot e^{(t+J-3)x}(e^x-1)^3 +$$

$$S_{J-1}^{(J+1)} \cdot P_{J-2}^J \cdot e^{(t+J-2)x}(e^x-1)^2 + S_J^{(J+1)} \cdot P_{J-1}^J \cdot e^{(t+J-1)x}(e^x-1) + S_{J+1}^{(J+1)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x}$$

$$= \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+1} \cdot e^{(J+t-r)x} \tag{6.1}$$

此處之符號 $S_i^{(J+1)} = S_i^{(J+1)}(t)$ ， $i = 1,2,3,\cdots,J, J+1$ ，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(J+1)} = t^{J+1}$ 且遵守 $S_i^{(J)} + (t+i)\cdot S_{i+1}^{(J)} = S_{i+1}^{(J+1)}$ 之遞推關係式 。

現在針對此第 $J+1$ 次導函數(6.1)式的 $f^{(J+1)}(x)$ 取 $x=0$ 時，可得其前 J 項每一項的 $e^{(t+q)x}(e^x-1)^{J-q} = 0$ ，$J-1 \ge q \ge 0$ ，而其最末一項 $S_{J+1}^{(J+1)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x}$ 的 $S_{J+1}^{(J+1)} = S_J^{(J)}$ $+ (t+J)\cdot S_{J+1}^{(J)}$ ，因 $S_{J+1}^{(J)} = 1$ 且 ，$S_J^{(J)} = \sum_{i=1}^{J}(t+i-1)$ ，得

$S_{J+1}^{(J+1)} = [\sum_{i=1}^{J}(t+i-1)] + (t+J) = \sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)$ ，所以，此 $S_{J+1}^{(J+1)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x} =$

$[\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot P_J^J = [\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\,!) \Rightarrow f^{(J+1)}(0) = [\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\,!)$

則 $$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+1} = f^{(J+1)}(0) = [\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\,!) \tag{J.1}$$

(b). 持續對 $f(x)$ 作第 $J+2$ 次導函數運算，此處 $v=2$ ，得下式；

$$f^{(J+2)}(x) = t^{J+2} \cdot e^{tx}(e^x-1)^J + S_2^{(J+2)} \cdot P_1^J \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} +$$

$$S_3^{(J+2)} \cdot P_2^J \cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2} + S_4^{(J+2)} \cdot P_3^J \cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3} + \cdots +$$

$$S_i^{(J+2)} \cdot P_{i-1}^J \cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)} + \cdots + S_{J-2}^{(J+2)} \cdot P_{J-3}^J \cdot e^{(t+J-3)x}(e^x-1)^3 +$$

$$S_{J-1}^{(J+2)} \cdot P_{J-2}^J \cdot e^{(t+J-2)x}(e^x-1)^2 + S_J^{(J+2)} \cdot P_{J-1}^J \cdot e^{(t+J-1)x}(e^x-1) + S_{J+1}^{(J+2)} \cdot P_J^J \cdot e^{(t+J)x}$$

$$= \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+2} \cdot e^{(J+t-r)x} \tag{6.2}$$

此處之符號 $S_i^{(J+2)} = S_i^{(J+2)}(t)$ ， $i = 1,2,3,\cdots,J, J+1$ ，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(J+2)} = t^{J+2}$ 且遵守 $S_i^{(J+1)} + (t+i)\cdot S_{i+1}^{(J+1)} = S_{i+1}^{(J+2)}$ 之遞推關係式 。

現在針對此第 $J+2$ 次導函數(6.2)式的 $f^{(J+2)}(x)$ 取 $x=0$ 時，可得其前 J 項每一項的 $e^{(t+q)x}(e^x-1)^{J-q}=0$，$J-1\geq q\geq 0$，而其最末一項 $S_{J+1}^{(J+2)}\cdot P_J^J\cdot e^{(t+J)x}$ 的 $S_{J+1}^{(J+2)}=$

$S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+1)}$，因 $S_{J+1}^{(J+1)}=\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)$ 且 $S_J^{(J+1)}=S_{J-1}^{(J)}+(t+J-1)\cdot S_J^{(J)}$，得

$S_{J+1}^{(J+2)}=S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)$，$S_J^{(J+1)}$ 要從連續遞推關係式而得，所以，此

$f^{(J+2)}(0)=S_{J+1}^{(J+2)}\cdot P_J^J=[\ S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)\ ]\cdot P_J^J$ $=[\ S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot$

$\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\ !)$ 且因 $f^{(J+2)}(0)=\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^{J+2}$

則 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^{J+2}=[\ S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\ !)$　　(J.2)

(c). 持續對 $f(x)$ 作第 $J+3$ 次導函數運算，此處 $v=3$，得下式；

$$\begin{aligned}
f^{(J+3)}(x) &= t^{J+3}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J+S_2^{(J+3)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1}+\\
&S_3^{(J+3)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2}+S_4^{(J+3)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3}+\cdots+\\
&S_i^{(J+3)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}+\cdots+S_{J-2}^{(J+3)}\cdot P_{J-3}^J\cdot e^{(t+J-3)x}(e^x-1)^3+\\
&S_{J-1}^{(J+3)}\cdot P_{J-2}^J\cdot e^{(t+J-2)x}(e^x-1)^2+S_J^{(J+3)}\cdot P_{J-1}^J\cdot e^{(t+J-1)x}(e^x-1)+S_{J+1}^{(J+3)}\cdot P_J^J\cdot e^{(t+J)x}\\
&=\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^{J+3}\cdot e^{(J+t-r)x} \qquad (6.3)
\end{aligned}$$

此處之符號 $S_i^{(J+3)}=S_i^{(J+3)}(t)$，$i=1,2,3,\cdots,J,J+1$，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(J+3)}=t^{J+3}$ 且遵守 $S_i^{(J+2)}+(t+i)\cdot S_{i+1}^{(J+2)}=S_{i+1}^{(J+3)}$ 之遞推關係式。

現在針對此第 $J+3$ 次導函數(6.3)式的 $f^{(J+3)}(x)$ 取 $x=0$ 時，可得其前 J 項每一項的 $e^{(t+q)x}(e^x-1)^{J-q}=0$，$J-1\geq q\geq 0$，而其最末一項 $S_{J+1}^{(J+3)}\cdot P_J^J\cdot e^{(t+J)x}$ 的 $S_{J+1}^{(J+3)}=S_J^{(J+2)}$

$+(t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+2)}$，因 $S_{J+1}^{(J+2)}=S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)$ 且

$S_J^{(J+2)}=S_{J-1}^{(J+1)}+(t+J-1)\cdot S_J^{(J+1)}$，$S_{J-1}^{(J+1)}$ 與 $S_J^{(J+1)}$ 須從連續遞推關係式計算而得，

因此 $S_{J+1}^{(J+3)}=[\ S_{J-1}^{(J+1)}+(t+J-1)\cdot S_J^{(J+1)}\ ]+(t+J)\cdot[\ S_J^{(J+1)}+(t+J)\cdot$

$$\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)] = S_{J-1}^{(J+1)} + [\sum_{i=J-1}^{J}(t+i)]\cdot S_J^{(J+1)} + (t+J)^2\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1) \quad \Rightarrow$$

$$f^{(J+3)}(0) = S_J^{J+3}\cdot P_J^J = \{ S_{J-1}^{(J+1)} + [\sum_{i=J-1}^{J}(t+i)]\cdot S_J^{(J+1)} + (t+J)^2\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1) \}\cdot(J\ !)$$

，且又因 $f^{(J+3)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+3}$ ，則得下式關係式；

$$f^{(J+3)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+3}$$

$$= \{ S_J^{(J+2)} + (t+J)\cdot S_J^{(J+1)} + (t+J)^2\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1) \}\cdot(J\ !) \tag{J.3.1}$$

$$= \{ S_{J-1}^{(J+1)} + [\sum_{i=J-1}^{J}(t+i)]\cdot S_J^{(J+1)} + (t+J)^2\cdot\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1) \}\cdot(J\ !) \tag{J.3.2}$$

(d). ⋯ 持續對 $f(x)$ 作第 $J+v$ 次導函數運算，此處 $v\geq 1$ ，$v\in N$，得下式；

$$f^{(J+v)}(x) = t^{J+v}\cdot e^{tx}(e^x-1)^J + S_2^{(J+v)}\cdot P_1^J\cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{J-1} +$$
$$S_3^{(J+v)}\cdot P_2^J\cdot e^{(t+2)x}(e^x-1)^{J-2} + S_4^{(J+v)}\cdot P_3^J\cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{J-3} + \cdots +$$
$$S_i^{(J+v)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)} + \cdots + S_{J-2}^{(J+v)}\cdot P_{J-3}^J\cdot e^{(t+J-3)x}(e^x-1)^3 +$$
$$S_{J-1}^{(J+v)}\cdot P_{J-2}^J\cdot e^{(t+J-2)x}(e^x-1)^2 + S_J^{(J+v)}\cdot P_{J-1}^J\cdot e^{(t+J-1)x}(e^x-1) + S_{J+1}^{(J+v)}\cdot P_J^J\cdot e^{(t+J)x}$$
$$= \sum_{i=1}^{J+1} S_i^{(J+v)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(t+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}$$
$$= \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^{J+v}\cdot e^{(J+t-r)x} \tag{6.4}$$

此處之符號 $S_i^{(J+v)} = S_i^{(J+v)}(t)$ ， $i = 1,2,3,\cdots,J,J+1$ ，都是 t 的多項式，而 $S_1^{(J+v)} = t^{J+v}$ 且遵守 $S_i^{(J+v-1)} + (t+i)\cdot S_{i+1}^{(J+v-1)} = S_{i+1}^{(J+v)}$ 之遞推關係式 。

現在針對此第 $J+v$ 次導函數(6.4)式的 $f^{(J+v)}(x)$ 取 $x=0$ 時，可得其前 J 項每一項的 $e^{(t+q)x}(e^x-1)^{J-q} = 0$ ，$J-1\geq q\geq 0$ ，而其最末一項 $S_{J+1}^{(J+v)}\cdot P_J^J\cdot e^{(t+J)x}$ 的 $S_{J+1}^{(J+v)} = S_J^{(J+v-1)} + (t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+v-1)}$ ， $\Rightarrow$ $f^{(J+v)}(0) = S_{J+1}^{(J+v)}\cdot P_J^J = S_{J+1}^{(J+v)}\cdot(J\ !)$ $\Rightarrow$

$$f^{(J+v)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^{J+v} = S_{J+1}^{(J+v)}\cdot(J\ !) \tag{J.4.1}$$

$$= [\, S_J^{(J+v-1)} + (t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+v-1)} \,]\cdot (J\ !) \tag{J.4.2}$$

此處 $S_J^{(J+v-1)}$ 與 $S_{J+1}^{(J+v-1)}$ 、 $S_{J+1}^{(J+v)}$ 皆須從連續遞推關係式計算而得，將其列式出來必為一大串表示式。由上述的 (J.2)式、(J.3.1)式、(J.3.2)式等即可知悉不能將係數 $S_{J+1}^{(J+v)}$ 以 t 的多項式型式完整表示出來；因這 $S_J^{(J+v-1)} + (t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+v-1)} = S_{J+1}^{(J+v)}$ 遞迴關係式中的 $S_J^{(J+v-1)}$ 、 $S_{J+1}^{(J+v-1)}$ 與 $S_{J+1}^{(J+v)}$ 元素恰分別坐落在不同的導函數內，屬於非同一數列的項數；$S_J^{(J+v-1)}$ 、 $S_{J+1}^{(J+v-1)}$ 屬於{ $S_i^{(J+v-1)}$ }數列， $S_{J+1}^{(J+v)}$ 屬於{ $S_i^{(J+v)}$ }數列。所以，僅以 (J.4.1)式、(J.4.2)式的型式表述 $f^{(J+v)}(0)$ 的外觀結構。

由上述推演出的結果知； $f^{(J)}(0) \neq f^{(J+1)}(0) \neq f^{(J+2)}(0) \neq f^{(J+3)}(0) \neq \cdots\cdots\cdots \neq f^{(J+v)}(0)$ ，每一個值都不相等也不具規律性。縱然如此， $S_{J+1}^{(J+v)}$ 數值仍能透過矩陣運算式自 $f^{(J)}(x)$ 作矩陣式逐次運算到 $f^{(J+v)}(x)$ 的過程計算出來，而且整體思緒還更靈巧、直覺，演算也具體、有序。

(e). 以矩陣運算式推演出 $S_{J+1}^{(J+v)}$ 係數值

<e1>. 先由 $f^{(J)}(x)$ 矩陣運算至 $f^{(J+1)}(x)$ ： $u = J \;\Rightarrow\; u = J+1$

$$\begin{bmatrix} S_1^{(J)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(J)}/t & S_2^{(J)} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_2^{(J)}/t & 0 & S_3^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_3^{(J)}/t & 0 & 0 & S_4^{(J)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_4^{(J)}/t & 0 & 0 & 0 & S_5^{(J)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{J-2}^{(J)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & S_{J-1}^{(J)} & 0 & 0 \\ S_{J-1}^{(J)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & S_J^{(J)} & 0 \\ S_J^{(J)}/t & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & S_{J+1}^{(J)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ t+3 \\ t+4 \\ \vdots \\ t+J-2 \\ t+J-1 \\ t+J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(J+1)} \\ S_2^{(J+1)} \\ S_3^{(J+1)} \\ S_4^{(J+1)} \\ S_5^{(J+1)} \\ \vdots \\ S_{J-1}^{(J+1)} \\ S_J^{(J+1)} \\ S_{J+1}^{(J+1)} \end{bmatrix}$$

由最末一列可對照計算出 $S_{J+1}^{(J+1)} = S_J^{(J)} + (t+J)\cdot S_{J+1}^{(J)} = \sum_{i=1}^{J}(t+i-1) + (t+J)\cdot 1$

$$=\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)=\sum_{i=1}^{J+1}t+\sum_{i=1}^{J+1}i-\sum_{i=1}^{J+1}1 = (J+1)\cdot t + \frac{(J+1)}{2}(J+2)-(J+1)$$

$$= (J+1)\cdot t + \frac{J(J+1)}{2} = (J+1)\cdot t + C_2^{J+1} \qquad \Rightarrow$$

則得； $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+1} = f^{(J+1)}(0)$

$$=[\sum_{i=1}^{J+1}(t+i-1)]\cdot(J\ !)=[(J+1)\cdot t + C_2^{J+1}]\cdot(J\ !) \qquad (J.1)$$

<e2>. 持續作高 1 次的矩陣運算，⋯，直到由 $f^{(J+v-1)}(x)$ 矩陣運算至 $f^{(J+v)}(x)$：

$$u=J+v-1 \quad\Rightarrow\quad u=J+v$$

$$\begin{bmatrix} S_1^{(J+v-1)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(J+v-1)}/t & S_2^{(J+v-1)} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_2^{(J+v-1)}/t & 0 & S_3^{(J+v-1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{J-2}^{(J+v-1)}/t & 0 & 0 & \cdots & S_{J-1}^{(J+v-1)} & 0 & 0 \\ S_{J-1}^{(J+v-1)}/t & 0 & 0 & \cdots & 0 & S_J^{(J+v-1)} & 0 \\ S_J^{(J+v-1)}/t & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & S_{J+1}^{(J+v-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \\ \vdots \\ t+J-2 \\ t+J-1 \\ t+J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(J+v)} \\ S_2^{(J+v)} \\ S_3^{(J+v)} \\ \vdots \\ S_{J-1}^{(J+v)} \\ S_J^{(J+v)} \\ S_{J+1}^{(J+v)} \end{bmatrix}$$

由最末一列可對照計算出 $S_{J+1}^{(J+v)}=S_J^{(J+v-1)}+(t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+v-1)}$ ，則得；

$$f^{(J+v)}(0)=\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+v}=S_{J+1}^{(J+v)}\cdot(J\ !) \qquad (J.4.1)$$

$$=[S_J^{(J+v-1)}+(t+J)\cdot S_{J+1}^{(J+v-1)}]\cdot(J\ !) \qquad (J.4.2)$$

上述 $S_J^{(J+v-1)}$ 與 $S_{J+1}^{(J+v-1)}$、$S_{J+1}^{(J+v)}$ 三數值都能從持續的矩陣運算式中計算而得，其真實演算操作流程在接下來的範例中將詳盡展示。請觀摩下述示例；

<e3>. 以範例解說矩陣運算式推演出 $S_{J+1}^{(J+v)}$ 係數值

[例 7]. 取 $J=2$，$t=10$，$v=5$ ，代入 (J.4.1)式、(J.4.2)式 得

$\sum_{r=0}^{2}(-1)^r C_r^2 \cdot (12-r)^7 = S_3^{(7)}\cdot(2\ !)$ $\Rightarrow$ 以矩陣運算式求出 $S_3^{(7)}$ 係數值，如下；

<7.1>. 由 $\begin{bmatrix} S_1^{(0)} & 0 \\ S_1^{(0)}/t & S_2^{(0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$ ，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/t & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$

<7.2>. 由 $\begin{bmatrix} S_1^{(1)} & 0 & 0 \\ S_1^{(1)}/t & S_2^{(1)} & 0 \\ S_2^{(1)}/t & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^2 \\ 2t+1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 21 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \end{bmatrix}$

<7.3>. 由 $\begin{bmatrix} S_1^{(2)} & 0 & 0 \\ S_1^{(2)}/t & S_2^{(2)} & 0 \\ S_2^{(2)}/t & 0 & S_3^{(2)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \\ t+2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 10 & 21 & 0 \\ 2.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1000 \\ 331 \\ 33 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(3)} \\ S_2^{(3)} \\ S_3^{(3)} \end{bmatrix}$

<7.4>. $\begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 \\ 100 & 331 & 0 \\ 33.1 & 0 & 33 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10000 \\ 4641 \\ 727 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(4)} \\ S_2^{(4)} \\ S_3^{(4)} \end{bmatrix}$

<7.5>. $\begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 \\ 10^3 & 4641 & 0 \\ 464.1 & 0 & 727 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10^5 \\ 61051 \\ 13365 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(5)} \\ S_2^{(5)} \\ S_3^{(5)} \end{bmatrix}$

<7.6>. $\begin{bmatrix} 10^5 & 0 & 0 \\ 10^3 & 61051 & 0 \\ 6105.1 & 0 & 13365 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10^6 \\ 771561 \\ 221431 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(6)} \\ S_2^{(6)} \\ S_3^{(6)} \end{bmatrix}$

<7.7>. $\begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 10^5 & 771561 & 0 \\ 77156.1 & 0 & 221431 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10^7 \\ 9487171 \\ 3428733 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(7)} \\ S_2^{(7)} \\ S_3^{(7)} \end{bmatrix}$

上述由矩陣運算式表列流程中，得最末 1 數為 $S_3^{(7)}=3428733$ ，因此可得；

$\sum_{r=0}^{2}(-1)^r C_r^2\cdot(12-r)^7=S_3^{(7)}\cdot(2\ !)=3428733\times(2\ !)\ =6857466$

再由 $\sum_{r=0}^{2}(-1)^r C_r^2\cdot(12-r)^7=\ 12^7-2\cdot 11^7+10^7=35831808-38974342+10^7$

$=6857466$

則可見到展開式與矩陣運算式表列流程相互印證出同樣數值結果 6857466 .

所以，不需要預先知道 $S_{J+1}^{(J+v)}(t)$ 的多項式一般式也能求算出其數值。

[例 8]. 取 $J=8$，$t=1$，$v=4$，代入 (J.4.1)式、(J.4.2)式 得

$\sum_{r=0}^{8}(-1)^r C_r^8 \cdot (9-r)^{12} = S_9^{(12)} \cdot (8\ !)$，再以矩陣運算式求出 $S_9^{(12)}$ 係數值(省略由 $f(x)$ 到 $f^{(7)}(x)$ 的矩陣運算式流程並參考底下第三標題的(C1).至(C8).內容)，由 $f^{(8)}(x)$ 至 $f^{(9)}(x)$ 作矩陣運算起，得下列運算式；

<8.1>. 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 255 & 0 & 3025 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3025 & 0 & 0 & 7770 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7770 & 0 & 0 & 0 & 6951 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6951 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2646 & 0 & 0 & 0 \\ 2646 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 462 & 0 & 0 \\ 462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 \\ 36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 511 \\ 9330 \\ 34105 \\ 42525 \\ 22827 \\ 5880 \\ 750 \\ 45 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(9)} \\ S_2^{(9)} \\ S_3^{(9)} \\ S_4^{(9)} \\ S_5^{(9)} \\ S_6^{(9)} \\ S_7^{(9)} \\ S_8^{(9)} \\ S_9^{(9)} \end{bmatrix}$$

<8.2>. 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 511 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 511 & 0 & 9330 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9330 & 0 & 0 & 34105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 34105 & 0 & 0 & 0 & 42525 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 42525 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22827 & 0 & 0 & 0 \\ 22827 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5880 & 0 & 0 \\ 5880 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 750 & 0 \\ 750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1023 \\ 28501 \\ 145750 \\ 246730 \\ 179487 \\ 63987 \\ 11880 \\ 1155 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(10)} \\ S_2^{(10)} \\ S_3^{(10)} \\ S_4^{(10)} \\ S_5^{(10)} \\ S_6^{(10)} \\ S_7^{(10)} \\ S_8^{(10)} \\ S_9^{(10)} \end{bmatrix}$$

<8.3>. 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1023 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1023 & 0 & 28501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 28501 & 0 & 0 & 145750 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 145750 & 0 & 0 & 0 & 246730 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 246730 & 0 & 0 & 0 & 0 & 179487 & 0 & 0 & 0 \\ 179487 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 63987 & 0 & 0 \\ 63987 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11880 & 0 \\ 11880 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1155 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2047 \\ 86526 \\ 611501 \\ 1379400 \\ 1323652 \\ 627396 \\ 159027 \\ 22275 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(11)} \\ S_2^{(11)} \\ S_3^{(11)} \\ S_4^{(11)} \\ S_5^{(11)} \\ S_6^{(11)} \\ S_7^{(11)} \\ S_8^{(11)} \\ S_9^{(11)} \end{bmatrix}$$

<8.4>. 由

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2047 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2047 & 0 & 86526 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 86526 & 0 & 0 & 611501 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 611501 & 0 & 0 & 0 & 1379400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1379400 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1323652 & 0 & 0 & 0 \\ 1323652 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 627396 & 0 & 0 \\ 627396 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 159027 & 0 \\ 159027 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22275 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\\8\\9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4095\\261625\\2532530\\7508501\\9321312\\5715424\\1899612\\359502\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_1^{(12)}\\S_2^{(12)}\\S_3^{(12)}\\S_4^{(12)}\\S_5^{(12)}\\S_6^{(12)}\\S_7^{(12)}\\S_8^{(12)}\\S_9^{(12)}\end{bmatrix}$$

$f^{(J+v)}(x)$ 最後得； $S_9^{(12)} = 359502$ ，再代入 $\sum_{r=0}^{8}(-1)^r C_r^8 \cdot (9-r)^{12}$ 中，

即得計算值為 $\sum_{r=0}^{8}(-1)^r C_r^8 \cdot (9-r)^{12} = S_9^{(12)} \cdot (8\ !) = 359502 \times (8\ !) = 14495120640$.

再由 $\sum_{r=0}^{8}(-1)^r C_r^8 \cdot (9-r)^{12} = 9^{12} - C_1^8 \cdot 8^{12} + C_2^8 \cdot 7^{12} - C_3^8 \cdot 6^{12} + C_4^8 \cdot 5^{12} - C_5^8 \cdot 4^{12} +$

$C_6^8 \cdot 3^{12} - C_7^8 \cdot 2^{12} + C_8^8 \cdot 1^{12} = 282429536481 - 549755813888 + 387556041628 -$

$121899810816 + 17089843750 - 939524096 + 14880348 - 32768 + 1 = 14495120640$

，又見到不同演算法都能得到完全相同一致的數值 14495120640 .

由上述推理與範例驗證及(J.4.1)式的 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+v} = S_{J+1}^{(J+v)} \cdot (J\ !)$ 關係式得知；當 $v\ (\geq 1)$ 值不同時，其 $S_{J+1}^{(J+v)}(t)$ 值亦完全相異，真是變化多樣！

三、 遇見 第 2 類史特林數（Stirling number of the 2nd kind）

當 $t = 1$ ，(4)式的冪函數變換成 $g(x) = e^x\,(e^x - 1)^J = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot e^{(J+1-r)x}$ ，

對此 $g(x)$ 逐次作導函數並持續到作第 J 次，得下列第 J 次導函數 $g^{(J)}(x)$ ；

$$g^{(J)}(x) = \sum_{i=1}^{J+1} S_i^{(J)} \cdot P_{i-1}^J \cdot e^{(1+i-1)x}(e^x - 1)^{J-(i-1)} = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+1-r)^J \cdot e^{(J+1-r)x}$$

此處的 $S_i^{(J)}$ 值需由初始值 $S_1^{(0)} = 1$ ， $S_2^{(0)} = 0$ ，並會同矩陣運算式來一一求得。

(C1). 由 $\begin{bmatrix} S_1^{(0)} & 0 \\ S_1^{(0)}/t & S_2^{(0)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$ ，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$

(C2). 由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \end{bmatrix}$

(C3). 由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(3)} \\ S_2^{(3)} \\ S_3^{(3)} \\ S_4^{(3)} \end{bmatrix}$

(C4). 由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 25 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(4)} \\ S_2^{(4)} \\ S_3^{(4)} \\ S_4^{(4)} \\ S_5^{(4)} \end{bmatrix}$

(C5). 由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 31 \\ 90 \\ 65 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(5)} \\ S_2^{(5)} \\ S_3^{(5)} \\ S_4^{(5)} \\ S_5^{(5)} \\ S_6^{(5)} \end{bmatrix}$

(C6). 由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 63 \\ 301 \\ 350 \\ 140 \\ 21 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} S_1^{(6)} \\ S_2^{(6)} \\ S_3^{(6)} \\ S_4^{(6)} \\ S_5^{(6)} \\ S_6^{(6)} \\ S_7^{(6)} \end{bmatrix}$

(C7). 由
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 63 & 0 & 301 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 301 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 350 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 \\ 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 127 \\ 966 \\ 1701 \\ 1050 \\ 266 \\ 28 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(7)} \\ S_2^{(7)} \\ S_3^{(7)} \\ S_4^{(7)} \\ S_5^{(7)} \\ S_6^{(7)} \\ S_7^{(7)} \\ S_8^{(7)} \end{bmatrix}$$

(C8). 由
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 127 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 127 & 0 & 966 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 966 & 0 & 0 & 1701 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1701 & 0 & 0 & 0 & 1050 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1050 & 0 & 0 & 0 & 0 & 266 & 0 & 0 & 0 \\ 266 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 0 & 0 \\ 28 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 255 \\ 3025 \\ 7770 \\ 6951 \\ 2646 \\ 462 \\ 36 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(8)} \\ S_2^{(8)} \\ S_3^{(8)} \\ S_4^{(8)} \\ S_5^{(8)} \\ S_6^{(8)} \\ S_7^{(8)} \\ S_8^{(8)} \\ S_9^{(8)} \end{bmatrix}$$

(C9). 持續運算，⋯，直到 $S_i^{(J)}$ 的矩陣運算式所有值都出現而形成 $\{S_i^{(J)}\}$ 數列，再將上述所有這些 $\{S_i^{(k)}\}$ 數列，$k = 0,1,2,3,\cdots,J$ ，$i = 1,2,3,\cdots,k+1$，依順序排列成下面的三角構造形式而編製出 第 2 類史特林數 表：

$S_i^{(0)}$ ：	1									
$S_i^{(1)}$ ：	1	1								
$S_i^{(2)}$ ：	1	3	1							
$S_i^{(3)}$ ：	1	7	6	1						
$S_i^{(4)}$ ：	1	15	25	10	1					
$S_i^{(5)}$ ：	1	31	90	65	15	1				
$S_i^{(6)}$ ：	1	63	301	350	140	21	1			
$S_i^{(7)}$ ：	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
$S_i^{(8)}$ ：	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
$S_i^{(9)}$ ：	1	511	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	⋯	45	1

⋯

$S_i^{(J)}$ ：　1　2^J-1　⋯　⋯　⋯　⋯　⋯　⋯　⋯　⋯　⋯　C_2^{J+1}　1

由此看出所揀選的這一個冪函數： $g(x)=e^x(e^x-1)^J=\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot e^{(J+1-r)x}$ ，並對此 $g(x)$ 逐次作導函數運算，再持續到作第 k 次，得下列導函數 $g^{(k)}(x)$ ；

$g^{(k)}(x)=\sum_{i=1}^{k+1}S_i^{(k)}\cdot P_{i-1}^J\cdot e^{(1+i-1)x}(e^x-1)^{J-(i-1)}$ ，$k=0,1,2,3,\cdots,J$,中，其所有 $S_i^{(k)}$ 值必形成完整系列的第 2 類史特林數。所以，所有第 k 次導函數 $g^{(k)}(x)$ 為生成函數。

這裡就不再重述 第 2 類史特林數 的基本意義與特質，參閱檔案文獻 [1]~[3]。

參、結論

1. 主文內容已完整闡述出求解：$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^u=?$ 問題的 3 種不同條件情形，也應用具體的矩陣運算式計算出所有{ $S_i^{(k)}$ }數列、{ $S_i^{(J)}$ }數列與{ $S_i^{(J+v)}$ }數列，並且由遞迴關係式： $S_i^{(u)}+(t+i)\cdot S_{i+1}^{(u)}=S_{i+1}^{(u+1)}$ ，算出了第 2 類史特林數。

   這類 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^u$ 型式通常會出現於求多項式的均差運算列表法或階差的差分運算列表法中各階運算的任一項式，尤其是可應用於推演計算出任何一個連續整數冪次和公式的過程，方法在於直接列表運算即可。
2. $u<J$, $u=J$ 的結果最簡易且規律。最饒富變化的是 $u>J$ 的 $S_{J+1}^{(J+v)}(t)$ 數值，每一個 v (≥ 1) 值都會得出不同的 $S_{J+1}^{(J+v)}(t)$ 數值，在[例 8]. 取 $J=8$，$t=1$，$v=4$ 中，見到了 $S_9^{(8)}=1$ ，$S_9^{(9)}=45$ ，$S_9^{(10)}=1155$ ，$S_9^{(11)}=22275$ ，$S_9^{(12)}=359502$.
3. 取(2)式 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(J+t-r)^m=0$ ，$0\leq u=m<J$ ，$t\in R$，$J,m\in N$ 。

   也可寫成另外型式： $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(X-r)^m=0$ (7)

   $0\leq m<J$ ，$X\in R$，$J,m\in N$ ，r 為整數。

   或再寫成另一型式： $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J\cdot(r+t)^m=0$ (8)

   $0\leq u=m<J$ ，$t\in R$，$J,m\in N$ ，r 為整數。

   此 (2)式與 (7)式、(8)式都是完全等價同義的組合級數恆等式。

[例 9]. 取 $J=4$，$X=7.1$，$m=3$，則 (7)式 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{4}(-1)^r C_r^4 \cdot (7.1-r)^3$

$= C_0^4 \cdot (7.1)^3 - C_1^4 \cdot (6.1)^3 + C_2^4 \cdot (5.1)^3 - C_3^4 \cdot (4.1)^3 + C_4^4 \cdot (3.1)^3$

$= 357.911 - 907.924 + 795.906 - 275.684 + 29.791 = 0$

[例 10]. 取 $J=4$，$t=t$，$m=3$，則 (8)式 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{4}(-1)^r C_r^4 \cdot (r+t)^3$

$= C_0^4 \cdot (t)^3 - C_1^4 \cdot (1+t)^3 + C_2^4 \cdot (2+t)^3 - C_3^4 \cdot (3+t)^3 + C_4^4 \cdot (4+t)^3$
$= (t)^3 - 4 \cdot (1+t)^3 + 6 \cdot (2+t)^3 - 4 \cdot (3+t)^3 + (4+t)^3 = t^3 - 4\,(1+3t+3t^2+t^3)$
$+ 6\,(8+12t+6t^2+t^3) - 4\,(27+27t+9t^2+t^3) + (64+48t+12t^2+t^3) = 0$

4. 恆等式 (3)式 $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^J = J\,!$，$u=J$，$t \in R$，$r, J \in N$，

也可寫成另外型式： $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (Y-r)^J = J\,!$ (9)

$Y \in R$，$J, m \in N$，r 為整數。

或再寫成另一型式： $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (r+t)^J = J\,!$ (10)

$t \in R$，$J \in N$，r 為整數。

此 (3)式與 (9)式、(10)式都是等價同義的組合級數恆等式。

[例 11]. 取 $J=5$，$Y=7$，代入(9)式，則 (9)式

$\Rightarrow \sum_{r=0}^{5}(-1)^r C_r^5 \cdot (7-r)^5 = C_0^5 \cdot 7^5 - C_1^5 \cdot 6^5 + C_2^5 \cdot 5^5 - C_3^5 \cdot 4^5 + C_4^5 \cdot 3^5 - C_5^5 \cdot 2^5$

$= 16807 - 38880 + 31250 - 10240 + 1215 - 32 = 120 = 5\,!$

[例 12]. 取 $J=4$，$t=t$，代入(10)式，則 (10)式 $\Rightarrow \sum_{r=0}^{4}(-1)^r C_r^4 \cdot (r+t)^4$

$= C_0^4 \cdot (t)^4 - C_1^4 \cdot (1+t)^4 + C_2^4 \cdot (2+t)^4 - C_3^4 \cdot (3+t)^4 + C_4^4 \cdot (4+t)^4$
$= (t)^4 - 4\,(1+4t+6t^2+4t^3+t^4) + 6\,(16+32t+24t^2+8t^3+t^4)$
$- 4\,(81+108t+54t^2+12t^3+t^4) + (256+256t+96t^2+16t^3+t^4) = 24 = 4\,!$

5. 取 (J.4.1)式的 $f^{(J+v)}(0) = \sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^{J+v} = S_{J+1}^{(J+v)} \cdot (J\,!)$ (J.4.1)

也可寫成另外型式： $\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (Z-r)^{J+v} = S_{J+1}^{(J+v)} \cdot (J\,!)$ (11)

$Z \in R$， $J, v \in N$ ，r 為整數。

或再寫成另一型式： $\sum_{r=0}^{J} (-1)^r C_r^J \cdot (r+t)^{J+v} = S_{J+1}^{(J+v)} \cdot (J\ !)$ (12)

$t \in R$，$J, v \in N$ ，r 為整數。

此 (J.4.1)式與 (11)式、(12)式都是完全等價同義的組合級數恆等式。

[例 13]. 取 $J = 3$，$Z = 2.1$，$v = 3$，則 $\sum_{r=0}^{3} (-1)^r C_r^3 \cdot (2.1-r)^6 = (13.32) \cdot (3\ !)$

$= 79.92$

參考文獻

1. 遞迴關係 (七)、(八)， 游森棚 教授，科學 Online ， 2011 年 9 月 19 日。
2. 離散數學(繁體中文) 作者： Kolman. Busby. Ross. ，譯者： 呂威輔、施文慈，2009/09/24 ，碁峰出版社。
3. 斯特林數 (Stirling number) (史特林數) 維基百科 自由的百科全書。
4. 以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解， 李維昌 數學傳播 44 卷 1 期，pp.94-96，2020 年 3 月 。
5. 連續整數冪次和公式的另類思考，李政豐 數學傳播 26 卷 2 期 2002 年 6 月。
6. 笹部貞市郎 : 幾何學、代數學、數學大辭典 1988 九章出版社。