以均差運算法求取連續整數冪次和的多項式函數(上)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

壹、前言

「連續整數冪次和公式」就是伯努利多項式 Bernoulli polynomial，其多項式係數與伯努利數有密切相關性，想求取此一般表示式根本就是困難大事一樁。在參考文獻[1]中，李維昌老師以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解，其中 r 為自然數。以尋求遞迴關係式進而引用矩陣運算求得相關的伯努力數，再求得公式解。另外，文獻[2]李政豐老師則用到導函數、列簡化矩陣，把係數公式導出來。不懂伯努力數的同學或許也能看得懂，但其一般化推證內容確實也非常複雜，伯努利數不能以初等方式描述；它們與黎曼 zeta 函數完全正關聯，有深邃的數論性質聯繫，所以不能預期有簡單的計算公式。也因此，不容易被大眾、學生歸納理解。

連續整數冪次和 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的公式形式為 n 的 $m+1$ 次多項式函數，即 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n) = \sum_{i=0}^{m+1} a_i n^i$。根據經驗彙整的分析思索模式；凡通過已知數據點以尋找多項式函數的問題正可直覺地採取具體的均差運算列表法來直取其多項式函數，文獻[6]。當確定選取一個自然數 m 值，即可逐一精細計算出 $\sum_{k=0}^{m+2} k^m$ 的前 $m+2$ 項數據值，再將這 $m+2$ 項數據值以橫式表依序排成二列，接著就能應用簡潔明晰的均差運算列表法來求取其多項式函數。正文會秉持此觀點出發以仔細敘述主題內涵的理念思考與推演操作過程。

貳、本文

一、 在主文推演過程中需應用到下列數學相關性質-----引理，以承續推理內容；

引理 1：從 J 個彼此完全不同的物件中隨機抽取出 i 個物件來作一直線排列，其相異排列法為 P_i^J，而其完整運算式為

$$P_i^J = \frac{J\,!}{(J-i)\,!} \tag{1}$$

[證明]：略。

引理 2： 從 J 個彼此完全不同的物件中隨機選取出 r 個物件的相異組合數為 C_r^J，而其完整運算式為 $C_r^J = \dfrac{J\,!}{(r\,!)\cdot(J-r)\,!}$ (2)

[證明]：略。

引理 3： 二項式展開式 $(x-y)^m = \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m \cdot x^{m-r} y^r$ (3)

[證明]：略。

二、 主題的理念思維、推演及列表操作運算過程

[A]. 首先示範分析求取 $\sum_{k=1}^{n} k^4$ 的多項式函數表示式；

均差(divided differences)運算：是指在函數裡任取 (兩個函數值的差) 與其 (對應輸入元素的差) 的比值，是函數在某一區間內的平均變化率的測度。文獻[6]。

(A1). 由連續整數冪次和 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n) = \sum_{i=0}^{m+1} a_i n^i$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式函數，在作運算列表取值時需從 $k=1$ 計算到 $k=m+2$，且因 $\sum_{k=1}^{m+2} k^m = \sum_{k=0}^{m+2} k^m$，所以，在製作橫式列表時，要新增 1 個數據就是 (0,0)，而後(1,1)，接著是 $(2,\, 1+2^m)$，$(3,\, 1+2^m+3^m)$，⋯， $(m, \sum_{k=0}^{m} k^m)$，$(m+1, \sum_{k=0}^{m+1} k^m)$，$(m+2, \sum_{k=0}^{m+2} k^m)$等總計有 $m+3$個數據值。今將這 $m+3$個數據值依序排成下方橫式列並作均差運算表；

k ： 0 1 2 3 4 $\cdots$ m $m+1$ $m+2$

f ： 0 1 $1+2^m$ $\sum_{k=0}^{3} k^m$ $\sum_{k=0}^{4} k^m$ $\cdots$ $\sum_{k=0}^{m} k^m$ $\sum_{k=0}^{m+1} k^m$ $\sum_{k=0}^{m+2} k^m$

1 階： 1 2^m 3^m 4^m 5^m $\cdots$ m^m $(m+1)^m$ $(m+2)^m$

2 階： $\dfrac{2^m-1}{2}$ $\dfrac{3^m-2^m}{2}$ $\dfrac{4^m-3^m}{2}$ $\cdots$ $\dfrac{(m+1)^m-m^m}{2}$ $\dfrac{(m+2)^m-(m+1)^m}{2}$

3 階： $\dfrac{3^m-2\cdot 2^m+1}{6}$ $\dfrac{4^m-2\cdot 3^m+2^m}{6}$ $\cdots$ $\dfrac{(m+2)^m-2(m+1)^m+m^m}{6}$

4 階： $\dfrac{4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1}{24}$ $\cdots$ $\dfrac{(m+2)^m-3(m+1)^m+3m^m-(m-1)^m}{24}$

5 階： $\dfrac{5^m-4\cdot 4^m+6\cdot 3^m-4\cdot 2^m+1}{120}$ $\dfrac{6^m-4\cdot 5^m+6\cdot 4^m-4\cdot 3^m+2^m}{120}$

$\cdots$ $\dfrac{(m+2)^m-4(m+1)^m+6m^m-4(m-1)^m+(m-2)^m}{120}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

k 階：$(1\le k\le m+1)$ $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\ !}$ $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k+1-r)^m}{k\ !}$ $\cdots$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

m 階： $\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m-r)^m}{m\ !}$ $\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m+1-r)^m}{m\ !}$ $\sum_{k=0}^{m+2}k^m$

$\dfrac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m+2-r)^m}{m\ !}$

$m+1$ 階： $\dfrac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^{m}(m+1-r)^m}{(m+1)\ !}$ $\dfrac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^{m}(m+2-r)^m}{(m+1)\ !}$

以上完成了所需求數據值、0 階、1 階到 $m+1$ 階的全套橫式均差運算列表。

(A2). 取 $m=4$ ，得下列 $\sum_{k=1}^{n}k^4=f(n)$ 其 1 階到 5 階的全套橫式均差運算列表；

k ： 0 1 2 3 4 5 6 $\cdots$

f ： 0 1 $1+2^4$ $\sum_{k=0}^{3}k^4$ $\sum_{k=0}^{4}k^4$ $\sum_{k=0}^{5}k^4$ $\sum_{k=0}^{6}k^4$

1 階： 1 2^4 3^4 4^4 5^4 6^4 $\cdots$

2 階： $\dfrac{2^4-1}{2}=\dfrac{15\cdot 1!}{2!}$ $\dfrac{3^4-2^4}{2}$ $\dfrac{4^4-3^4}{2}$ $\dfrac{5^4-4^4}{2}$ $\dfrac{6^4-5^4}{2}$ $\cdots$

3 階： $\dfrac{3^4-2\cdot 2^4+1}{3\ !}=\dfrac{25\cdot 2!}{3!}$ $\dfrac{4^4-2\cdot 3^4+2^4}{6}$ $\dfrac{5^4-2\cdot 4^4+3^4}{6}$ $\dfrac{6^4-2\cdot 5^4+4^4}{6}$

4 階： $\dfrac{4^4-3\cdot 3^4+3\cdot 2^4-1}{24}=\dfrac{10\cdot 3!}{4!}$ $\dfrac{5^4-3\cdot 4^4+3\cdot 3^4-2^4}{24}$ $\dfrac{6^4-3\cdot 5^4+3\cdot 4^4-3^4}{24}$

5 階： $\dfrac{5^4-4\cdot 4^4+6\cdot 3^4-4\cdot 2^4+1}{120}=\dfrac{1\cdot 4!}{5!}$ $\dfrac{6^4-4\cdot 5^4+6\cdot 4^4-4\cdot 3^4+2^4}{120}=\dfrac{1}{5}$

(A3). 從上表(A2).可見到各階運算列的第 1 個數值，分別為：0 階的 0，1 階的 1，2

階的 $\dfrac{2^4-1}{2}=\dfrac{15\cdot 1!}{2!}=\dfrac{15}{2}$，3 階的 $\dfrac{3^4-2\cdot 2^4+1}{3!}=\dfrac{25\cdot 2!}{3!}=\dfrac{25}{3}$，4 階的 $\dfrac{4^4-3\cdot 3^4+3\cdot 2^4-1}{24}=\dfrac{10\cdot 3\ !}{4\ !}=\dfrac{5}{2}$，5 階的 $\dfrac{5^4-4\cdot 4^4+6\cdot 3^4-4\cdot 2^4+1}{120}=\dfrac{1\cdot 4\ !}{5\ !}=\dfrac{1}{5}$，第 5 階運算列的任一數值都是常數 $\dfrac{1}{5}$，所以，$\sum_{k=1}^{n}k^4=f(n)$ 是 5 次多項式函數。

今將各階運算列第 1 個數值取出依序排列，形成橫式列表結構如下，文獻[6]；

k：						0	1	2	3	4	5	
0 階：						0	1					
1 階：					b_{11}	1						
2 階：				b_{21}	b_{22}	$\frac{15}{2}$						
3 階：			b_{31}	b_{32}	b_{33}	$\frac{25}{3}$						
4 階：		b_{41}	b_{42}	b_{43}	b_{44}	$\frac{5}{2}$						
5 階：	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	b_{55}	$\frac{1}{5}$						

(A4). 從(A3).列表的第 5 階運算列中先在 b_{51} 至 b_{55} 的各位置處填入同一數 $\dfrac{1}{5}$，因這 $\sum_{k=1}^{n}k^4=f(n)$ 函數的首項 5 次方項的係數是 $\dfrac{1}{5}$，即 $b_{51}=b_{52}=\ \cdots\ =b_{55}=\dfrac{1}{5}$，接著看 b_{55} 與其上方的 b_{44} 及 $\dfrac{5}{2}$ 等 3 個數之間的運算關係；由均差運算知 $b_{55}=\dfrac{(5/2)-b_{44}}{4}=\dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{44}=\dfrac{17}{10}$，繼續看 b_{44} 與其上方的 b_{33} 及 $\dfrac{25}{3}$ 等 3 個數之間的運算關係；

由 $b_{44}=\dfrac{(25/3)-b_{33}}{3}=\dfrac{17}{10}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{33}=\dfrac{97}{30}$，繼續看 b_{33} 與其上方的 b_{22} 及 $\dfrac{15}{2}$ 等 3 個數之間的運算關係；由 $b_{33}=\dfrac{(15/2)-b_{22}}{2}=\dfrac{97}{30}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{22}=\dfrac{31}{30}$，最後再看 b_{22} 與其上方的 b_{11} 及 1 等 3 個數之間的運算關係；由 $b_{22}=\dfrac{1-b_{11}}{1}=\dfrac{31}{30}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{11}=-\dfrac{1}{30}$。

現在將此節計算出的數填入(A3).列表中，得到下列新的(A4).列表：

k：　0　1　2　3　4　5

0 階：	0	1				
1 階：	$-\frac{1}{30}$	1				
2 階：	b_{21}	$\frac{31}{30}$	$\frac{15}{2}$			
3 階：	b_{31}	b_{32}	$\frac{97}{30}$	$\frac{25}{3}$		
4 階：	b_{41}	b_{42}	b_{43}	$\frac{17}{10}$	$\frac{5}{2}$	
5 階：	b_{51}	b_{52}	b_{53}	b_{54}	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

此表的意義顯示了 0 階的第 1 個數值 0 就是 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n)$ 函數的常數項值 a_0，而 1 階的第 1 個數值 $b_{11} = -(1/30)$ 就是 1 次方項的係數 a_1。

(A5). 從(A4).列表繼續運算推演出 b_{43}、b_{32}、b_{21} 的數值；仿效上節探討流程，由均差運算知 $b_{54} = \frac{(17/10) - b_{43}}{3} = \frac{1}{5}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{43} = \frac{11}{10}$，繼續由 $b_{43} = \frac{(97/30) - b_{32}}{2} = \frac{11}{10}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{32} = \frac{31}{30}$，繼續由 $b_{32} = \frac{(31/30) - b_{21}}{1} = \frac{31}{30}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{21} = 0$，完成後再將此節計算出的數填入(A4).列表中，得到下列新的(A5).列表：

k ：	0	1	2	3	4	5
0 階：	0	1				
1 階：	$-\frac{1}{30}$	1				
2 階：	0	$\frac{31}{30}$	$\frac{15}{2}$			
3 階：	b_{31}	$\frac{31}{30}$	$\frac{97}{30}$	$\frac{25}{3}$		
4 階：	b_{41}	b_{42}	$\frac{11}{10}$	$\frac{17}{10}$	$\frac{5}{2}$	
5 階：	b_{51}	b_{52}	b_{53}	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

此表顯示 2 階的第 1 個數值 $b_{21}=0$ 就是 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n)$ 函數的 2 次方項係數 a_2 。

(A6). 從(A5).列表繼續運算推演出 b_{42} 、 b_{31} 的數值；仿效上節探討流程，由均差運算知 $b_{53}=\dfrac{(11/10)-b_{42}}{2}=\dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{42}=\dfrac{7}{10}$ ，繼續由 $b_{42}=\dfrac{(31/30)-b_{31}}{1}=\dfrac{7}{10}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{31}=\dfrac{1}{3}$ ，完成後再將此節計算出的數填入(A5).列表中，得下列新的(A6).列表：

k ：	0	1	2	3	4	5
0 階：	0	1				
1 階：	$-\dfrac{1}{30}$	1				
2 階：	0	$\dfrac{31}{30}$	$\dfrac{15}{2}$			
3 階：	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{31}{30}$	$\dfrac{97}{30}$	$\dfrac{25}{3}$		
4 階：	b_{41}	$\dfrac{7}{10}$	$\dfrac{11}{10}$	$\dfrac{17}{10}$	$\dfrac{5}{2}$	
5 階：	b_{51}	b_{52}	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$	$\dfrac{1}{5}$

此表顯示 3 階的第 1 個數值 $b_{31}=1/3$ 就是 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n)$ 函數的 3 次方項係數 a_3 。

(A7). 從(A6).列表繼續運算推演出 b_{41} 的數值；仿效上節探討流程，由均差運算知 $b_{52}=\dfrac{(7/10)-b_{41}}{1}=\dfrac{1}{5}$ $\Rightarrow$ 得 $b_{41}=\dfrac{1}{2}$ ，最後得到下列新式完整的(A7).列表：

k ：	0	1	2	3	4	5
0 階：	0	1				
1 階：	$-\dfrac{1}{30}$	1				
2 階：	0	$\dfrac{31}{30}$	$\dfrac{15}{2}$			
3 階：	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{31}{30}$	$\dfrac{97}{30}$	$\dfrac{25}{3}$		

4 階： $\frac{1}{2}$ $\frac{7}{10}$ $\frac{11}{10}$ $\frac{17}{10}$ $\frac{5}{2}$

5 階： $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5}$

此表顯示 4 階的第 1 個數值 b_{41}= 1/2 就是 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n)$ 函數的 4 次方項係數 a_4。

綜上推演所述，終至獲得一個新式完整的(A7).列表，依據此列表直接取出各階的第 1 個數值按序為 $\frac{1}{5}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、0、$-\frac{1}{30}$、0 等，再將這 6 個係數組合成完整的多項式函數 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$，找到了 5 次方公式。

(A8). [驗證] 從(A2). m = 4 得下列 $\sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n)$ 其 k = 0 , 1 到 6 的數據值列表；

k：	0	1	2	3	4	5	6	⋯
f：	0	1	17	98	354	979	2275	⋯
1 階：		1	16	81	256	625	1296	⋯
2 階：			15/2	65/2	175/2	369/2	671/2	⋯
3 階：				25/3	55/3	97/3	151/3	⋯
4 階：					5/2	7/2	9/2	⋯
5 階：						1/5	1/5	1/5 ⋯

利用這完整均差運算列表的各階第 1 個數值並採取牛頓插值公式法可得下式；

$$f(n) = 0 + 1\,n + (15/2)\,n\,(n-1) + (25/3)\,n\,(n-1)\,(n-2) + (5/2)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) + (1/5)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$$

將上列多項式乘開，同次數項化簡，組合，再按高低次數排列，最後得；

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} k^4 = f(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

如此應用牛頓插值公式法過程能嚴謹精確地驗證出完全相同的結果。

以上的概念操作法能適用於較大的 m 值嗎？取較大的 m 值時，各階運算列的第 1 個數值如何求出？並再搭配逆向均差運算而求出連續正整數等冪次求和公式？

接下來，就是要探討如何處理解決這些問題的理念運算操作法。

[B]. 要操作求和公式列表必須先計算出各階運算列的第 1 個數值，見(A1).列表的第 k 階

$(1 \le k \le m+1)$第 1 個數值代表式為 $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\ !}$，現在要先來分析計算分子部份 $\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m$ 這類組合級數數值；

(B1). 詳細分析探討而提出：考量以 e 為底的冪函數 $f(x)=e^x(e^x-1)^{k-1}$ (4)

對(4)式應用二項式展開式，再化簡，得 $f(x)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot e^{(k-r)x}$ (5)

(a). 令 (5)式 $f(x)$ 的第 m 次導函數是 $f^{(m)}(x)$，作 m 次導函數運算得

$$f^{(m)}(x)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m\cdot e^{(k-r)x} \tag{5.1}$$

對(5.1)式取 $x=0$，得 $f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m$ (5.2)

(b). 令 (4)式 $f(x)$ 的第 J 次導函數是 $f^{(J)}(x)$，並且取 $J=1,2,3,\cdots,k-1,k,k+1,\cdots,m-1,m,m+1$ 等依次對(4)式 $f(x)$ 作導函數運算，分別得到下列各階導函數式；

$$f'(x)=e^x(e^x-1)^{k-1}+(k-1)\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}$$

$$f''(x)=e^x(e^x-1)^{k-1}+3(k-1)\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}+(k-1)(k-2)\cdot e^{3x}(e^x-1)^{k-3}$$

$$\begin{aligned}f'''(x)=&\ e^x(e^x-1)^{k-1}+7(k-1)\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}\\&+6(k-1)(k-2)\cdot e^{3x}(e^x-1)^{k-3}+(k-1)(k-2)(k-3)\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}\\=&\ 1\cdot P_0^{k-1}\cdot e^x(e^x-1)^{k-1}+7\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}\\&+6\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}(e^x-1)^{k-3}+1\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f^{(4)}(x)=&\ 1\cdot P_0^{k-1}\cdot e^x(e^x-1)^{k-1}+(1+7\times2)\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}\\&+(7+6\times3)\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^x-1)^{k-3}+(6+1\times4)\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}\\&+(1+0\times5)\cdot P_4^{k-1}\cdot e^{5x}(e^x-1)^{k-5}\\=&\ 1\cdot P_0^{k-1}\cdot e^x(e^x-1)^{k-1}+15\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}\\&+25\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}(e^x-1)^{k-3}+10\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}\\&+1\cdot P_4^{k-1}\cdot e^{5x}(e^x-1)^{k-5}\end{aligned}$$

$$f^{(5)}(x)=1\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+31\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}$$

$$+90\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}(e^{x}-1)^{k-3}+65\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^{x}-1)^{k-4}$$

$$+15\cdot P_4^{k-1}\cdot e^{5x}(e^{x}-1)^{k-5}+1\cdot P_5^{k-1}\cdot e^{6x}(e^{x}-1)^{k-6}$$

$$\vdots$$

$$f^{(J)}(x)=S_1^{(J)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+S_2^{(J)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}$$

$$+S_3^{(J)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^{x}-1)^{k-3}+S_4^{(J)}\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^{x}-1)^{k-4}$$

$$+\cdots+S_u^{(J)}\cdot P_{u-1}^{k-1}\cdot e^{u\,x}(e^{x}-1)^{k-u}+S_{u+1}^{(J)}\cdot P_u^{k-1}\cdot e^{(u+1)x}(e^{x}-1)^{k-(u+1)}$$

$$+\cdots+S_J^{(J)}\cdot P_{J-1}^{k-1}\cdot e^{J\,x}(e^{x}-1)^{k-J}+S_{J+1}^{(J)}\cdot P_J^{k-1}\cdot e^{(J+1)x}(e^{x}-1)^{k-(J+1)}$$

$$f^{(J+1)}(x)=S_1^{(J)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+[S_1^{(J)}+2\cdot S_2^{(J)}]\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}$$

$$+[S_2^{(J)}+3\cdot S_3^{(J)}]\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^{x}-1)^{k-3}+\cdots$$

$$+[S_{u-1}^{(J)}+u\cdot S_u^{(J)}]\cdot P_{u-1}^{k-1}\cdot e^{u\,x}(e^{x}-1)^{k-u}$$

$$+[S_u^{(J)}+(u+1)\cdot S_{u+1}^{(J)}]\cdot P_u^{k-1}\cdot e^{(u+1)x}(e^{x}-1)^{k-(u+1)}$$

$$+\cdots+[S_{J-1}^{(J)}+J\cdot S_J^{(J)}]\cdot P_{J-1}^{k-1}\cdot e^{J\,x}\cdot(e^{x}-1)^{k-J}$$

$$+[S_J^{(J)}+(J+1)\cdot S_{J+1}^{(J)}]\cdot P_J^{k-1}\cdot e^{(J+1)x}(e^{x}-1)^{k-(J+1)}$$

$$+[S_{J+1}^{(J)}+(J+2)\cdot S_{J+2}^{(J)}]\cdot P_{J+1}^{k-1}\cdot e^{(J+2)x}(e^{x}-1)^{k-(J+2)}$$

$$=S_1^{(J+1)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+S_2^{(J+1)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}$$

$$+S_3^{(J+1)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^{x}-1)^{k-3}+\cdots+S_u^{(J+1)}\cdot P_{u-1}^{k-1}\cdot e^{u\,x}(e^{x}-1)^{k-u}$$

$$+S_{u+1}^{(J+1)}\cdot P_u^{k-1}\cdot e^{(u\,+1)x}\cdot(e^{x}-1)^{k-(u+1)}+\cdots$$

$$+S_J^{(J+1)}\cdot P_{J-1}^{k-1}\cdot e^{J\,x}\cdot(e^{x}-1)^{k-J}+S_{J+1}^{(J+1)}\cdot P_J^{k-1}\cdot e^{(J+1)x}(e^{x}-1)^{k-(J+1)}$$

$$+S_{J+2}^{(J+1)}\cdot P_{J+1}^{k-1}\cdot e^{(J+2)x}(e^{x}-1)^{k-(J+2)}$$

，此處係數記號 $S_u^{(J)}$ 是表示對 (4)式 $f(x)$ 作第 J 次導函數運算後所得出第 u 項式 $S_u^{(J)}$ $\cdot P_{u-1}^{k-1}\cdot e^{ux}(e^{x}-1)^{k-u}$ 的第 1 個係數數值，$u=1,2,3,\cdots,J,J+1,J+2$，從作出第 J 次導函數運算後再作出第 $J+1$ 次導函數運算，完成後可比對出連續運算所得的 $S_u^{(J)}$、$S_{u+1}^{(J)}$、$S_{u+1}^{(J+1)}$ 三者恰有著遞迴關係性質，即 $S_u^{(J)}+(u+1)\cdot S_{u+1}^{(J)}=S_{u+1}^{(J+1)}$，且又有初始條件 $S_1^{(J)}=S_1^{(J+1)}=1=S_1^{(1)}=S_1^{(2)}=\cdots=S_1^{(m+1)}$，$S_{J+2}^{(J)}=S_3^{(1)}=S_4^{(2)}=\cdots=S_{m+2}^{(m)}=0$，$S_{J+1}^{(J)}=S_{J+2}^{(J+1)}$ $=S_2^{(1)}=S_3^{(2)}=\cdots=S_{m+1}^{(m)}=S_{m+2}^{(m+1)}=1$。$P_u^{k-1}$ 是直線排列數。

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}f^{(m)}(x)=\ &S_1^{(m)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+S_2^{(m)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}\\&+S_3^{(m)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^{x}-1)^{k-3}+S_4^{(m)}\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^{x}-1)^{k-4}+\cdots\\&+S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^{k-1}\cdot e^{mx}(e^{x}-1)^{k-m}+S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^{k-1}\cdot e^{(m+1)x}(e^{x}-1)^{k-(m+1)}\end{aligned}$$

$$=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^{r}C_r^{k-1}\cdot(k-r)^{m}\cdot e^{(k-r)x}\tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}f^{(m+1)}(x)=\ &S_1^{(m+1)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^{x}(e^{x}-1)^{k-1}+S_2^{(m+1)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^{x}-1)^{k-2}\\&+S_3^{(m+1)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^{x}-1)^{k-3}+S_4^{(m+1)}\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^{x}-1)^{k-4}\\&+\cdots+S_m^{(m+1)}\cdot P_{m-1}^{k-1}\cdot e^{mx}\cdot(e^{x}-1)^{k-m}+S_{m+1}^{(m+1)}\cdot P_m^{k-1}\cdot e^{(m+1)x}(e^{x}-1)^{k-(m+1)}\\&+S_{m+2}^{(m+1)}\cdot P_{m+1}^{k-1}\cdot e^{(m+2)x}(e^{x}-1)^{k-(m+2)}\end{aligned}$$

(c). 由遞迴關係性質 $S_u^{(J)}+(u+1)\cdot S_{u+1}^{(J)}=S_{u+1}^{(J+1)}$，及初始條件 $S_1^{(J)}=S_1^{(J+1)}=1=S_1^{(1)}=S_1^{(2)}=\cdots=S_1^{(m+1)}$，$S_{J+2}^{(J)}=S_3^{(1)}=S_4^{(2)}=\cdots=S_{m+2}^{(m)}=0$，$S_{J+1}^{(J)}=S_{J+2}^{(J+1)}=S_2^{(1)}=S_3^{(2)}=\cdots=S_{m+1}^{(m)}$ $=S_{m+2}^{(m+1)}=1$，即可依次推演出 $f^{(J+1)}(x)$ 函數的各項係數 $S_u^{(J+1)}$ 數值。現在採用清楚分明、有規律秩序、直觀的矩陣運算法來求取 $S_u^{(J+1)}$ 數值，方法如下；

$$\begin{bmatrix} S_1^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_1^{(J)} & S_2^{(J)} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ S_2^{(J)} & 0 & S_3^{(J)} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{u-1}^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & S_u^{(J)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{J-1}^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & S_J^{(J)} & 0 & 0 \\ S_J^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & S_{J+1}^{(J)} & 0 \\ S_{J+1}^{(J)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ u \\ \vdots \\ J \\ J+1 \\ J+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(J)} \\ S_1^{(J)} + 2 \cdot S_2^{(J)} \\ S_2^{(J)} + 3 \cdot S_3^{(J)} \\ \vdots \\ S_{u-1}^{(J)} + u \cdot S_u^{(J)} \\ \vdots \\ S_{J-1}^{(J)} + J \cdot S_J^{(J)} \\ S_J^{(J)} + (J+1) \cdot S_{J+1}^{(J)} \\ S_{J+1}^{(J)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(J+1)} \\ S_2^{(J+1)} \\ S_3^{(J+1)} \\ \vdots \\ S_u^{(J+1)} \\ \vdots \\ S_J^{(J+1)} \\ S_{J+1}^{(J+1)} \\ S_{J+2}^{(J+1)} \end{bmatrix}$$

依據這樣的演算法則，可逐步一一計算得出下列矩陣運算操作流程與結果；

由(4)式 $f(x) = e^x (e^x - 1)^{k-1}$ 開始，設定出 $f(x) = S_1^{(0)} \cdot e^x (e^x - 1)^{k-1} + S_2^{(0)}$，先比對得初始值 $S_1^{(0)} = 1$，$S_2^{(0)} = 0$，再由 $f(x)$ 依次作導函數運算到 $f'(x) = S_1^{(1)} \cdot e^x \cdot (e^x - 1)^{k-1} + S_2^{(1)} \cdot P_1^{k-1} \cdot e^{2x} (e^x - 1)^{k-2}$，改成矩陣運算法 $\Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(0)} & 0 \\ S_1^{(0)} & S_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(1)} \\ S_2^{(1)} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} S_1^{(1)} & 0 & 0 \\ S_1^{(1)} & S_2^{(1)} & 0 \\ S_2^{(1)} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(2)} \\ S_2^{(2)} \\ S_3^{(2)} \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(3)} \\ S_2^{(3)} \\ S_3^{(3)} \\ S_4^{(3)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 15 \\ 25 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(4)} \\ S_2^{(4)} \\ S_3^{(4)} \\ S_4^{(4)} \\ S_5^{(4)} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 25 & 0 & 0 & 0 \\ 25 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 31 \\ 90 \\ 65 \\ 15 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(5)} \\ S_2^{(5)} \\ S_3^{(5)} \\ S_4^{(5)} \\ S_5^{(5)} \\ S_6^{(5)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 31 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 31 & 0 & 90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 65 & 0 & 0 & 0 \\ 65 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 & 0 \\ 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 63 \\ 301 \\ 350 \\ 140 \\ 21 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} S_1^{(6)} \\ S_2^{(6)} \\ S_3^{(6)} \\ S_4^{(6)} \\ S_5^{(6)} \\ S_6^{(6)} \\ S_7^{(6)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 63 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 63 & 0 & 301 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 301 & 0 & 0 & 350 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 350 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 \\ 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 \\ 21 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 127 \\ 966 \\ 1701 \\ 1050 \\ 266 \\ 28 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(7)} \\ S_2^{(7)} \\ S_3^{(7)} \\ S_4^{(7)} \\ S_5^{(7)} \\ S_6^{(7)} \\ S_7^{(7)} \\ S_8^{(7)} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{簡化後} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 255 \\ 3025 \\ 7770 \\ 6951 \\ 2646 \\ 462 \\ 36 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(8)} \\ S_2^{(8)} \\ S_3^{(8)} \\ S_4^{(8)} \\ S_5^{(8)} \\ S_6^{(8)} \\ S_7^{(8)} \\ S_8^{(8)} \\ S_9^{(8)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 511 \\ 9330 \\ 34105 \\ 42525 \\ 22827 \\ 5880 \\ 750 \\ 45 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(9)} \\ S_2^{(9)} \\ S_3^{(9)} \\ S_4^{(9)} \\ S_5^{(9)} \\ S_6^{(9)} \\ S_7^{(9)} \\ S_8^{(9)} \\ S_9^{(9)} \\ S_{10}^{(9)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1023 \\ 28501 \\ 145750 \\ 246730 \\ 179487 \\ 63987 \\ 11880 \\ 1155 \\ 55 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(10)} \\ S_2^{(10)} \\ S_3^{(10)} \\ S_4^{(10)} \\ S_5^{(10)} \\ S_6^{(10)} \\ S_7^{(10)} \\ S_8^{(10)} \\ S_9^{(10)} \\ S_{10}^{(10)} \\ S_{11}^{(10)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 2047 \\ 86526 \\ 611501 \\ 1379400 \\ 1323652 \\ 627396 \\ 159027 \\ 22275 \\ 1705 \\ 66 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^{(11)} \\ S_2^{(11)} \\ S_3^{(11)} \\ S_4^{(11)} \\ S_5^{(11)} \\ S_6^{(11)} \\ S_7^{(11)} \\ S_8^{(11)} \\ S_9^{(11)} \\ S_{10}^{(11)} \\ S_{11}^{(11)} \\ S_{12}^{(11)} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\cdots$ 持續依順序作矩陣運算，就能求出各項係數 $S_u^{(J)}$ 、 $S_u^{(J+1)}$ 值。

【待續】