

中學生通訊解題第 143-144 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

14301

已知 n 是滿足下列四個條件的正整數：

- (1) n 除以 23 之餘數為 2 (2) n 除以 27 之餘數為 15
(3) n 除以 31 之餘數為 28 (4) n 除以 35 之餘數為 6

若 n 的最小值可表示為 $\frac{1}{a}(23 \times 27 \times 31 \times 35 \times b - c)$ ，

其中 a, b, c 都是正整數， a, b 互質， $c < 1000$ ，求 a, b, c 之值。

【簡答】 $(a, b, c) = (4, 3, 291)$

【詳解】

設 n 除以 23、27、31、35 之商分別為正整數 x, y, z, u ，

則依題意知： $n = 23x + 2 = 27y + 15 = 31z + 28 = 35u + 6 = 35(u-1) + 41$ 。

觀察數列 23, 27, 31, 35 與數列 2, 15, 28, 41，兩者都是等差數列，

前者公差為 4，後者公差為 13，

因此，存在正整數 $X = 4x$ 、 $Y = 4y$ 、 $Z = 4z$ 、 $U = 4(u-1)$ ，使得

$$4n = 23X + 8 = 27Y + 60 = 31Z + 112 = 35U + 164$$

$$= 23(X+13) - 291 = 27(Y+13) - 291 = 31(Z+13) - 291 = 35(U+13) - 291,$$

而知存在正整數 W ，使 $4n = 23 \times 27 \times 31 \times 35 \times W - 291$ ，

因為「 $(23 \times 27 \times 31 \times 35 \times W - 291)$ 除以 4」與「 $W-3$ 除以 4」之餘數相同，

而 $23 \times 27 \times 31 \times 35 \times W - 291$ 為 4 的倍數，所以可取 W 的最小值為 3，

而得 n 的最小值為 $\frac{1}{4}(23 \times 27 \times 31 \times 35 \times 3 - 291)$ ，(乘開，此數為 505266)

故有序三元組 $(a, b, c) = (4, 3, 291)$ 。

【解題評析】

這是廣為人知而有「韓信點兵」之稱的數論問題，在一般情形下，若要直接尋求 n 之值，可用除法原理(一)或中國剩餘定理(二)求解，如下：

(一) 依題意可知：

$\because n$ 除以 35 之餘數為 6， $\therefore n = 35A + 6$ ；

設 $A = 31B + p$ ， $0 \leq p < 31$ ，得 $n = 35 \times 31B + 35p + 6$ ，

$\because n$ 除以 31 之餘數為 28，取 $p = 21$ ， $\therefore n = 35 \times 31B + 741$ ；

設 $B = 27C + q$ ， $0 \leq q < 27$ ，得 $n = 35 \times 31 \times 27C + 35 \times 31q + 741$ ，

$\because n$ 除以 27 之餘數為 15，取 $q = 6$ ， $\therefore n = 35 \times 31 \times 27C + 7251$ ；

設 $C = 23D + r$ ， $0 \leq r < 23$ ，得 $n = 35 \times 31 \times 27 \times 23D + 35 \times 31 \times 27r + 7251$ ，

$\because n$ 除以 23 之餘數為 2，取 $r = 17$ ， $\therefore n = 35 \times 31 \times 27 \times 23D + 505266$ ，

得 n 之最小值為 505266。

(二) 因為除數為 23、27、31、35，餘數別為 2、15、28、6，

而 $27 \times 31 \times 35 \equiv 4 \times 8 \times 12 \equiv 16 \pmod{23}$ ， $23 \times 31 \times 35 \equiv 23 \times 4 \times 8 \equiv 7 \pmod{27}$ ，

$23 \times 27 \times 35 \equiv (-8) \times (-4) \times 4 \equiv 4 \pmod{31}$ ， $23 \times 27 \times 31 \equiv 69 \times 9 \times (-4) \equiv 1 \pmod{35}$ ，

又 $(16 \times 3) \div 23$ 餘 2、 $(7 \times 6) \div 27$ 餘 15、 $(4 \times 7) \div 31$ 餘 28、 $(1 \times 6) \div 35$ 餘 6，

所以 n 之值可為

$$27 \times 31 \times 35 \times 2 + 23 \times 31 \times 35 \times 15 + 23 \times 27 \times 35 \times 28 + 23 \times 27 \times 31 \times 6 = 505266。$$

以上兩種解法的觀念都不難，可能有許多的同學也耳熟能詳，但是數字太大計算為難，當非題目設計意旨，應可另尋解題途徑。

實際上，這類問題如果除數、餘數有特別關係，那麼可以有特別的解法。

譬如：已知自然數 n 除以 5、7、9 之餘數分別為 2、4、6，則 n 之最小值為 $5 \times 7 \times 9 - 3 = 312$ ，此因除數與餘數都是公差為 2 的等差數列，進行除法運算時，若「商數」加 1，則「餘數」可各減去一個除數而兩兩相等之故。

而譬如：試求：除以 5、7、9、11 之餘數分別為 1、2、3、4 的自然數 n 。則因為除數與餘數分別所成之兩個等差數列的公差不同，所以必須相應調整，而有 $2n = 5 \times 7 \times 9 \times 11 - 3 = 3462$ ，故知 n 之最小值為 1731。

本題所設除數可排列成一等差數列，相應的餘數亦可微調而成一等差數列，因此可以數倍 n 值並調整除法「商數」，使得關於各除數的「餘數」等值，解題重點在於如何尋

找相關數據而已！題目所指明要尋找之 a, b, c 各值，其實已蘊含有解題提示。利用此一思考，我們可較為方便的處理這個韓信點兵的問題，來求得韓信兵丁總數的最小值。就解題言，本題採用「先求得 n 值，再反求 a, b, c 之值」的解法雖也可行，但是就本質言，本題之求解還是如同以上所示，藉由等差性質直接推求 a, b, c 之值為好。

問題編號

14302

求 $(\frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}-2}{\sqrt{2}})^4 + (\frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}+2}{\sqrt{2}})^4$ 的值。

【簡答】 $540-176\sqrt{7}$

【詳解】

直接計算的過程繁複，考慮以下的方法：

$$\text{設 } x = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}-2}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}+2}{\sqrt{2}}$$

$$\text{則 } x+y = \frac{\sqrt{11}+\sqrt{7}-2}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{11}-\sqrt{7}+2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{11}}{\sqrt{2}} = \sqrt{22}$$

$$\text{且 } xy = \frac{\sqrt{11}+(\sqrt{7}-2)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{11}-(\sqrt{7}-2)}{\sqrt{2}} = \frac{11-(11-4\sqrt{7})}{2} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{於是 } x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 22 - 4\sqrt{7}$$

$$\Rightarrow x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (22 - 4\sqrt{7})^2 - 56 = 540 - 176\sqrt{7}$$

【解題評析】

1. 本題徵答人數為 8 人，屬於代數簡易題目，全部答對得 7 分者有 7 人。
2. 大部份同學使用 $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2$ 的式子算出答案，基本上不要計算錯誤皆可求得正確答案。

問題編號

14303

$\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， G 為 $\triangle ABC$ 的重心，若 G 到 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 的距離和為 9 且 $\overline{AB} = 21$ ，試求 $\triangle ABC$ 的內切圓面積。

【簡答】 9π

【詳解】

取 $\overline{AB}$ 中點 O ，設 G 到 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 的垂足為 D, E ， O 到 $\overline{AC}, \overline{BC}$ 的垂足為 P, Q ，另設內切圓半徑為 r

由題意知 $\overline{CG} = 7$ ， $\overline{GD} + \overline{GE} = 9$ 且 $\overline{AC} + \overline{BC} = 27$

再由畢氏定理： $\overline{GD}^2 + \overline{GE}^2 = \overline{CG}^2$ 可得 $\overline{GD} \times \overline{GE} = 16$

$2S_{\triangle ABC} = (\overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC}) \times r = \overline{AC} \times \overline{BC} = 9 \times \overline{GD} \times \overline{GE}$

$\Rightarrow (21 + 27)r = 9 \cdot 16 \Rightarrow r = 3$ ，故所求為 9π

【解題評析】

1. 本題可使用直角三角形面積的兩種算法進而求出內切圓半徑；亦可使用點 C 至內切圓切線的切點距離等於內切圓半徑的性質求出。
2. 本題共有 7 位同學作答，均獲得滿分 7 分。

問題編號

14304

將 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 共 9 個數依據下列二條件任意分組：

每組中至少各有一個數。

非只有一個數之各組，該組中之各數兩兩互質。

問：這樣的分組方法共有幾種？

【簡答】 773

【詳解】

將 $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 依題設條件分組，必須：

$\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 兩兩不同組； $\{3, 6, 9\}$ 兩兩不同組； $\{5, 10\}$ 不同組。

今將分組過程分為三階段如下：

(1) 將 $2, 4, 6, 8, 10, 5$ 分組；(2) 載入 $3, 9$ 承(1)分組；(3) 載入 7 承(2)分組。

以下即依此規劃討論並計數：

(1) $2, 4, 6, 8, 10, 5$ 可分成 6 組或 5 組。

(2) 前階段分成 6 組時 (有 1 種分法)，載入 $3, 9$ ，

可分成 8 組 (1 種分法) 或 7 組 (2×5 種分法) 或 6 組 (5×4 種分法)；

前階段分成 5 組時 (有 4 種分法)，載入 $3, 9$ ，

可分成 7 組 (1 種分法) 或 6 組 (2×4 種分法) 或 5 組 (4×3 種分法)；

綜合以上述，可知 $2, 4, 6, 8, 10, 5, 3, 9$ 共可

分成 8 組 (1 種分法) 或 7 組 ($2 \times 5 + 4 \times 1 = 14$ 種分法)

或 6 組 ($5 \times 4 + 4 \times 2 \times 4 = 52$ 種分法) 或 5 組 ($4 \times 4 \times 3 = 48$ 種分法)。

(3) 承(2)，載入 7 ， 7 可獨成一組或併入(2)中之某一組，

故前階段分為 n 組時，本階段之 7 可有 $n+1$ 種分法。

因此， $2, 4, 6, 8, 10, 5, 3, 9, 7$ 共可分為 9 或 8 或 7 或 6 或 5 組，

全部分法有： $9 \times 1 + 8 \times 14 + 7 \times 52 + 6 \times 48 = 773$ 種。

【另解】 (洪胤軒同學的解法。謝謝！)

這 9 數中，5 個偶數先區分 5 組，再放入 4 個奇數。即分組中共有 5 個偶數組，4 個以下非偶數組 (為方便說明，以下稱之為 X)。

(1) 若分 5 組： $3, 9, 5, 7$ 共有 $4 \times 3 \times 4 \times 5 = 240$ 種分法。

(2) 若分 6 組，有一 X ：

$3, 9$ 都不放 X ， 5 放 X ，有 $4 \times 3 \times 1 \times 6 = 72$ 種分法，

5 不放 X ，有 $4 \times 3 \times 4 = 48$ 種分法；

$3, 9$ 其中一數放 X ，有 $2 \times 4 \times 5 \times 6 = 240$ 種分法。

共有 $72 + 48 + 240 = 360$ 種分法。

(3) 若分 7 組，有二 X ：

$3, 9$ 都不放 X ， $5, 7$ 放二 X ，有 $4 \times 3 = 12$ 種分法；

3, 9 其一放 X ,

5 放另一 X , 有 $2 \times 4 \times 7 = 56$ 種分法;

5 不放另一 X , 7 放另一 X , 有 $2 \times 4 \times 5 = 40$ 種分法;

3, 9 分別放二 X , 有 $6 \times 7 = 42$ 種分法。

共有 $12 + 56 + 40 + 42 = 150$ 種分法。

(4)若分 8 組, 只有一組有兩數:

9 數任選兩數有 36 種選法, 扣掉 2 的倍數 10 組, 3 的倍數 3 組,

5 的倍數 1 組, 共有 $36 - 10 - 3 - 1 = 22$ 種分法。

(5)若分 9 組, 一組一數, 共有 1 種分法。

故全部分法總數為 $240 + 360 + 150 + 22 + 1 = 773$ 。

【解題評析】

本題是組合計數問題, 只需運用乘法原理與加法原理即可得解, 數理簡易, 不難理解, 問題只在如何釐清理路適當分段、分類而已。

以上洪同學的解法, 就組數多少分類討論, 這應是同學最先且直接會想到的分類方法, 只是此法在分為 6 組或 7 組時情況較顯繁雜, 不易掌握, 洪同學詳分縷析縝密分類, 值得稱道, 可供參考。只是分類過細未免費事, 以上分為 6 組或分為 7 組之討論, 可以整合如下:

(2)若分 6 組, 則有一 X :

3, 9 都不放 X , 必須 5 或 7 放 X , 有 $4 \times 3 \times (5 \times 6 - 4 \times 5) = 120$ 種分法;

3, 9 其一放 X , 另一放偶數組, 有 $2 \times 4 \times 5 \times 6 = 240$ 種分法,

共有 $120 + 240 = 360$ 種分法。

(3)若分 7 組, 則有二 X :

3, 9 都不放 X , 必須 5, 7 分放二 X , 有 $4 \times 3 = 12$ 種分法;

3, 9 其一放 X , 必須 5 或 7 放另一 X , 有 $2 \times 4 \times (6 \times 7 - 5 \times 6) = 96$ 種分法;

3, 9 分放二 X , 有 $6 \times 7 = 42$ 種分法,

共有 $12 + 96 + 42 = 150$ 種分法。

其間理路如何, 同學可再想想。

問題編號

14305

將自然數 1 至 2018^2 填寫到一個 2018×2018 的方格表中，對於任何一個方格，能否都可以從它所在的行（或列）中，找出三個數，使得其中兩個數的乘積等於第三個數？

【簡答】 不可能

【詳解】

數 1 至 2017 至多分布在 2017 行或 2017 列中，則必可找到某一方格它所在的行和列所填的數全都不小於 2018，於是該行(該列)的任何兩個數乘積都超過 2018^2 ，所以找不到第三個數與之相等。

【解題評析】

本題有 3 人參與徵答，最高分是台北市延平高中蔡宇程同學為 3 分。同學們在論證時似乎抓不太到重點，此題的重點有兩個，其一是任何一個方格，如果這個命題是正確的，就不能只舉一個例子說明；如果命題是錯誤的，當然舉一個反例即可，其二是從方格所在的行或列找到三個數滿足，意思是只要能找到某三數滿足即可，而不是任意三數都要滿足。

問題編號

14401

若一四位數 $\overline{abcd}$ （其值為 $a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$ ）滿足 $\overline{abcd} = \overline{ab}^2 + \overline{cd}^2$ ，則稱之為「幸福數」。例如： $1233 = 12^2 + 33^2$ 。試求最大的幸福數為何？

【簡答】 8833

【詳解】

可設 x 、 y 此兩位數分別表示幸福數之前兩位數與後兩位數

由題意可知 此幸福數滿足 $x^2 + y^2 = 100x + y$

$$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 = 400x + 4y$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 400x + 10000 + 4y^2 - 4y + 1 = 10000 + 1$$

$$\text{上式可轉換為 } (2x - 100)^2 + (2y - 1)^2 = 10001$$

依據上述兩平方數總和為 10001，

因此可知兩平方數其末位數可得 $0^2+1^2, 6^2+5^2$ 兩種組合

進一步推理計算得 $(2x-100)^2+(2y-1)^2=100^2+1^2=76^2+65^2=10001$

即 $2x-100=76, 2y-1=65$ 得 $x=88, y=33$

故最大之幸福數為 8833。

【解題評析】

本題屬於代數數論中等題，透過數論當中平方數相關性質適當假設，再依題目條件解出最後正確答案。

問題編號

14402

設 a, b 是實數且 $\frac{a^4}{4a^2+5b^2}=b^2$ ，求 $\frac{a^2-b^2}{a^2+10b^2}$ 之值。

【簡答】 $\frac{4}{15}$

【詳解】

由 $\frac{a^4}{4a^2+5b^2}=b^2$ 得 $a^4-4a^2b^2-5b^4=0$ ，即 $(a^2-5b^2)(a^2+b^2)=0$ ，

但 $a^2+b^2 \neq 0$ ，否則 $4a^2+5b^2=0$ ，

所以 $a^2-5b^2=0$ ，即 $a^2=5b^2$ ，

所以 $\frac{a^2-b^2}{a^2+10b^2}=\frac{5b^2-b^2}{5b^2+10b^2}=\frac{4}{15}$ 。

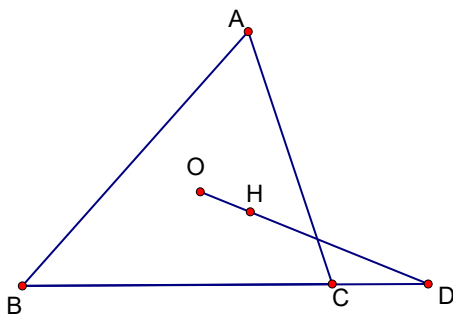
【解題評析】

本題屬於比較簡單的題目，但也要注意 a, b 是否為 0 的問題。此題共有 24 位同學作答，其中得 7 分的有 22 位、得 5 分的有 2 位。

問題編號

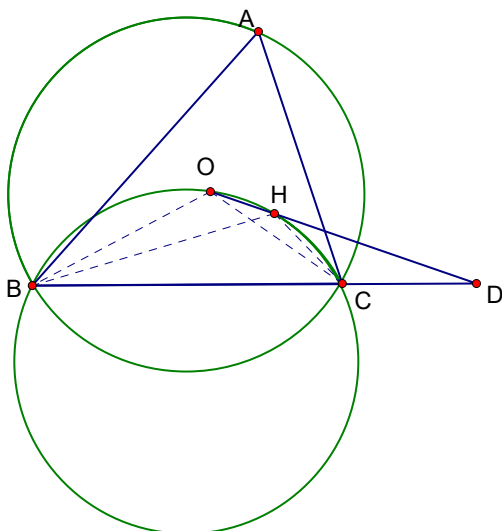
14403

銳角 $\triangle ABC$ 的外接圓圓心為 O ，半徑為 1，垂心為 H ，且 $\angle BAC = 60^\circ$ ，設直線 OH 交 $\overline{BC}$ 的延長線於點 D ，試求 $\overline{DO} \times \overline{OH}$ 。



【簡答】 1

【詳解】



- (1) $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$ ， $\angle BHC = 180^\circ - \angle BAC = 120^\circ$
 由 $\angle BOC = \angle BHC = 120^\circ$ ，知 $BOHC$ 四點共圓

利用外幕性質， $\overline{DO} \times \overline{DH} = \overline{DB} \times \overline{DC}$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，利用外幕性質， $(\overline{DO} - R) \times (\overline{DO} + R) = \overline{DB} \times \overline{DC}$ ，

其中 R 為外接圓半徑，則 $\overline{DB} \times \overline{DC} = \overline{DO}^2 - 1$

由上， $\overline{DO} \times \overline{DH} = \overline{DO}^2 - 1$

則 $\overline{DO}^2 - \overline{DO} \times \overline{DH} = 1$ ，可推得 $\overline{DO}(\overline{DO} - \overline{DH}) = 1$

故 $\overline{DO} \times \overline{OH} = 1$

【解題評析】

本題作答者有 3 人，平均得 7 分，三個人分別是台北市仁愛國中的鐘景翰同學、台北市建國高中的陳睿翊同學及新北市海山國小的尤耀星同學，三個人作答均完整，值得嘉許。這個題目的解題重點是透過四點共圓及外幕性質找到答案，國中的課程有一些與這兩個性質有關的題目，對於熟悉國中幾何的同學應該有機會可以處理的出來，可能大部分同學對於國中幾何不夠熟悉，所以作答的同學比較少。另外，有同學借用高中的正弦定理處理，也不失是一個好的方向。

問題編號

14404

將紅、橙、黃、綠、藍五種顏色塗在連續的六個正方形格子中（如圖），每格塗一色，顏色可重複使用但翻轉視為同一種塗法（例：紅橙黃綠綠藍，藍綠綠黃橙紅，視為同一種），則共有_____種不同的塗法。



【簡答】 7875

【詳解】

全部任塗有 5^6 種塗法。本身已經左右對稱的塗法有以下五類（共 $5 + 5 \times 4 + 5 \times 4 + 5 \times 4 + 5 \times 4 \times 3 = 125$ 種塗法），

故所求為 $\frac{5^6 - 125}{2} + 125 = 7875$ 。

亦可不分類，直接考慮左右對稱： $\frac{5^6 - 5^3}{2} + 5^3 = 7875$ 。

A	A	A	A	A	A
---	---	---	---	---	---

A	A	B	B	A	A
---	---	---	---	---	---

A	B	A	A	B	A
---	---	---	---	---	---

A	B	B	B	B	A
---	---	---	---	---	---

A	B	C	C	B	A
---	---	---	---	---	---

【解題評析】

本題將對稱的狀況單獨討論，可不用分成很多情形即可算出答案。
有幾位同學採正面做法分類討論，惟計算錯誤或少考慮到一些情形，酌予扣 2~3 分。有幾位同學誤解題意為每種顏色均需使用到，若答案正確酌予扣 2 分，其餘則給予部分分數。

問題編號

14405

由 6 個不同質數組成的等差數列中，求其最大項的最小可能值。

【簡答】 157

【詳解】

設等差數列為 $p, p+d, p+2d, p+3d, p+4d, p+5d$ ，

其中 p 為質數， d 為正整數。

若 $p=2$ ，則 $p+2d$ 為偶數且不為 2，不合，因此 $p>2$ 。

因此 p 為大於 2 的奇數，若 d 為奇數則 $p+d$ 為大於 2 的偶數，不合，所以 d 為偶數。

若 $p=3$ ，則 $p+3d$ 為 3 的倍數且不為 3，不合，因此 $p>3$ 。

因此 p 大於 3 且不為 3 的倍數，所以 d 必為 3 的倍數，
否則 $p+d, p+2d$ 必有一數大於 3 且為 3 的倍數。
若 $p=5$ ，則 $p+5d$ 為 5 的倍數且不為 5，不合，因此 $p>5$ 。
因此 p 大於 5 且不為 5 的倍數，所以 d 必為 5 的倍數，
否則 $p+d, p+2d, p+3d, p+4d$ 必有一數大於 5 且為 5 的倍數。
因此 $p\geq 7$ 且 d 為 30 的倍數。
取 $p=7$ 且 $d=30$ ，此 6 數為 7, 37, 67, 97, 127, 157 均為質數，
因此 157 為最大項的最小可能值。

【解題評析】

本題的解法主要是先分別找出滿足題意的首項與公差的最小值，再驗證首項與公差同時取最小值的時候此 6 數是否都是質數。
本題徵答人數 15 人，其中 2 位獲得滿分 7 分，部分同學先找到首項的最小值為 7，再設首項為 7 討論得到公差為 30 的倍數，此寫法因為沒有考慮當首項大於 7 時，公差是否有小於 30 的情況，造成論證上的瑕疵。