

一個費氏數列等式的證明與延伸

許閔揚

縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

費氏數列(Fibonacci sequence)是中學數學中常見的一個數列，它的定義簡單，但卻可以衍伸出許多性質。在數學學科中心電子報中，陳建燁老師寫了一系列關於它的文章[1,2,3]。在文章[1]中，他用了一個多項式恆等式與二項式定理證明費氏數列的等式： $nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + 1F_n = F_{n+4} - n - 3$ ，我們發現使用矩陣計算不但可以容易導出上面的數學式，還可以延伸出新的等式。

貳、費氏數列的定義與矩陣

費氏數列的定義為： $F_0 = 0$ ， $F_1 = 1$ ， $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ， $n \geq 2$ 。它的一般項可用生成函數、特徵方程，矩陣等方式解出。本文以矩陣為主要工具，利用它，我們可以很自然地推導出關於費氏數列的恆等式。

以下的引理 1 是關於矩陣計算費氏數列的理論基礎。

引理 1: [4][6]: 若 F_n 為費氏數列第 n 項，則 $\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$ ， $n \geq 1$

證明：

我們用數學歸納法來證明：

1. 當 $n=1$ ， $\begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，成立。

2. 設 $n=k$ ， $k \geq 1$ 時成立，即 $\begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k$ 。

3. 當 $n=k+1$ 時，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}。$$

得證。

參、費氏數列的等式

在本節，我們將證明以下兩個恆等式：

$$1. \quad nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + 1F_n = F_{n+4} - n - 3.$$

$$2. \quad n^2F_1 + (n-1)^2F_2 + \cdots + 1^2F_n = F_{n+7} - n^2 - 6n - 13.$$

第一個等式在陳建燁老師的文章[1]中已有介紹，我們以矩陣重新證明。第二個等式是第一個等式的延伸，證明的方式類似。

在證明恆等式 $nF_1 + (n-1)F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + 1F_n = F_{n+4} - n - 3$ 之前，我們需要先證明以下的引理 2。

$$\text{引理 2: } x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + nx = \frac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2}, x \neq 1.。$$

證明：

$$\text{令 } f(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \frac{x(1-x^n)}{1-x} \quad (1)$$

將(1)式微分，得

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \frac{[1 - (n+1)x^n](1-x) - (-1)(x - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad (2)$$

將(2)式的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代入，得

$$1 + 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{1 - (n+1) \cdot \frac{1}{x^n} + n \cdot \frac{1}{x^{n+1}}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2} \quad (3)$$

將(3)式等號兩邊同乘 x^n ，得

$$x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + nx = \frac{x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx}{(x-1)^2},$$

得證。

恆等式 1[1]. $1F_n + 2F_{n-1} + 3F_{n-2} + \cdots + nF_1 = F_{n+4} - n - 3$ 。

證明：

利用引理 2，得

$$(x-1)^2 (x^n + 2x^{n-1} + 3x^{n-2} + \cdots + nx) = x^{n+2} - (n+1)x^2 + nx \quad (4)$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ，則 $A^2 - A - I = 0$ 即 $A(A-I) = I$ 。

將 A 代入(4)式得

$$\begin{aligned} (A-I)^2 (A^n + 2A^{n-1} + 3A^{n-2} + \cdots + nA) &= A^{n+2} - (n+1)A^2 + nA \\ \Rightarrow A^{-2} (A^n + 2A^{n-1} + 3A^{n-2} + \cdots + nA) &= A^{n+2} - (n+1)A^2 + nA \\ \Rightarrow A^n + 2A^{n-1} + 3A^{n-2} + \cdots + nA &= A^{n+4} - (n+1)A^4 + nA^3, \end{aligned}$$

利用引理 1，得

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{bmatrix} + \cdots + n \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+5} & F_{n+4} \\ F_{n+4} & F_{n+3} \end{bmatrix} - (n+1) \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

比較矩陣(1,2)元，得

$$1F_n + 2F_{n-1} + 3F_{n-2} + \cdots + nF_1 = F_{n+4} - 3(n+1) + 2n = F_{n+4} - n - 3,$$

得證。

在推導恆等式 1 的結果後，我們好奇如果將等式中費氏數列前的係數 1,2,3,⋯改成 $1^2, 2^2, 3^2, \cdots$ ，即 $1^2 F_n + 2^2 F_{n-1} + 3^2 F_{n-2} + \cdots + n^2 F_1$ ，則封閉型式會是什麼呢？我們使用相同的論證方式，先推導多項式 $1^2 x^n + 2^2 x^{n-1} + 3^2 x^{n-2} + \cdots + n^2 x$ 的封閉型式，即以下的引理 3。

引理 3:

$$1^2 x^n + 2^2 x^{n-1} + 3^2 x^{n-2} + \cdots + n^2 x = \frac{x^{n+3} + x^{n+2} - (n+1)^2 x^3 + (2n^2 + 2n - 1)x^2 - n^2 x}{(x-1)^3}, x \neq 1.$$

證明:

將(2)式等號兩邊乘 x ，得

$$x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(1-x)^2} \quad (5)$$

將(5)式微分，得

$$1^2 + 2^2 x + 3^2 x^2 + \cdots + n^2 x^{n-1} = \frac{-n^2 x^{n+2} + (2n^2 + 2n - 1)x^{n+1} - (n+1)^2 x^n + x + 1}{(1-x)^3} \quad (6)$$

將(6)式的 x 用 $\frac{1}{x}$ 代入，得

$$1^2 + 2^2 \cdot \frac{1}{x} + 3^2 \cdot \frac{1}{x^2} + \cdots + n^2 \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = \frac{x^3 \cdot \left[-n^2 \cdot \frac{1}{x^{n+2}} + (2n^2 + 2n - 1) \cdot \frac{1}{x^{n+1}} - (n+1)^2 \cdot \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x} + 1 \right]}{(x-1)^3} \quad (7)$$

將(7)式等號兩邊同乘 x^n ，得

$$1^2 x^n + 2^2 x^{n-1} + 3^2 x^{n-2} + \cdots + n^2 x = \frac{x^{n+3} + x^{n+2} - (n+1)^2 x^3 + (2n^2 + 2n - 1)x^2 - n^2 x}{(x-1)^3},$$

得證。

$$\text{恆等式 2. } 1^2 F_n + 2^2 F_{n-1} + 3^2 F_{n-2} + \cdots + n^2 F_1 = F_{n+7} - n^2 - 6n - 13.$$

證明:

利用引理 3 ,

$$(x-1)^3 (1^2 x^n + 2^2 x^{n-1} + 3^2 x^{n-2} + \cdots + n^2 x) = x^{n+3} + x^{n+2} - (n+1)^2 x^3 + (2n^2 + 2n - 1)x^2 - n^2 x \quad (8)$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 將 A 代入(8)式得

$$\begin{aligned} (A-I)^3 (1^2 A^n + 2^2 A^{n-1} + 3^2 A^{n-2} + \cdots + n^2 A) &= A^{n+3} + A^{n+2} - (n+1)^2 A^3 + (2n^2 + 2n - 1)A^2 - n^2 A \\ \Rightarrow A^{-3} (1^2 A^n + 2^2 A^{n-1} + 3^2 A^{n-2} + \cdots + n^2 A) &= A^{n+3} + A^{n+2} - (n+1)^2 A^3 + (2n^2 + 2n - 1)A^2 - n^2 A \\ \Rightarrow 1^2 A^n + 2^2 A^{n-1} + 3^2 A^{n-2} + \cdots + n^2 A &= A^3 \times [A^{n+3} + A^{n+2} - (n+1)^2 A^3 + (2n^2 + 2n - 1)A^2 - n^2 A] \\ &= A^{n+6} + A^{n+5} - (n+1)^2 A^6 + (2n^2 + 2n - 1)A^5 - n^2 A^4 \end{aligned}$$

由引理 1 , 得

$$\begin{aligned} 1^2 \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} + 2^2 \begin{bmatrix} F_n & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_{n-2} \end{bmatrix} + 3^2 \begin{bmatrix} F_{n-1} & F_{n-2} \\ F_{n-2} & F_{n-3} \end{bmatrix} + \cdots + n^2 \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} F_{n+7} & F_{n+6} \\ F_{n+6} & F_{n+5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{n+6} & F_{n+5} \\ F_{n+5} & F_{n+4} \end{bmatrix} - (n+1)^2 \begin{bmatrix} F_7 & F_6 \\ F_6 & F_5 \end{bmatrix} + (2n^2 + 2n - 1) \begin{bmatrix} F_6 & F_5 \\ F_5 & F_4 \end{bmatrix} - n^2 \begin{bmatrix} F_5 & F_4 \\ F_4 & F_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

比較 (1,2)元, 得

$$1^2 F_n + 2^2 F_{n-1} + 3^2 F_{n-2} + \cdots + n^2 F_1 = F_{n+6} + F_{n+5} - n^2 - 6n - 13 = F_{n+7} - n^2 - 6n - 13 ,$$

得證。

肆、結語

在數學上有許多工具可以用來推導費氏數列的等式，例如多項式或根與係數，有興趣的讀者可參考陳建燁老師的文章[1,2]。我們的方法是先建立一個多項式恆等式，再將變數以引理 1 的矩陣代入，進而將費氏數列等式的問題轉化成矩陣計算的問題，藉由矩陣的四則運算即可得出費氏數列的等式。

參考資料：

1. 陳建燁，推導費氏數列三部曲(上)-用多項式除法，高中數學電子報第 109 期，2016 年 4 月
2. 陳建燁，推導費氏數列三部曲(中)-用根與係數關係，高中數學電子報第 109 期，2016 年 4 月
3. 陳建燁，Pascal 與 Fibonacci 的對話，高中數學電子報第 110 期，2016 年 5 月
4. 許閔揚，用矩陣來看費氏數列的一些性質，高中數學電子報第 150 期，2019 年 9 月。
5. 許閔揚，用矩陣證明費氏數列的一些性質，高中數學電子報第 151 期，2019 年 10 月。
6. G.E. Andrews, Number Theory, Dover, New York, 1994.