以均差運算法求取連續整數冪次和的多項式函數(下)

李輝濱

嘉義市私立輔仁中學退休教師

(B2). 對 (5.2)式 $f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m$ ，而在 (B1).內的(b).節裡有

$$f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^x(e^x-1)^{k-1}+ S_2^{(m)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}+ S_3^{(m)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot (e^x-1)^{k-3}+S_4^{(m)}\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}+\cdots+S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^{k-1}\cdot e^{mx}(e^x-1)^{k-m}+ S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^{k-1}\cdot e^{(m+1)x}(e^x-1)^{k-(m+1)}=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m\cdot e^{(k-r)x} \tag{5.3}$$

<B2.a> 若令 $k=m+1$ 代入(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 多項式函數中，就轉換成下式；

$$f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^m\cdot e^x(e^x-1)^m+ S_2^{(m)}\cdot P_1^m\cdot e^{2x}(e^x-1)^{m-1}+ S_3^{(m)}\cdot P_2^m\cdot e^{3x}\cdot (e^x-1)^{m-2}+S_4^{(m)}\cdot P_3^m\cdot e^{4x}(e^x-1)^{m-3}+\cdots+S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^m\cdot e^{mx}(e^x-1)+ S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^m\cdot e^{(m+1)x}= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m\cdot(m+1-r)^m\cdot e^{(m+1-r)x} \tag{5.4}$$

i). 檢視此(5.4)式中各項的組成因式，除了最末一項是 $S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^m\cdot e^{(m+1)x}$ 外，其餘各項裡都含有 $(e^x-1)^{m-i}$ 的因式成份存在， $i=0,1,2,\ \cdots,m-1$ ，對(5.4)式取 $x=0$，則所有含 $(e^x-1)^{m-i}$ 的因式項皆必然消逝為 0，僅剩下最末一項的 $S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^m\neq 0$ ，另對(5.4)式的 $f^{(m)}(x)= \sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m\cdot(m+1-r)^m\cdot e^{(m+1-r)x}$ 取 $x=0$，又得下式

$$\Rightarrow\qquad f^{(m)}(0)=S_{m+1}^{(m)}\cdot P_m^m=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m\cdot(m+1-r)^m \tag{5.5}$$

而在 (B1).內的(c).節裡有初始條件 $S_{m+1}^{(m)}=1$ ，還有 $P_m^m = m!$ ，代入(5.5)式得

$$k=m+1\text{ 時，}\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m=\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m\cdot(m+1-r)^m = m! \tag{5.6}$$

ii). 同理，在(A1).節內均差運算列表裡第 $m+1$ 階運算列的第 2 項運算表示式中的另一組合級數；

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m\cdot(m+2-r)^m = m! \tag{5.7}$$

iii). 將(5.6)式、(5.7)式推廣之，特選取冪函數： $g(x)= e^{tx}(e^x-1)^{k-1}$ (6)

t 為實數，$k \in N$ (正整數) 。則 $g(x)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1} \cdot e^{(k+t-1-r)x}$ (7)

對(6)式、(7)式分別作 m 次導函數運算，各得下式；

$$g^{(m)}(x)= S_1^{(m)} \cdot P_0^{k-1} \cdot e^{tx}(e^x-1)^{k-1} + S_2^{(m)} \cdot P_1^{k-1} \cdot e^{(t+1)x}(e^x-1)^{k-2}$$

$$+ S_3^{(m)} \cdot P_2^{k-1} \cdot e^{(t+2)x} \cdot (e^x-1)^{k-3} + S_4^{(m)} \cdot P_3^{k-1} \cdot e^{(t+3)x}(e^x-1)^{k-4}$$
$$+ \cdots + S_u^{(m)} \cdot P_{u-1}^{k-1} \cdot e^{(t+u-1)x}(e^x-1)^{k-u} +$$

$$S_{u+1}^{(m)} \cdot P_u^{k-1} \cdot e^{(t+u)x}(e^x-1)^{k-(u+1)} + \cdots + S_m^{(m)} \cdot P_{m-1}^{k-1} \cdot e^{(t+m-1)x}(e^x-1)^{k-m} +$$

$$S_{m+1}^{(m)} \cdot P_m^{k-1} \cdot e^{(t+m)x}(e^x-1)^{k-(m+1)} \qquad (6.1)$$

和 $g^{(m)}(x)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1} \cdot (k+t-1-r)^m \cdot e^{(k+t-1-r)x}$ (7.1)

此處 $S_u^{(m)}=S_u^{(m)}(t)$ 都是 t 的函數，且有 $S_1^{(m)}=t^m$ ，$S_{m+1}^{(m)}=1$ ，又有遞迴關係性質：$S_u^{(m-1)}+(t+u)\cdot S_{u+1}^{(m-1)} = S_{u+1}^{(m)}$ ，再令 $k=m+1$ 代入(6.1)式、(7.1)式的 $g^{(m)}(x)$ 多項式函數中，再完全仿效 i).節的整體標準推演流程，仔細對應操作運算，最後得廣義的一般化組合級數： $\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^m \cdot (m+t-r)^m = m!$ (8)

此處 t 為實數，$m \in N$ (正整數) 。

當取 t=1，(8)式即轉換為 (5.6)式。換成取 t=2，(8)式即轉換為(5.7)式。

<B2.b> 若令 $k>m+1$ ，則 $k-(m+1) \ge 1$ ，對(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 多項式函數中檢視其所有各項，見到每一項裡都含有 $(e^x-1)^{k-i}$ 的因式成份存在， $i=1,2,\cdots,m+1$ ，對(5.3)式取 $x=0$，則所有含$(e^x-1)^{k-i}$ 的因式項皆必然消逝為 0，因此對(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 其 $f^{(m)}(0)=0$ 且對 (5.2)式的 $f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1} \cdot (k-r)^m$ ， 以聯立關係可得；

$(k-1)>m$ 時 ，$\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1} \cdot (k-r)^m = 0$ (9)

若取正整數 J ，使 $J=(k-1)>m$ 時 ，$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+1-r)^m = 0$ (10)

同理，又可推廣(9)式、(10)式成為下列不同的另一類型廣義的一般化組合級數：

$$\sum_{r=0}^{J}(-1)^r C_r^J \cdot (J+t-r)^m = 0 \quad ,\ J>m\ge 0\ ,\ t\in R\ ,\ J, m\in N \qquad (11)$$

只要選取另一型冪函數 $h(x)= e^{tx}(e^x-1)^J$ 即可仿效推演出來。(省略證明)

<B2.c> 若令 $k<m+1$ ，即 $1\le k<m+1$ ，得 $k=1,2,\cdots,m$ ，現在一一檢視；

i). $k=1$ 時， (5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有第 1 項存在為 $f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^0\cdot e^x = C_0^0\cdot 1^m\cdot e^x \quad\Rightarrow$ 取 $x=0$ 時，$f^{(m)}(0)=S_1^{(m)}\cdot P_0^0=1=1\cdot 0!$ (12.1)

ii). $k=2$ 時，(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有第 1、2 項存在為 $f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^1\cdot e^x(e^x-1)+ S_2^{(m)}\cdot P_1^1\cdot e^{2x} \quad\Rightarrow$ 取 $x=0$ 時，$f^{(m)}(0)= S_2^{(m)}\cdot P_1^1 = S_2^{(m)}\cdot 1! \quad\Rightarrow$

$$f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{1}(-1)^r C_r^1\cdot(2-r)^m = 2^m-1= S_2^{(m)}\cdot 1! \tag{12.2}$$

iii). $k=3$ 時， (5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有最前面的第 1、2、3 項存在，其形式為

$$f^{(m)}(x)=S_1^{(m)}\cdot P_0^2\cdot e^x(e^x-1)^2+ S_2^{(m)}\cdot P_1^2\cdot e^{2x}(e^x-1)+ S_3^{(m)}\cdot P_2^2\cdot e^{3x} \quad\Rightarrow$$

取 $x=0$ 時，$f^{(m)}(0)= S_3^{(m)}\cdot P_2^2 = S_3^{(m)}\cdot 2! \quad\Rightarrow$

$$f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{2}(-1)^r C_r^2\cdot(3-r)^m = 3^m-2\cdot 2^m+1 = S_3^{(m)}\cdot 2! \tag{12.3}$$

iv). $k=4$ 時， (5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有最前面的第 1、2、3、4 項存在，其形式為

$$f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^3\cdot e^x(e^x-1)^3+ S_2^{(m)}\cdot P_1^3\cdot e^{2x}(e^x-1)^2+ S_3^{(m)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^x-1)$$
$$+ S_4^{(m)}\cdot P_3^3\cdot e^{4x} \quad\Rightarrow$$ 取 $x=0$ 時，$f^{(m)}(0)= S_4^{(m)}\cdot P_3^3 = S_4^{(m)}\cdot 3! \quad\Rightarrow$

$$f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{3}(-1)^r C_r^3\cdot(4-r)^m = 4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1 = S_4^{(m)}\cdot 3! \tag{12.4}$$

$$\vdots$$

v). $k=k$ 時，(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有最前面的第 1、2、⋯、k 項存在，形式為

$$\begin{aligned}f^{(m)}(x)= {} & S_1^{(m)}\cdot P_0^{k-1}\cdot e^x(e^x-1)^{k-1}+ S_2^{(m)}\cdot P_1^{k-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{k-2}\\ & + S_3^{(m)}\cdot P_2^{k-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^x-1)^{k-3}+S_4^{(m)}\cdot P_3^{k-1}\cdot e^{4x}(e^x-1)^{k-4}\\ & + \cdots +S_{k-2}^{(m)}\cdot P_{k-3}^{k-1}\cdot e^{(k-2)x}(e^x-1)^2\\ & + S_{k-1}^{(m)}\cdot P_{k-2}^{k-1}\cdot e^{(k-1)x}(e^x-1)+ S_k^{(m)}\cdot P_{k-1}^{k-1}\cdot e^{kx} \quad\Rightarrow\end{aligned}$$

取 $x=0$ 時， $f^{(m)}(0)= S_k^{(m)}\cdot P_{k-1}^{k-1}= S_k^{(m)}\cdot(k-1)! \quad\Rightarrow$

$$f^{(m)}(0)=\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m = S_k^{(m)}\cdot(k-1)! \tag{12.5}$$

$$\vdots$$

vi). $k=m$ 時，(5.3)式的 $f^{(m)}(x)$ 只有最前面的第 1、2、⋯、m 項存在，形式為

$$f^{(m)}(x)= S_1^{(m)}\cdot P_0^{m-1}\cdot e^x(e^x-1)^{m-1}+ S_2^{(m)}\cdot P_1^{m-1}\cdot e^{2x}(e^x-1)^{m-2}$$

$$+S_3^{(m)}\cdot P_2^{m-1}\cdot e^{3x}\cdot(e^x-1)^{m-3}+\ \cdots\ +\ S_{m-1}^{(m)}\cdot P_{m-2}^{m-1}\cdot e^{(m-1)x}(e^x-1)+\ S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^{m-1}\cdot e^{m\,x}$$

$\Rightarrow$ 取 $x=0$ 時， $f^{(m)}(0)=\ S_m^{(m)}\cdot P_{m-1}^{m-1}=\ S_m^{(m)}\cdot(m-1)\,!$ $\Rightarrow$

$$f^{(m)}(0)=\ \sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}\cdot(m-r)^m=\ S_m^{(m)}\cdot(m-1)\,! \tag{12.6}$$

至此，(12.5)式、(12.6)式已完整證明計算出 $k=1,2,\ \cdots\ ,m$ 的所有情形產生出不同的個別數值為 $\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}\cdot(k-r)^m=\ S_k^{(m)}\cdot(k-1)\,!$ ，而一筆重要的特徵是此處的各 $S_k^{(m)}$ 值恰為前述標題(B1).內的(c).節裡作 m 階矩陣運算所得出的一系列數值。因此，得標題(B).的代表式 $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\ !}=\ \dfrac{S_k^{(m)}\cdot(k-1)!}{k\ !}$ ，所以，標題(A1).均差運算列表裡的各階運算列第 1 項數值 $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\ !}$ 代表式都可由數值 $\dfrac{S_k^{(m)}\cdot(k-1)!}{k\ !}=\dfrac{S_k^{(m)}}{k}$ 以持續矩陣運算法直接得到。

[C]. 連續正整數等冪次求和 $\sum_{k=1}^{n}k^m=f(n)=\sum_{i=0}^{m+1}\ a_i n^i$ 的運算操作法：文獻[6]

以新觀點來推演求取 $\sum_{k=1}^{n}k^m=f(n)=\sum_{i=0}^{m+1}\ a_i n^i$ 多項式函數；回到標題(A1).均差運算列表裡首先截取各階運算列第 1 項數值，配合 $\dfrac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\ !}=\dfrac{S_k^{(m)}}{k}$ 並依序按各階運算列鋪排，得下列所期盼的(C1).新型基底操作運算列表。

(C1). 新型基底操作運算列表； (僅需保留各階運算列第 1 項數值)

k：	0	1	2	3	4	$\cdots$	m	$m+1$	
f：	0	1	$1+2^m$	$\sum_{k=0}^{3}k^m$	$\sum_{k=0}^{4}k^m$	$\cdots$	$\sum_{k=0}^{m}k^m$	$\sum_{k=0}^{m+1}k^m$	
1 階：	1	2^m	3^m	4^m	5^m	$\cdots$	m^m	$(m+1)^m$	
2 階：	$\dfrac{2^m-1}{2}=\dfrac{S_2^{(m)}}{2}$								
3 階：	$\dfrac{3^m-2\cdot 2^m+1}{6}=\dfrac{S_3^{(m)}}{3}$								

4 階：
$$\frac{4^m-3\cdot 3^m+3\cdot 2^m-1}{24}=\frac{S_4^{(m)}}{4}$$

5 階：
$$\frac{5^m-4\cdot 4^m+6\cdot 3^m-4\cdot 2^m+1}{120}=\frac{S_5^{(m)}}{5}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

k 階：$(1\le k\le m+1)$
$$\frac{\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r C_r^{k-1}(k-r)^m}{k\,!}=\frac{S_k^{(m)}}{k}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

m 階：
$$\frac{\sum_{r=0}^{m-1}(-1)^r C_r^{m-1}(m-r)^m}{m\,!}=\frac{S_m^{(m)}}{m}$$

$m+1$ 階：
$$\frac{\sum_{r=0}^{m}(-1)^r C_r^{m}(m+1-r)^m}{(m+1)\,!}=\frac{1}{m+1}$$

由此新型基底列表可得知這多項式函數的常數項為 $0=a_0$，接著要作均差運算逆推來求取 1 次數項係數；由下往上，先將第 m 階與第 $m+1$ 階這 2 列數值前各填加 1 個數 $b_{m,m}$ 與 $b_{m+1,m+1}$，如下；

m 階：　$b_{m,m}$　$\frac{S_m^{(m)}}{m}$

$m+1$ 階：　$b_{m+1,m+1}$　$\frac{1}{m+1}$

因第 $m+1$ 階運算列是常數數列，故 $b_{m+1,m+1}=\frac{1}{m+1}$，再由均差運算法可得 $\frac{S_m^{(m)}}{m}-b_{m,m}=m\cdot b_{m+1,m+1}=\frac{m}{m+1}\quad\Rightarrow\quad b_{m,m}=\frac{S_m^{(m)}}{m}-\frac{m}{m+1}$，繼續再求第 $m-1$ 階列的 $b_{m-1,m-1}$ 數值，由第 $m-1$ 階與第 m 階的均差運算法可得 $\frac{S_{m-1}^{(m)}}{m-1}-b_{m-1,m-1}=(m-1)\cdot b_{m,m}=(m-1)\cdot(\frac{S_m^{(m)}}{m}-\frac{m}{m+1})\quad\Rightarrow\quad b_{m-1,m-1}=\frac{S_{m-1}^{(m)}}{m-1}-(m-1)\cdot(\frac{S_m^{(m)}}{m}-\frac{m}{m+1})$，⋯ 持續如此做同類的逆推均差運算，直到計算出第 1 階列的 $b_{1,1}$ 數值為止，此 $b_{1,1}$ 數值即為 1 次數項係數 a_1 而得出下列的(C2).均差運算表。

(C2). 由下而上自 $b_{m+1,m+1}$ 起作逆推均差運算而得 1 次數項係數 $b_{1,1}$ 的操作表；

k：	0	1	2	3	4	⋯	m	$m+1$
f：	0	1						

1 階：　$b_{1,1}$　1

2 階：　$b_{2,2}$　$\dfrac{S_2^{(m)}}{2}$

3 階：　$b_{3,3}$　$\dfrac{S_3^{(m)}}{3}$

4 階：　$b_{4,4}$　$\dfrac{S_4^{(m)}}{4}$

5 階：　$b_{5,5}$　$\dfrac{S_5^{(m)}}{5}$

$\vdots$　$\vdots$　$\vdots$

k 階：$(1 \le k \le m+1)$　$b_{k,k}$　$\dfrac{S_k^{(m)}}{k}$

$\vdots$　$\vdots$　$\vdots$

m 階：　$b_{m,m}$　$\dfrac{S_m^{(m)}}{m}$

$m+1$ 階：　$\dfrac{1}{m+1}$　$\dfrac{1}{m+1}$

接著要作均差運算逆推來求取 2 次數項係數；由下往上，先將第 m 階與第 $m+1$ 階這 2 列數值前各填加 1 個數 $b_{m,m-1}$ 與 $b_{m+1,m}$ ，如下；

m 階：　$b_{m,m-1}$　$b_{m,m}$　$\dfrac{S_m^{(m)}}{m}$

$m+1$ 階：　$b_{m+1,m}$　$b_{m+1,m+1}$　$\dfrac{1}{m+1}$

因第 $m+1$ 階運算列是常數數列，故 $b_{m+1,m} = \dfrac{1}{m+1}$，再由均差運算法可得 $b_{m,m} - b_{m,m-1}$ $= (m-1)\cdot b_{m+1,m} = \dfrac{m-1}{m+1} \quad \Rightarrow \quad b_{m,m-1} = b_{m,m} - \dfrac{m-1}{m+1} = \dfrac{S_m^{(m)}}{m} - \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{m-1}{m+1}$，繼續再求第 $m-1$ 階列的 $b_{m-1,m-2}$ 數值，由第 $m-1$ 階與第 m 階的均差運算法可得 $b_{m-1,m-1} - b_{m-1,m-2} =$ $(m-2)\cdot b_{m,m-1} = (m-2)\cdot(\dfrac{S_m^{(m)}}{m} - \dfrac{m}{m+1} - \dfrac{m-1}{m+1}) \quad \Rightarrow$

$$b_{m-1,m-2} = b_{m-1,m-1} - (m-2)\cdot(\frac{S_m^{(m)}}{m} - \frac{m}{m+1} - \frac{m-1}{m+1}) = \frac{S_{m-1}^{(m)}}{m-1} - (m-1)\cdot(\frac{S_m^{(m)}}{m} - \frac{m}{m+1})$$

$-(m-2)\cdot(\dfrac{S_m^{(m)}}{m}-\dfrac{m}{m+1}-\dfrac{m-1}{m+1})$ ，⋯持續如此做同類的逆推均差運算，直到算出第 2 階列的 $b_{2,1}$ 數值為止，此 $b_{2,1}$ 數值即為 2 次數項係數 a_2 而得出下列(C3).表。

(C3). 由下而上自 $b_{m+1,m}$ 起作逆推均差運算而得 2 次數項係數 $b_{2,1}$ 的操作表；

k ：	0	1	2	3	4	⋯	m	$m+1$
f :	0	1						
1 階：	$b_{1,1}$	1						
2 階：	$b_{2,1}$	$b_{2,2}$	$\dfrac{S_2^{(m)}}{2}$					
3 階：	$b_{3,2}$	$b_{3,3}$	$\dfrac{S_3^{(m)}}{3}$					
4 階：	$b_{4,3}$	$b_{4,4}$	$\dfrac{S_4^{(m)}}{4}$					
5 階：	$b_{5,4}$	$b_{5,5}$	$\dfrac{S_5^{(m)}}{5}$					
	⋮	⋮	⋮					
k 階：	$b_{k,k-1}$	$b_{k,k}$	$\dfrac{S_k^{(m)}}{k}$					
	⋮	⋮	⋮					
m 階：	$b_{m,m-1}$	$b_{m,m}$	$\dfrac{S_m^{(m)}}{m}$					
$m+1$ 階：	$\dfrac{1}{m+1}$	$\dfrac{1}{m+1}$	$\dfrac{1}{m+1}$					

⋯ 持續如此運作逆推均差運算而製作出第 3 階列的 $b_{3,1}$ 數值、第 4 階列的 $b_{4,1}$ 數值、⋯，直到計算出第 $m-1$ 階列的 $b_{m-1,1}$ 數值、第 m 階列的 $b_{m,1}$ 數值為止，終而得到多項式函數所有完整的各次數項係數，這樣就能直觀推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^m = f(n) = \sum_{i=0}^{m+1} a_i n^i$ 的 $m+1$ 次數多項式函數，只要取定 m 的確切數值。再參閱下列範例；

(C4). $m=11$ 的範例：求取 $\sum_{k=1}^{n} k^{11} = f(n) = \sum_{i=0}^{12} a_i n^i$ 多項式函數；文獻[6]

在前述標題(B1).內的(c).節裡有以矩陣運算法求出的 $S_k^{(11)}$ 各數值，為 $S_1^{(11)}=1$，$S_2^{(11)}=2047$， $S_3^{(11)}=86526$， $S_4^{(11)}=611501$， $S_5^{(11)}=1379400$， $S_6^{(11)}=1323652$，

$S_7^{(11)} = 627396$，$S_8^{(11)} = 159027$，$S_9^{(11)} = 22275$，$S_{10}^{(11)} = 1705$，$S_{11}^{(11)} = 66$，$S_{12}^{(11)} = 1$，
將此 12 個 $S_k^{(11)}$ 各數值代入(C1).節內的新型基底操作運算列表，得列表如下；

k ： 0 1 2 3 4 $\cdots$ 11 12

f : 0 1 $1+2^{11}$ $1+2^{11}+3^{11}$ $\cdots$

1 階： $b_{1,1}$ 1

2 階： $b_{2,2}$ $\dfrac{2047}{2}$

3 階： $b_{3,3}$ $\dfrac{86526}{3} = 28842$

4 階： $b_{4,4}$ $\dfrac{611501}{4}$

5 階： $b_{5,5}$ $\dfrac{1379400}{5} = 275880$

6 階： $b_{6,6}$ $\dfrac{1323652}{6} = \dfrac{661826}{3}$

7 階： $b_{7,7}$ $\dfrac{627396}{7} = 89628$

8 階： $b_{8,8}$ $\dfrac{159027}{8}$

9 階： $b_{9,9}$ $\dfrac{22275}{9} = 2475$

10 階： $b_{10,10}$ $\dfrac{1705}{10} = \dfrac{341}{2}$

11 階： $b_{11,11}$ $\dfrac{66}{11} = 6$

12 階： $b_{12,12}$ $\dfrac{1}{12}$

由此新型基底列表可得知這多項式函數的常數項為 0，接著要作均差運算逆推來求取各次數項係數；仿效(C1).、(C2).、(C3).的操作過程，由下往上，逐步計算出此多項式函數的各次數項係數，演算列表的完整正確數據結果如下所示；

f：　0　1　$1+2^{11}$　$1+2^{11}+3^{11}$　$\cdots$

1 階：　0　1

2 階：　$\frac{5}{12}$　1　$\frac{2047}{2}$

3 階：　0　$\frac{7}{12}$　$\frac{2045}{4}$　28842

4 階：　$-\frac{11}{8}$　$\frac{7}{12}$　$\frac{766}{3}$　$\frac{113323}{12}$　$\frac{611501}{4}$

5 階：　0　$\frac{47}{24}$　$\frac{1019}{8}$　$\frac{12251}{4}$　$\frac{430295}{12}$　275880

6 階：　$\frac{11}{6}$　$\frac{47}{24}$　$\frac{1505}{24}$　$\frac{23483}{24}$　$\frac{196771}{24}$　$\frac{576053}{12}$　$\frac{661826}{3}$

7 階：　0　$\frac{1}{8}$　$\frac{243}{8}$　$\frac{1221}{4}$　$\frac{21661}{12}$　$\frac{63689}{8}$　$\frac{230139}{8}$　89628

8 階：　$-\frac{11}{8}$　$\frac{1}{8}$　$\frac{121}{8}$　$\frac{733}{8}$　$\frac{8999}{24}$　$\frac{29549}{24}$　$\frac{83225}{24}$　$\frac{69555}{8}$　$\frac{159027}{8}$

9 階：　0　$\frac{3}{2}$　$\frac{15}{2}$　$\frac{51}{2}$　$\frac{425}{6}$　$\frac{685}{4}$　$\frac{1491}{4}$　$\frac{2240}{3}$　1398　2475

10 階：　$\frac{11}{12}$　$\frac{3}{2}$　3　6　$\frac{34}{3}$　$\frac{241}{12}$　$\frac{403}{12}$　$\frac{641}{12}$　$\frac{977}{12}$　$\frac{359}{3}$　$\frac{341}{2}$

11 階：　$\frac{1}{2}$　$\frac{7}{12}$　$\frac{3}{4}$　1　$\frac{4}{3}$　$\frac{7}{4}$　$\frac{27}{12}$　$\frac{17}{6}$　$\frac{7}{2}$　$\frac{17}{4}$　$\frac{61}{12}$　6

12 階：　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$

依據此列表直接取出各階的第 1 個數值按序為 $\frac{1}{12}$、$\frac{1}{2}$、$\frac{11}{12}$、0、$-\frac{11}{8}$、0、$\frac{11}{6}$、0、$-\frac{11}{8}$、0、$\frac{5}{12}$、0、0 等，再將這 13 個係數一併組合成下述完整的多項式函數 $\sum_{k=1}^{n} k^{11}=f(n)=\frac{1}{12}n^{12}+\frac{1}{2}n^{11}+\frac{11}{12}n^{10}-\frac{11}{8}n^{8}+\frac{11}{6}n^{6}-\frac{11}{8}n^{4}+\frac{5}{12}n^{2}$，至此，明確有條理地找到了 $\sum_{k=1}^{n} k^{11}=f(n)=\sum_{i=0}^{12} a_i n^i$ 的 12 次數多項式公式。

(C5). $m=12$ 的範例：求取 $\sum_{k=1}^{n} k^{12} = f(n) = \sum_{i=0}^{13} a_i n^i$ 多項式函數；文獻[6]

繼續以 $S_k^{(11)}$ 各數值再求出 $S_k^{(12)}$ 各數值，$S_k^{(11)}$ 各數值寫成單一列的矩陣型式如下；

[1 2047 86526 611501 1379400 1323652 627396 159027 22275 1705 66 1]，以遞迴關係性質算出 $S_k^{(12)}$ 的 13 個數值 $\Rightarrow$ [1 4095 261625 2532530 7508501 9321312 5715424 1899612 359502 39325 2431 78 1]，再仿效(C4).節的演算列表操作過程而得出下表完整正確數據；

k : 0 1 2 3 $\cdots$ 12 13

f : 0 1 $1+2^{12}$ $1+2^{12}+3^{12}$ $\cdots$

$$\frac{-691}{2730} \quad 1$$

$$0 \quad \frac{3421}{2730} \quad \frac{4095}{2}$$

$$\frac{5}{3} \quad \frac{3421}{2730} \quad \frac{2793127}{2730} \quad \frac{261625}{3}$$

$$0 \quad \frac{-1129}{2730} \quad \frac{464951}{910} \quad \frac{26142847}{910} \quad \frac{1266265}{2}$$

$$\frac{-33}{10} \quad \frac{-1129}{2730} \quad \frac{697991}{2730} \quad \frac{12838948}{1365} \quad \frac{68750966}{455} \quad \frac{750851}{5}$$

$$0 \quad \frac{1576}{546} \quad \frac{69912}{546} \quad \frac{1665327}{546} \quad \frac{19341395}{546} \quad \frac{24580905}{91} \quad 1553552$$

$$\frac{22}{7} \quad \frac{1576}{546} \quad \frac{34168}{546} \quad \frac{531805}{546} \quad \frac{4419017}{546} \quad \frac{25628807}{546} \quad \frac{116792327}{546} \quad \frac{5715424}{7}$$

$$0 \quad \frac{-10}{39} \quad \frac{2328}{78} \quad \frac{23697}{78} \quad \frac{138829}{78} \quad \frac{100999}{13} \quad \frac{361760}{13} \quad \frac{6714505}{78} \quad \frac{474903}{2}$$

$$\frac{-11}{6} \quad \frac{-10}{39} \quad \frac{1174}{78} \quad \frac{7123}{78} \quad \frac{28783}{78} \quad \frac{932433}{78} \quad \frac{260761}{78} \quad \frac{649135}{78} \quad \frac{1475839}{78} \quad \frac{119834}{3}$$

$$0 \quad \frac{41}{26} \quad \frac{199}{26} \quad \frac{661}{26} \quad \frac{1805}{26} \quad \frac{2155}{13} \quad \frac{4648}{13} \quad \frac{9247}{13} \quad \frac{17223}{13} \quad \frac{60735}{26} \quad \frac{7865}{2}$$

$$1 \quad \frac{41}{26} \quad \frac{79}{26} \quad \frac{77}{13} \quad 11 \quad \frac{501}{26} \quad \frac{831}{26} \quad \frac{657}{13} \quad \frac{997}{13} \quad \frac{2921}{26} \quad \frac{4151}{26} \quad 221$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{15}{26}\quad\frac{19}{26}\quad\frac{25}{26}\quad\frac{33}{26}\quad\frac{43}{26}\quad\frac{55}{26}\quad\frac{69}{26}\quad\frac{85}{26}\quad\frac{103}{26}\quad\frac{123}{26}\quad\frac{145}{26}\quad\frac{13}{2}$$

$$\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{13}$$

依據此列表直接取出各階的第 1 個數值按序為 $\frac{1}{13}$、$\frac{1}{2}$、1、0、$-\frac{11}{6}$、0、$\frac{22}{7}$、0、$-\frac{33}{10}$、0、$\frac{5}{3}$、0、$-\frac{691}{2730}$、0 等，再將這 14 個係數一併組合成下述完整的多項式 $\sum_{k=1}^{n}k^{12}=f(n)=\frac{1}{13}n^{13}+\frac{1}{2}n^{12}+n^{11}-\frac{11}{6}n^{9}+\frac{22}{7}n^{7}-\frac{33}{10}n^{5}+\frac{5}{3}n^{3}-\frac{691}{2730}n$，至此，又找到了 $\sum_{k=1}^{n}k^{12}=f(n)=\sum_{i=0}^{13}a_i n^i$ 的 13 次數多項式函數公式。

繼續以 $S_k^{(12)}$ 各數值再求出 $S_k^{(13)}$ 各數值，$S_k^{(14)}$ 各數值，…，$S_k^{(m)}$ 各數值，…，$m=1,2,3,\ \cdots$，即可依序列表逐一算出 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=f(n)=\sum_{i=0}^{m+1}a_i n^i$ 的公式。

參、結論

1. 主題演繹內容的首要任務是先推算出 $S_k^{(m)}/k$ 各數值並依序按照各階運算列逐列鋪排，得出(C1).節的新型基底操作運算列表。接著再仿效(C2).、(C3).節規則逐步作逆推均差運算，最終即能完成如(C4).、(C5).節的 $m+1$ 次數多項式公式。
2. 各項係數 $S_k^{(m)}$、$S_k^{(m+1)}$ 值無法以作跳躍式任意 m 值的矩陣運算而一蹴可及，必須自始至終依序由 $S_k^{(1)}\Rightarrow S_k^{(2)}\Rightarrow S_k^{(3)}\Rightarrow\cdots\ \Rightarrow S_k^{(m-1)}\Rightarrow S_k^{(m)}$ 逐階一一作運算才能獲得，使得任一 $S_k^{(m)}$ 值無法寫出通式，(只有前後各幾個數值可以)，因此一般化連續正整數等冪次求和 $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=f(n)=\sum_{i=0}^{m+1}a_i n^i$ 的多項式函數公式無法以明確通式型態被推算展現出來。
3. $\sum_{k=1}^{n}k^{m}=f(n)=\sum_{i=0}^{m+1}a_i n^i$ 的多項式函數其首項係數必為 $a_{m+1}=\frac{1}{m+1}$，而 $a_m=\frac{1}{2}$，係因(C3).節列表中的第 m 階 $\frac{S_m^{(m)}}{m}$ 數值與第 $m+1$ 階的 $\frac{1}{m+1}$ 值向左依序逐一作持續

的均差運算，最後得 $b_{m,1}=\dfrac{S_m^{(m)}}{m}-\dfrac{1}{m+1}\left(\sum_{i=1}^{m} i\right)=\dfrac{m+1}{2}-\dfrac{1}{m+1}\cdot\dfrac{m(m+1)}{2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ $b_{m,1}=\dfrac{1}{2}=a_m$ 是個固定值，況且當 m 值是偶數時，$a_{m-2}=a_{m-4}=a_{m-6}=\cdots=a_6=a_4=a_2=a_0=0$，當 m 值是奇數時，$a_{m-2}=a_{m-4}=a_{m-6}=\cdots=a_5=a_3=a_1=a_0=0$，美妙的是這類係數與 0 係數值分佈的位置甚有規律性！這也是相關伯努利數的特徵。

參考文獻

1. 以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解，李維昌 數學傳播 44 卷 1 期，pp.94-96，2020 年 3 月 。
2. 連續整數冪次和公式的另類思考，李政豐 數學傳播 26 卷 2 期 2002 年 6 月
3. 級數求和法， 中正大學余文卿教授在西松高中演講稿。
4. 一些發散級數的求和法， 余文卿 數學傳播 22 卷 4 期 1998 年 12 月。
5. Bernoulli 多項式與連續冪次和探討，鍾承道 數學傳播 (138)期 2011 年 6 月。
6. 以新增數據點(0,?)及逆推均差運算列表法直取多項式函數，李輝濱 科學教育月刊(國立臺灣師範大學 科學教育中心) 440 期，2021 年 7 月出版發行。
7. 笹部貞市郎 : 幾何學、代數學辭典 1988 九章出版社。
8. Weisstein, Eric W. (4 January 2016), "Bernoulli Number", MathWorld, Wolfram, retrieved 2 July 2017.

【完】