

索末菲氫原子模型

鄧新弘

臺北市立建國高級中學

壹、前言

筆者的學生曾提出一個很好的問題：考量電力與重力的相似性，既然行星可以繞著太陽做橢圓運動，為什麼波耳會假設氫原子軌道是圓形，而非橢圓形？

這讓筆者有了撰寫此文的動機，希望能夠對索末菲原子模型能有個初步的介紹，供作中學教師對教學上的參考。

20 世紀初，古典物理受到了許多實驗上的挑戰，物理學家們不禁想著在這些實驗現象的背後，是否暗藏著大自然的規律。1913 年，波耳提出了波耳氫原子模型，得以解釋氫原子光譜不連續的實驗特性，但卻無法解釋賽曼效應（Zeeman effect）：當原子在外加均勻磁場下，光譜線出現分裂的現象。亦無法說明斯塔克效應（Stark effect）：當原子在外加均勻電場下，光譜線出現分裂的現象。而且隨著原子光譜實驗領域技術的進步，實驗學家發現精細結構現象（fine structure）：就算沒有外加的場作用，原本看起來只有一條的光譜線，事實上是有多條間距很小的譜線構成。實驗上發現的種種現象，暗示波耳氫原子模型不能夠完整地解釋氫原子光譜實驗。

“Will you also apply your atom model to the Zeeman effect?” 出現在波耳收到的一封信中，而這封信來自於當時已頗具盛名的物理學家索莫菲，顯現出他對這個課題的高度興趣。在接下來的幾年，索末菲設法修正波耳氫原子模型，讓它能夠解釋更多的實驗現象。

本文主要在介紹二維平面的索末菲模型如何計算出氫原子光譜的精細結構。一開始先簡介波耳氫原子模型的推論，接下來分為兩部分在講述索末菲氫原子模型：第一部分先探討橢圓軌道、第二部分才引進狹義相對論的修正。至於推廣成三維空間的索末菲模型如何去解釋賽曼效應以及斯塔克效應，本文不做詳細探討。

貳、波耳氫原子模型

1913 年，波耳為了解釋實驗上氫原子光譜不連續的特性，提出了波耳氫原子模型。而這模型是建立在兩個洞見的假設上，去修正拉塞福模型。這兩假設分別為：（一）電子只有在特定軌道上穩定地環繞原子核作圓周運動，其角動量滿足量子化條件 $L = n\hbar$ ， n 為正整數。（二）電子能夠藉由吸收或放出單一顆光子，在不同能階中躍遷。從模型可推論出，電子處在不同能態的能量以及繞行半徑。

$$\text{能量量子化: } E_n = -\frac{2\pi^2mk^2e^4}{h^2} \frac{1}{n^2} \simeq -\frac{13.6}{n^2} (eV) \quad (1)$$

$$\text{半徑量子化: } r_n = \frac{h^2}{4\pi^2mke^2} n^2 \simeq 0.53n^2 (\text{\AA}) \quad (2)$$

並進而能解釋芮得柏經驗公式。

但隨著實驗技術的進步，科學家們發現波耳氫原子模型不足以解釋實驗上觀察到的氫原子光譜，如 1891 年，邁克生（Michelson）發現 H_α 譜線（ $n = 3 \rightarrow n = 2$ ）實際上是由相鄰的三條譜線所構成，這現象稱為光譜的精細結構。

參、索末菲氫原子模型

1915 年，索末菲將波耳氫原子模型推廣為橢圓軌道。進一步加入相對論的修正後，成功解釋精細結構現象。本節分為兩部分：第一部分先探討橢圓軌道、第二部分才引進狹義相對論的修正。

一、橢圓軌道的推廣：

首先，索末菲和威爾森提出在穩定狀態下的量子化條件： $\oint p_i dq_i = n_i h$ ， p_i 、 q_i 分別為廣義動量和廣義座標、 n_i 為整數， h 是普朗克常數。此量子化條件在波耳氫原子模型即為角動量量子化的假設。索末菲在極座標 (r, φ) 下推廣波耳原子模型，分別對應 r 、 φ 廣義座標的量子化條件：

$$\begin{cases} \oint p_r dr = n_r h \\ \oint p_\varphi d\varphi = n_\varphi h \end{cases} \quad (3)$$

在此 p_r 為徑向的動量、 p_φ 為角動量。且靜電力為連心力，所以角動量 p_φ 守恆，意即 p_φ 為定值， $p_\varphi = \frac{n_\varphi h}{2\pi} \dots \dots (4)$ 式，由(4)式可知， $n_\varphi \neq 0$ ，否則原子不穩定。

假定質子的質量遠大於電子，所以電子環繞質子且質子靜止不動。另由於古典物理對距離平方成反比的引力分析，我們可知電子的封閉軌道為橢圓（圓是橢圓的一個特例）。橢圓的軌跡方程式為：

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon \cos \varphi} \quad (5)$$

a 為半長軸、 ε 為離心率。

並利用 $\frac{p_r}{p_\varphi} = \frac{m\dot{r}}{mr^2\dot{\varphi}} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \dots \dots (6)$ 式 以及(3)、(4)和(5)式可計算如下：

$$\begin{aligned}
 \oint p_r dr &= n_r \hbar \\
 \rightarrow \oint \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} p_\varphi \right) \left(\frac{dr}{d\varphi} d\varphi \right) &= n_r \hbar \\
 \rightarrow \oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 p_\varphi d\varphi &= n_r \hbar \\
 \rightarrow \oint \frac{\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}{(1+\varepsilon \cos \varphi)^2} \left(\frac{n_\varphi \hbar}{2\pi} \right) d\varphi &= n_r \hbar \quad (7)
 \end{aligned}$$

經由分部積分和留數定理可將積分得出 $\oint \frac{\sin^2 \varphi}{(1+\varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right)$ ，詳見附錄，上式計算可簡化為：(離心率 $\varepsilon \equiv \frac{c}{a}$)

$$\rightarrow n_r = n_\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - 1 \right) \quad (8)$$

由上式可知，離心率為特定值的橢圓為穩定的電子運行軌道，但還需要找到半長軸 a 的量子化關係式，才可確切找出穩定的橢圓軌道。

考慮氫原子的總能量 E ，並利用(4)、(5)和(6)式，可化簡成下式：

$$E = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r} = \frac{n_\varphi^2 \hbar^2}{8\pi^2 m} \frac{(1+\varepsilon^2+2\varepsilon \cos \varphi)}{a^2(1-\varepsilon^2)^2} - \frac{ke^2(1+\varepsilon \cos \varphi)}{a(1-\varepsilon^2)} \quad (9)$$

系統總能量 E 為定值，故 $\frac{dE}{d\varphi} = 0$ ，並利用(8)式，得到：

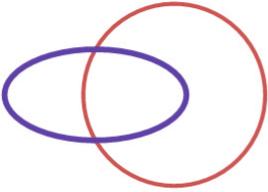
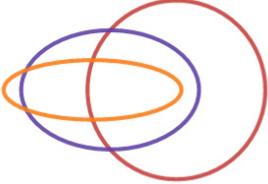
$$a = \frac{n_\varphi^2 \hbar^2}{4\pi^2 m(1-\varepsilon^2)ke^2} = \frac{(n_r+n_\varphi)^2 \hbar^2}{4\pi^2 mke^2} \quad (10)$$

上式即為半長軸 a 的量子化關係式， n_r 、 n_φ 為整數 ($n_r \geq 0$ 、 $n_\varphi > 0$)。又由於總能量 E 與半長軸 a 有對應關係： $E = -\frac{ke^2}{2a}$ ，半長軸 a 的量子化即代表能量的量子化：

$$E = -\frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{(n_r+n_\varphi)^2 \hbar^2} = -\frac{2\pi^2 mk^2 e^4}{n^2 \hbar^2} \quad (11)$$

令總量子數 n ， $n = n_r + n_\varphi$ ，比較(1)式和(11)式，我們可看出，未考慮相對論效應的索末菲模型，其能階大小跟波耳模型完全相同，但不同處是在索末菲模型中，有簡併態的產生，總量子數 n 的能階有 n 個簡併，對應到相同的能量。表 1 列舉了一些簡併態以及對應的半長軸及能量：

表 1: 索末菲模型中的簡併態

軌道			
量子數	$(n = 1, n_\varphi = 1)$	左: $(n = 2, n_\varphi = 1)$ 右: $(n = 2, n_\varphi = 2)$	左: $(n = 3, n_\varphi = 1)$ 中: $(n = 3, n_\varphi = 2)$ 右: $(n = 3, n_\varphi = 3)$
半長軸	$a_1 = 0.53 (\text{Å})$	$a_2 = 4 \times 0.53 = 2.12 (\text{Å})$	$a_3 = 9 \times 0.53 = 4.77 (\text{Å})$
能量	$E_1 = \frac{-13.6}{1} = -13.6 (ev)$	$E_2 = \frac{-13.6}{4} = -3.4 (ev)$	$E_3 = \frac{-13.6}{9} = -1.51 (ev)$

二、狹義相對論的修正：

從波耳氫原子模型可做估計，電子環繞速率約為 $10^6 \left(\frac{m}{s}\right)$ ，為光速的 $\frac{1}{100}$ ，在如此高速的運轉下，需考慮相對論效應的修正。由於已經超出古典力學的範圍，所以我們必須重新計算電子環繞質子的軌跡方程式。電子的總力學能 E：

$$E = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right) - \frac{ke^2}{r} \quad (12)$$

m_0 為電子的靜止質量。

利用 $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ ，進一步得到：

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1 + \frac{1}{m_0^2 c^2} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 \right) \quad (13)$$

(13) 式中，線動量 $p_r = m\dot{r}$ 、角動量 $p_\varphi = mr^2\dot{\varphi}$ ，其中 $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 。

將(13)式代入(12)式，整理可得：

$$p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\varphi^2 = 2m_0 E + \frac{2m_0 ke^2}{r} + \frac{1}{c^2} \left(E + \frac{ke^2}{r} \right)^2 \quad (14)$$

令 $u \equiv \frac{1}{r}$ ，且利用 $\frac{p_r}{p_\phi} = \frac{m\dot{r}}{mr^2\dot{\phi}} = \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{du}{d\phi}$ ，將此式代入(14)式，可得：

$$p_\phi^2 \left[\left(\frac{du}{d\phi} \right)^2 + u^2 \right] = 2m_0E + 2m_0ke^2u + \frac{1}{c^2} (E + ke^2u)^2 \quad (15)$$

將(15)式對 ϕ 全微分，整理得：

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \left(1 - \frac{k^2e^4}{c^2p_\phi^2} \right) u = \frac{m_0ke^2}{p_\phi^2} \left(1 + \frac{E}{m_0c^2} \right) \quad (16)$$

(16)式可解得：

$$u = A \cos \eta \phi + B \sin \eta \phi + D \quad (17)$$

$$\eta^2 \equiv 1 - \frac{k^2e^4}{c^2p_\phi^2} \quad (18)$$

$$D \equiv \frac{1}{\eta^2} \frac{m_0ke^2}{p_\phi^2} \left(1 + \frac{E}{m_0c^2} \right) \quad (19)$$

A、B 為常數。

將(16)式與古典力學中克卜勒問題去比較，可知其解(17)式可簡化成：

$$r = \frac{1}{A \cos \eta \phi + D} \quad (20)$$

或是
$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \cos \eta \phi} \quad (21)$$

其中 $\varepsilon = \frac{A}{D}$ 、 $a(1-\varepsilon^2) = \frac{1}{D}$ 。

(21)式表明在考量相對論的效應後，索末菲氫原子模型中，電子環繞質子的軌道並不是單純橢圓形，而是橢圓緩慢地繞著原子核做進動，如圖 1。

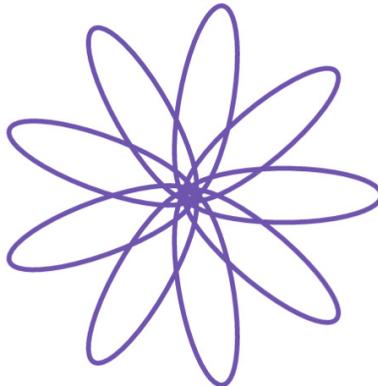


圖 1: 索末菲模型中，軌道的進動

利用(3)式量子化條件，以及(4)式、(6)式和(21)式，可得：

$$\begin{aligned} \oint p_r dr &= n_r h \\ \rightarrow \oint \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} p_\varphi \right) \left(\frac{dr}{d\varphi} d\varphi \right) &= n_r h \\ \rightarrow \oint \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 p_\varphi d\varphi &= n_r h \\ \rightarrow \oint \frac{\varepsilon^2 \eta^2 (\sin \eta \varphi)^2}{(1 + \varepsilon \cos \eta \varphi)^2} \left(\frac{n_\varphi h}{2\pi} \right) d\varphi &= n_r h \end{aligned} \quad (22)$$

利用變數變換及附錄，可知 $\oint \frac{(\sin \eta \varphi)^2}{(1 + \varepsilon \cos \eta \varphi)^2} d\varphi = \frac{1}{\eta} \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right)$ ，代入(22)式簡化為：

$$n_r = \eta n_\varphi \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right) \quad (23)$$

(23)式為經相對論修正後，穩定軌道的量子化條件。

最後，讓我們來找穩定軌道所對應到的能階。將(15)式化簡：

$$\begin{aligned} p_\varphi^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right] &= 2m_0 E + 2m_0 k e^2 u + \frac{1}{c^2} (E + k e^2 u)^2 \\ \rightarrow \left(p_\varphi^2 - \frac{k^2 e^4}{c^2} \right) u^2 + p_\varphi^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 - 2k e^2 \left(m_0 + \frac{E}{c^2} \right) u &= 2m_0 E + \frac{E^2}{c^2} \end{aligned} \quad (24)$$

利用(18)式、(19)式和(20)式代入(24)式，簡化成：

$$\begin{aligned} \rightarrow \left(p_\varphi^2 - \frac{k^2 e^4}{c^2} \right) (A^2 + D^2) - 2k e^2 \left(m_0 + \frac{E}{c^2} \right) D &= 2m_0 E + \frac{E^2}{c^2} \\ \rightarrow \left(p_\varphi^2 - \frac{k^2 e^4}{c^2} \right) A^2 - k^2 e^4 \left(m_0 + \frac{E}{c^2} \right)^2 \left(\frac{1}{p_\varphi^2 - \frac{k^2 e^4}{c^2}} \right) &= 2m_0 E + \frac{E^2}{c^2} \end{aligned} \quad (25)$$

藉由 $A = \varepsilon D$ 和量子化條件(23)式，將(25)式簡化為：

$$\rightarrow -\frac{n_\varphi^2}{(n_r + \eta n_\varphi)^2} \frac{k^2 e^4}{p_\varphi^2} (m_0 c^2 + E)^2 = 2m_0 c^4 E + c^2 E^2 \quad (26)$$

令 $\beta \equiv \frac{n_\varphi^2}{(n_r + \eta n_\varphi)^2} \frac{k^2 e^4}{p_\varphi^2}$ ，(26)式簡化為：

$$\rightarrow (c^2 + \beta) E^2 + 2m_0 c^2 (c^2 + \beta) E + \beta m_0^2 c^4 = 0$$

$$\rightarrow E = -m_0c^2 \pm m_0c^2 \sqrt{\frac{c^2}{c^2 + \beta}} \quad (27)$$

(27)式中，負的解明顯不合（能量尺度不應這麼大）。將 $\beta \equiv \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^2} \frac{k^2 e^4}{p_\varphi^2}$ 和

(4)式代入(27)式，得：

$$\rightarrow E = -m_0c^2 + m_0c^2 \left[1 + \frac{k^2 e^4 (2\pi)^2}{c^2 h^2} \frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \frac{k^2 e^4 (2\pi)^2}{c^2 h^2}})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

索末菲將(28)式中的無因次常數項 $\frac{ke^2(2\pi)}{ch}$ 定義為精細結構常數 $\alpha \equiv \frac{ke^2(2\pi)}{ch} \simeq \frac{1}{137}$

$$\rightarrow E = -m_0c^2 + m_0c^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (29)$$

將(29)式做泰勒展開：

$$\begin{aligned} \rightarrow E &= -m_0c^2 + m_0c^2 \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} + \frac{3}{8} \frac{\alpha^4}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^4} - \frac{5}{16} \frac{\alpha^6}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^6} \dots \dots \right] \\ &= \frac{-1}{2} m_0c^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} - \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^4} + \frac{5}{8} \frac{\alpha^4}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^6} + \dots \dots \right] \end{aligned} \quad (30)$$

將(30)式中的 $\frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2}$ 做泰勒展開並且令總量子數 $n \equiv n_r + n_\varphi$ ：

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} &= \frac{1}{(n_r + n_\varphi)^2} + \frac{n_\varphi}{(n_r + n_\varphi)^3} \left(\frac{\alpha}{n_\varphi}\right)^2 + \left[\frac{1}{4} \frac{n_\varphi}{(n_r + n_\varphi)^3} + \frac{3}{4} \frac{n_\varphi^2}{(n_r + n_\varphi)^4} \right] \left(\frac{\alpha}{n_\varphi}\right)^4 + \dots \dots \\ &= \frac{1}{n^2} \left[1 + \frac{n}{n_\varphi} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{n^3}{n_\varphi^3} + 3 \frac{n^2}{n_\varphi^2}\right) \left(\frac{\alpha}{n}\right)^4 + \dots \dots \right] \end{aligned} \quad (31)$$

將(31)式代入(30)式，得：

$$E = \frac{-1}{2} m_0c^2 \alpha^2 \left[\frac{1}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^2} - \frac{3}{4} \frac{\alpha^2}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^4} + \frac{5}{8} \frac{\alpha^4}{(n_r + \sqrt{n_\varphi^2 - \alpha^2})^6} + \dots \dots \right]$$

$$= \frac{-1 m_0 c^2 \alpha^2}{2 n^2} \left\{ 1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{n_\phi} - \frac{3}{4} \right) + \frac{\alpha^4}{n^4} \left[\frac{1}{4} \left(\frac{n}{n_\phi} \right)^3 + \frac{3}{4} \left(\frac{n}{n_\phi} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(\frac{n}{n_\phi} \right) + \frac{5}{8} \right] + \dots \right\} \quad (32)$$

(32)式為經相對論修正後，氫原子能量的量子化。與(1)式相比，可發現(32)式中的第一項即為波耳氫原子模型的能量。與(11)式相較，發現在考慮相對論效應後，原先簡併態解開來，總量子數為 n 的能階有 n 個，分別對應到不同的能量。

以巴耳末系中的 H_α 譜線 ($n:3 \rightarrow 2$) 為例，原先實驗上觀察只有一條譜線，但隨著實驗技術的進步，發現 H_α 實際上有三條分線。在索末菲模型中， n 為 3 的能階數量有 3 個， n 為 2 的能階數量則有 2 個，考量到選擇定則，可以產生躍遷的譜線剛好三條 ($n_{n_\phi}:3_3 \rightarrow 2_2$ 、 $3_2 \rightarrow 2_1$ 、 $3_1 \rightarrow 2_2$)，成功解釋精細結構現象。

肆、結論

賽曼效應、斯塔克效應和精細結構的實驗現象促使 20 世紀初物理學家們探索原子的可能圖像，波耳氫原子模型已提供一個大方向，但圖像還不夠完整。本文主要在介紹二維平面的索末菲氫原子模型如何處理氫原子光譜的精細結構問題。單純以橢圓軌道去探討時，造成簡併態的產生，在考量到相對論效應後，這些簡併態紛紛被打開，形成不同的能階，進而成功解釋氫原子精細結構的實驗現象，而電子繞行原子核也不再是橢圓軌道。

當推廣成三維的索末菲氫原子模型後，描述單個軌道的獨立量子數比二維模型還多了一個，多的量子數在描述軌道的傾斜角（軌道平面與固定軸之間的角度），可解釋正常的賽曼效應（normal Zeeman effect）以及斯塔克效應。但反常的賽曼效應（anomalous Zeeman effect）依然無法解釋，這現象要等到電子自旋被發現之後才得以解決。令人驚訝的是，未考慮自旋概念的索末菲模型所計算出來的氫原子能階竟然與狄拉克方程所得到的式子有一樣的形式，都可解釋氫原子的精細結構。

除了上述的反常賽曼效應外，索末菲模型也無法解釋多電子原子的光譜現象。如今回過頭來看，可知索末菲模型雖然並非為完整的理論，但在科學史上有承先啟後的位置，在那個時代探索著未知的領域。

伍、參考資料:

1. 吳大猷 理論物理第二冊 量子論與原子結構 第五章 Bohr 理論之改進
2. Pillai,S.O. Solid State Physics Chapter2: Review of Atomic Structure
3. 高崇文 索末菲:承先啟後的理論物理大師(上)出入於物理與數學之間 物理雙月刊 2021 年 10 月第五期
4. Ya I Granovski Sommerfeld formula and Dirac's theory Physics-Uspekhi 47 (5) 523-524 (2004) DOI: 10.1070/PU2004v047n05ABEH001885
5. Michael Eckert How Sommerfeld extended Bohr's model of the atom (1913–1916)

Eur. Phys. J. H 39, 141–156 (2014) DOI: 10.1140/epjh/e2013-40052-4

6. Anthony Duncan and Michel Janssen The Stark effect in the Bohr-Sommerfeld theory and in Schrödinger's wave mechanics arXiv:1404.5341

陸、附錄

證明： $\oint \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right)$ 。

利用分部積分簡化：

$$\begin{aligned} \oint \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi &= \sin \varphi \int \frac{\sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \\ &\quad - \int \cos \varphi \left(\int \frac{\sin \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi \right) d\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \end{aligned}$$

很明顯地，第一項為 0。

$$\begin{aligned} &= \int \cos \varphi \left[\int \frac{1}{\varepsilon(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d(1 + \varepsilon \cos \varphi) \right] d\varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = -\frac{1}{\varepsilon} \oint \frac{\cos \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \oint \left[1 - \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} \right] d\varphi = -\frac{1}{\varepsilon^2} \left[2\pi - \oint \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi \right] \end{aligned} \quad (1)$$

接下來要利用複變分析，令 $z = e^{i\varphi}$ ，計算 $\oint \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi$ 。

$$\oint \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = \oint \left[\frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{2}(z + \frac{1}{z})} \right] \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint \frac{1}{\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon} dz = \frac{2}{i} \oint \frac{1}{\varepsilon(z - z_1)(z - z_2)} dz \quad (2)$$

上式的 $z_1 \equiv \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ 、 $z_2 \equiv \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$ ，且離心率 ε 範圍為： $1 > \varepsilon \geq 0$ ，

利用留數定理，(2)式可簡化為：

$$\oint \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)} d\varphi = \frac{2}{i} \left[2\pi i \frac{1}{\varepsilon(z_1 - z_2)} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (3)$$

將(3)式代回(1)式，得證：

$$\oint \frac{\sin^2 \varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} - 1 \right)$$