中學生通訊解題第 145 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14501

聯立方程式$\begin{cases} ab=cd \\ a+b+c+d=667 \end{cases}$的正整數解有_______組。

【簡答】 1232

【詳解】

1. 由$ab=cd$，
 令$\frac{a}{c}=\frac{d}{b}=\frac{n}{m}$（其中$(m,n)=1 \quad m,n\in\mathbb{N}$）
 又$a+b+c+d$為奇數，
 知a,b,c,d必為一奇三偶
 不失一般性，令a為奇數）
 可設$a=nu, c=mu, d=nv, b=mv$（其中$u,v\in\mathbb{N}$，n,u為奇數）
2. 由$(m+n)(u+v)=a+b+c+d=667=23\times 29$，
 又n,u為奇數
 若$m+n=23, u+v=29$
 $(n,m)=(1,22),(3,20),\cdots,(21,2)$，$(u,v)$
 $=(1,28),(3,26),\cdots,(27,2)$，
 共11×14組正整數解。
 若$m+n=29, u+v=23$亦同
3. 因a,b,c,d為奇數共4種情形，
 故所求共$11\times 14\times 2\times 4=1232$組正整數解。

【解題評析】

本題討論正整數解的數量，因分類方式不只一種且易混淆，建議可以假設 a 和 c (或 d 和 b)的最簡單整數比，可以較明確分類並計算出答案。

問題編號
14502

對於實數 x，求證 $x^8-x+\frac{3}{4}$ 恆大於 0。

【證明】 因為 $x^8-x+\frac{3}{4}=(x^4-\frac{1}{2})^2+(x^2-\frac{1}{2})^2+(x-\frac{1}{2})^2\geq 0$，

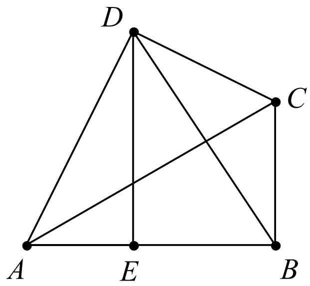
又 x^4,x^2,x 不可能同時為 $\frac{1}{2}$，故 $x^8-x+\frac{3}{4}$ 恆大於 0。

【解題評析】

本題為代數簡易的題目，沒有人得滿分，其中得 6 分的同學有：台北市仁愛國中鐘景翰同學、宜蘭市慧燈高中余嘉閔同學、新北市中山國中劉伯晏同學、新北市江翠國中鍾宜蓁同學，大部分的同學沒說明 x^4,x^2,x 不可能同時為 $\frac{1}{2}$，故 $x^8-x+\frac{3}{4}$ 恆大於 0，有同學用微分來做（不鼓勵）。

問題編號
14503

如下圖，已知：$\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 都是直角，$\angle CAB$ = 30°，$\overline{DE}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於點 E，$\overline{DE}$ = 2 $\overline{AE}$；求證：$\frac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$。



【證明一】

1. 因為 $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 都是直角，所以 A、B、C、D 四點共圓，根據托勒密定理，得 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$。

2. 如右圖。已知 $\overline{DE}$ 垂直 $\overline{AB}$，
過點 B 作線段 $\overline{BF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於點 F，
過點 F 作線段 $\overline{FG}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於點 G，
過點 B 作線段 $\overline{BH}$ 垂直 $\overline{AD}$ 於點 H，
過點 F 作線段 $\overline{FK}$ 垂直 $\overline{BH}$ 於點 K。

3. 查看各直角三角形，由於
$\angle CBF=\angle CAB$，$\angle ABH=\angle ADE$，
$\angle FBK=\angle CAD$；而知
$\triangle AFG\sim\triangle ACD\sim\triangle BFK$，
$\triangle ABF\sim\triangle ACB$，$\triangle ABH\sim\triangle ADE$。

4. 即有

$$\overline{AG}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}\times\overline{AB}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\times\overline{AB},$$

$$\overline{HG}=\overline{KF}=\frac{\overline{KF}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}\times\overline{AB}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\times\overline{AB},$$

$$\overline{BK}=\frac{\overline{BK}}{\overline{BF}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{AB}}\times\overline{AB}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\times\overline{AB},$$

$$\overline{KH}=\overline{FG}=\frac{\overline{FG}}{\overline{AF}}\times\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}\times\overline{AB}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\times\overline{AB},$$

得 $$\frac{\overline{AH}}{\overline{BH}}=\frac{\overline{AG}-\overline{HG}}{\overline{BK}+\overline{KH}}=\frac{\overline{AD}\times\overline{AB}-\overline{CD}\times\overline{BC}}{\overline{AD}\times\overline{BC}+\overline{CD}\times\overline{AB}}$$

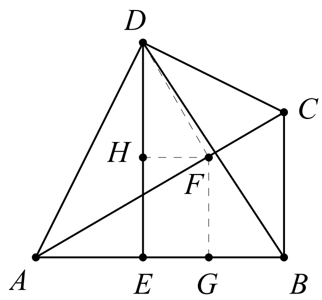
$$=\frac{\overline{AD}\times\overline{AB}-\overline{CD}\times\overline{BC}}{\overline{AC}\times\overline{BD}}。$$

5. 又 $\angle CAB=30^\circ$，故 $\overline{AC}=2\overline{BC}$；
而 $\overline{DE}=2\overline{AE}$，故 $\overline{BH}=2\overline{AH}$。

6. 承上可知 $\dfrac{\overline{AD}\times\overline{AB}-\overline{CD}\times\overline{BC}}{\overline{AC}\times\overline{BD}}=\dfrac{1}{2}$，

整理得證 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$。

【證明二】



1. 因為∠ABC 與∠ADC 都是直角，所以 A、B、C、D 四點共圓，

而知∠CDB＝∠CAB＝30°，得∠ADB＝60°；

$\overline{AC}=2\,\overline{BC}$。

2. 因為 $\overline{DE}$ 垂直 $\overline{AB}$，∠ADB＝60°，∠CAB＝30°，所以△ABD 之面積

為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{DA}\times\overline{DB}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DE}=$

$\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\overline{DE}$，

得 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$。

3. 作 $\overline{DF}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於點 F，作 $\overline{FG}$ 垂直 $\overline{AB}$ 於點 G，作 $\overline{FH}$ 垂直 $\overline{DE}$ 於點 H，

得△ABC～△AGF～△DHF，△ADC～△AFD。

4. 因此，

$\overline{AG}=\dfrac{\overline{AG}}{\overline{AF}}\times\dfrac{\overline{AF}}{\overline{AD}}\times\overline{AD}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}\times\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AC}}\times\overline{AD}$，

$\overline{HF}=\dfrac{\overline{HF}}{\overline{DF}}\times\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AD}}\times\overline{AD}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}\times\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\times\overline{AD}$。

5. 又 $\overline{EG}=\overline{HF}$，

而知 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AG}-\overline{HF}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}-\overline{BC}\times\overline{CD}}{\overline{AC}\times\overline{AC}}$。

6. 由於 $\overline{DE}=2\,\overline{AE}$，承 1. 2. 5.，

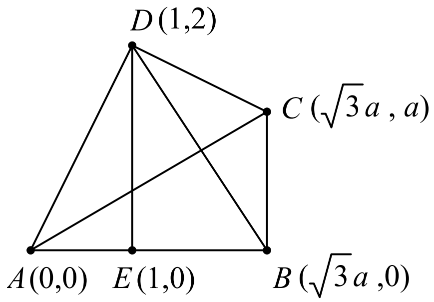
可知 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=2=\dfrac{\overline{BD}\times\overline{AC}}{\overline{AB}\times\overline{AD}-\overline{BC}\times\overline{CD}}$，

整理得 $2\,\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{BD}\times\overline{AC}+2\,\overline{DC}\times\overline{BC}$

$=\overline{DB}\times\overline{AC}+\overline{DC}\times\overline{AC}$，

得證：$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$。

【證明三】



不失一般性，依題意可設

$\overline{AE}=1$，$\overline{AB}=\sqrt{3}a$，$\overline{DE}=2$，

$\overline{AD}=\sqrt{5}$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=2a$，

而定坐標為 $A(0,0)$、$E(1,0)$、$D(1,2)$、

$B(\sqrt{3}a,0)$、$C(\sqrt{3}a,a)$，如右圖，

則根據畢氏定理，

$(\sqrt{3}a)^2+a^2=(\sqrt{3}a-1)^2+(a-2)^2+5$，

化簡為 $4a^2=4a^2-2\sqrt{3}a-4a+10$，

解得 $a=10-5\sqrt{3}$，

故 $\overline{DB}+\overline{DC}=\sqrt{(\sqrt{3}a-1)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}a-1)^2+(a-2)^2}$

$=\sqrt{(10\sqrt{3}-16)^2+4}+\sqrt{(10\sqrt{3}-16)^2+(8-5\sqrt{3})^2}$

$=(8\sqrt{5}-4\sqrt{15})+(5\sqrt{15}-8\sqrt{5})=\sqrt{15}$；

又知 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}$，

得證：$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$。

【證明四】

1. 由於 $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 都是直角，可知 A、B、C、D 四點共圓。作其外接圓如右圖，圓心

為 $\overline{AC}$ 中點 O；並延長 $\overline{DE}$ 交圓 O 於點 F。

2. 圓 O 上，因為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{DF}$ 二弦相交於點 E，
   所以△AED～△FEB，得
   $\overline{DE}$ ： $\overline{AE}$ ＝ $\overline{BE}$ ： $\overline{FE}$ 。

3. 已知 $\overline{DE}=2\overline{AE}$ ，
   故知 $\overline{BE}=2\overline{FE}$ ，
   而△AED、△FEB、△DEB、都是直角三角形，
   因此，設 $\overline{AE}=x$， $\overline{FE}=y$，則
   $\overline{DE}=2x$， $\overline{AD}=\sqrt{5}x$ ， $\overline{BE}=2y$，
   $\overline{FB}=\sqrt{5}y$ ， $\overline{DB}=2\sqrt{x^2+y^2}$ 。

4. △ABC 中，$\angle ABC$ 是直角，$\angle CAB=30^\circ$，
   因此，設 $\overline{BC}=a$，
   則 $\overline{AC}=2a$， $\overline{AB}=\sqrt{3}a=x+2y$。

5. 圓 O 上， $\overline{DF}$ 、 $\overline{CB}$ 皆垂直 $\overline{AB}$ ，故 $\overline{DF}$ 平行 $\overline{CB}$ ，
   而知 $DFBC$ 為等腰梯形，得 $\overline{DC}=\overline{FB}=\sqrt{5}y$ 。

6. △ADC 是直角三角形，故 $5x^2+5y^2=4a^2$ ，
   與 $\sqrt{3}a=x+2y$ 聯立，
   解得 $y=(-8+5\sqrt{3})x$ ，
   故 $\overline{DC}=\sqrt{5}(-8+5\sqrt{3})x=(-8\sqrt{5}+5\sqrt{15})x$ 。

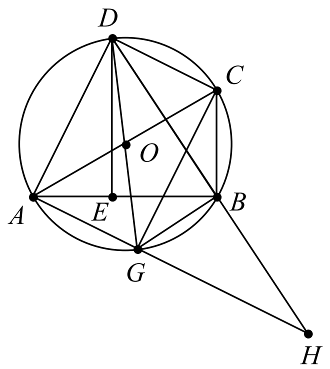
7. $\overline{DB}=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{(140-80\sqrt{3})x^2}$
   $=4\sqrt{5}(2-\sqrt{3})x=(8\sqrt{5}-4\sqrt{15})x$ ，
   得 $\overline{DB}+\overline{DC}=(8\sqrt{5}-4\sqrt{15}-8\sqrt{5}+5\sqrt{15})x$

$=\sqrt{15}x$ 。

8. $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{3}a\times\sqrt{5}x}{2a}=\dfrac{\sqrt{15}\,x}{2}$ 。

得證：$\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$ 。

【證明五】



1. 由於 $\angle ABC$ 與 $\angle ADC$ 都是直角，可知 A、B、C、D 四點共圓。如右圖，作其外接圓，圓心為 $\overline{AC}$ 中點 O。

2. 過點 D 作直徑 $\overline{DG}$，連結 $\overline{CG}$、$\overline{GB}$，又連結 $\overline{AG}$ 並延長交直線 DB 於點 H。

3. $\angle CDB=\angle CAB=30°$，$\angle CDA=90°$，因此，$\angle ADH=60°$，又 $\angle DAG=\angle DAH=90°$，$\angle AHD=30°$，

故 $\overline{AH}=\sqrt{3}\,\overline{AD}$ 。

4. $\triangle HBG$ 中，$\angle GBH=90°$，$\angle GHB=30°$，

因此，$\overline{GH}=2\overline{GB}$ 。

5. $\angle DAE=\angle DAB=\angle DGB$，$\angle AED=90°=\angle GBD$，

因此，$\triangle AED\sim\triangle GBD$，又 $\overline{DE}=2\overline{AE}$，

故 $\overline{DB}=2\overline{GB}=\overline{GH}$ 。

6. 圓 O 中，$\overline{AC}$、$\overline{DG}$ 皆為直徑，

故 $AGCD$ 為矩形，

得 $\overline{AG}=\overline{DC}$ 。

7. 承上可知 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AD}$

$=\dfrac{\overline{AH}}{2}=\dfrac{\overline{GH}+\overline{AG}}{2}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$ 。

得證。

【解題評析】

在幾何中，要直接證明一個命題，必須先觀照釐清已知條件與待證結論之間的連結，再邏輯嚴謹地利用已知條件逐步推導得出結論。本題主要在探索圖形的邊角關係，由已知條件易知四邊形 $ABCD$ 內接於一圓，再看待證結論，這顯示了托勒密定理可能有用；又結論其實就是 $\sqrt{3}\,\overline{AD}=\overline{DB}+\overline{DC}$ ，因此，經由適當構造$(30°, 60°, 90°)$之特別三角形，或能有效證題；當然，如果一時找不到有利的幾何性質，那麼訂坐標解析求解或設變元列式計算，也都是可行的解題途徑。

本題共有三位同學應徵答題，其中尤耀星同學分別寫下了：訂坐標解析、以三角比入算、設變元列式三種證明方法；林宥呈同學以三角比入算；鐘景翰同學藉由添加輔助圓與線找到了較為簡便的關係式。這三位同學的證題法基本上都有值得稱道的思路，只是因為對於幾何性質的掌握有所不足，所以解題的方式偏重計算，而本題中所有的邊長數據並不簡約，如以上【證明三】與【證明四】中之數值涉及雙重根號，因此計算頗為繁複，而成一大難點。

為求能更簡捷的證題，在幾何圖形中嘗試添加輔助圓或輔助線以尋找更方便的幾何關係，是常用的策略之一，【證明四】中之設計輔助圓與輔助線找到等腰梯形的方法，是鐘景翰同學的巧思，謝謝景翰同學。輔助圓或輔助線是幾何中為求完整解題思路而必須架設的橋樑，如何繪作固然頗有難度，但並非虛無縹緲，其實有迹可循，【證明一】、【證明二】、【證明五】中之輔助線的設想與作圖，其構思方法如何，同學可再想想。

如前所述，因為兩位同學以三角比入算，所以我們不妨也談談三角比方法。確實，三角比是抓住三角形邊角關係的有力工具。如果同學也熟知三角比，那麼本題在托勒密定理之外，只須再利用正切和角公式，即足以解題，簡述如下：

依托勒密定理，

得 $\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}$ ；

依正切和角公式 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ，

由於∠DAE＝∠CAD＋∠CAB，

而 $\tan\angle DAE=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=2$， $\tan\angle CAD=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}$， $\tan\angle CAB=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}$ ，

又 $\overline{AC}=2\overline{CB}$ ，

故 $2(1-\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}})=2-\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}\times\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{CB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{\overline{AB}\times\overline{AD}}$ ，

化簡得

$2\overline{AB}\times\overline{AD}=\overline{CD}\times\overline{AC}+\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AC}(\overline{BD}+\overline{CD})$ ，

得證 $\dfrac{\overline{AB}\times\overline{AD}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DB}+\overline{DC}}{2}$ 。

利用三角比抓住邊角關係，實有方便處，對照【證明一】，觀察其間證題理路，尤其是輔助線的作圖，同學當有更深刻的認識。提供研究參考。

問題編號 14504

將數字 1，2，3，4，5，6，7，8，9 按任意順序寫成一排，其中相鄰的 3 個數字組成一個三位數，共有七個三位數，對這七個三位數求和，則數字 1~9 的每一種排列會加出一個總和。如：將數字 1~9 寫成 1，3，4，2，7，5，8，9，6，可組成 134，342，427，275，758，589，896 這七個三位數，它們的總和是 3421。試問所求得的總和中，最大值和最小值分別是多少？

【簡答】　最大值 4648，最小值 3122

【詳解】

解法一：

因為能組成的 3 位數是 7 個，要使其和最大首先必須其百位數為最大，即前 7 位應該是 3~9 的 7 個數字，則後面的數字為 2，1；又前 7 個數中的首位數字不能作為 7 個數的十位數，因此它必須是 7 個數中的最小者 3；同理，前 7 個數中的第二位不可能是後 6 個數中的十位，因此它必須是 6 個數中的最小者 4；依這樣的規律，它們的排列應該是 345678921，7 個數分別為 345，456，567，678，789，892，921，其和是 4648；同理，總和最小的排列為 765432189，其七個數分別為 765，654，543，432，321，218，189，其

和是 3122。

解法二：

假設排成 9 個數字寫成一列為 $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9$

7 個三位數總和 $=100a_1+110a_2+111(a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)+11a_8+a_9$

$=111(a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)+110a_2+100a_1+11a_8+a_9$

令 a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 為 $5,6,7,8,9$，$a_2=4$，$a_1=3$，$a_8=2$，$a_9=1$，

目標數是最大 $=111\times(5+6+7+8+9)+110\times4+100\times3+11\times2+1=4648$

令 a_3,a_4,a_5,a_6,a_7 為 $1,2,3,4,5$，$a_2=6$，$a_1=7$，$a_8=8$，$a_9=9$

目標數是最小 $=111\times(1+2+3+4+5)+110\times6+100\times7+11\times8+9=3122$

【解題評析】

這個問題是偏向簡單的組合問題，有許多同學參加徵答，而且多數的同學也能正確的得到答案。如果能善用符號代表數的方式，將題目轉化成代數式，如上述的解法二，就會發現可以清楚才簡潔的表達你的過程與想法。

問題編號 14505

求所有的正整數 x , y，使得 6x＋2y＋2 為完全平方數。

【簡答】 $x=1,\ y=3$

【詳解】

因為 $6^x+2^y+2=2\,(3^x\times2^{y-1}+2^{y-1}+1)$為偶數且為完全平方數，

所以 $3^x\times2^{y-1}+2^{y-1}+1$ 為偶數，所以 x , y 只有一個為 1；

(1) 當 $x=1$ 時，則 $y\geq2$，$6+2^y+2=8+2^y$ 為完全平方數，

①若 $y=2$，$8+2^2=12$，不合；

②若 $y=3$，$8+2^3=16$，合；

③若 $y\geq4$，因為 $8+2^y=4\,(2+2^{y-2})$ 為完全平方數，

所以 $2+2^{y-2}$ 為完全平方數，

但是 $2+2^{y-2}$ 為 4 的倍數多 2，不為完全平方數，矛盾。

(2) 當 $y=1$ 時，$6^x+2+2=6^x+4$ 為 7 的倍數多 3 或 5，
但是完全平方數為 7 的倍數或 7 的倍數多 1,2,4，矛盾。
由(1)(2) $x=1$，$y=3$。

【解題評析】

1. 此題等價於 $6^x+2^y+2=n^2$，其中 x , y , n 為正整數。對於這樣的不定方程式我們可以利用同餘的方法求解，例如
   (1)利用完全平方數模 4 為 0 或 1，完全平方數模 7 為 0,1,2,4，來得到解的形式或是排除不可能的形式。
   (2)6 的冪次方模 7 為 1 或 6，詳解的寫法就是同餘的數學性質。

2. 澄清參與作答者的觀念：
   (1)正整數集合為{1,2,3,...}，若正整數集合為 N，則非負整數集合為 $N\cup\{0\}$。
   有一位作答者多寫了(0,0)和(0,1)這兩組解，因此酌予扣分。
   (2)題目中是要求所有的正整數 x , y，所以除了要求出(1,3)這組解，尚須說明沒有其他解。這部分有些作答者未嚴謹說明。

3. 以下列出一些基本的同餘性質給同學參考，在處理數論的問題常用到這些性質。
   (1) $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)\Leftrightarrow a-b=kn\Leftrightarrow n\mid a-b$。
   (2) 反身性：$a\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$。
   (3) 對稱性：$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)\Leftrightarrow b\equiv a(\mathrm{mod}\,n)$。
   (4) 遞移性：$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n), b\equiv c(\mathrm{mod}\,n)\Rightarrow a\equiv c(\mathrm{mod}\,n)$。
   (5) $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n), c\equiv d(\mathrm{mod}\,n)\Rightarrow a\pm c\equiv b\pm d(\mathrm{mod}\,n)$。
   (6) $a\equiv b(\mathrm{mod}\,n), c\equiv d(\mathrm{mod}\,n)\Rightarrow ac\equiv bd(\mathrm{mod}\,n)$。