費氏數列與正、餘弦函數的順向內積恆等式

許閔揚* 劉俊易 周芳宇
縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

在科學教育月刊第 407 期[1]中，陳建燁老師推導出費氏數列與正弦函數卷積恆等式:

$$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin(n\theta)}{1+4\sin^2\theta}。$$

在閱讀完文章之後，我們好奇如果將卷積改成順向內積，即$F_1 sin\theta+F_2\sin 2\theta+\cdots+F_n\sin(n\theta)$，則是否也可求得一個封閉形式？此外，如果將問題改成費氏數列與餘弦函數的順向內積，即 $F_1 cos\theta+F_2\cos 2\theta+\cdots+F_n\cos(n\theta)$，又可以得到怎樣的封閉形式？我們發現利用費氏數列的矩陣或旋轉矩陣皆可找出它們的封閉形式。此外，我們利用所得到的順向內積公式，重新證明陳建燁老師上面的卷積恆等式並給出費氏數列與餘弦卷積恆等式。

貳、利用費氏數列矩陣推導

費氏數列的定義為$\langle F_n\rangle: F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 2$ 且 $F_0=0, F_1=1$。
以下的引理 2.1 是我們利用矩陣來推導的理論基礎。

引理 2.1[2]: 若F_n為費氏數列第n項，則 $\begin{bmatrix}F_{n+1} & F_n\\ F_n & F_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^n$, $n\geq 1$。

證明: 讀者可使用數學歸納法證明或參考資料[2]。

利用引理 2.1，當所求為$a_1F_1+a_2F_2+\cdots+a_nF_n$時，我們可以將問題轉換為求矩陣$a_1A+a_2A^2+\cdots+a_nA^n$的(1,2)元，其中$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$。接著，我們計算多項式$a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$的封閉形式，再將$x$用$A$代入，即可找出$a_1F_1+a_2F_2+\cdots+a_nF_n$之值。
要計算

$$F_1 cos\theta+F_2\cos 2\theta+\cdots+F_n\cos(n\theta)$$

與

$$F_1 sin\theta + F_2 \sin 2\theta + \cdots + F_n \sin(n\theta)$$

很自然地我們考慮計算$e^{i\theta}x + e^{2i\theta}x^2 + \cdots + e^{ni\theta}x^n$的封閉型式，即以下的引理 2.2。

引理 2.2: $e^{i\theta}x + e^{2i\theta}x^2 + \cdots + e^{ni\theta}x^n = \frac{e^{i\theta}x(1-e^{ni\theta}x^n)}{1-e^{i\theta}x}$ 。 (1)

證明:讀者可利用等比級數公式證明。

定理 1：

(1) $F_1 sin\theta + F_2 \sin 2\theta + \cdots + F_n \sin(n\theta)$

$$= \frac{[-\sin(n+1)\theta + \sin(n\theta) + \sin(n-1)\theta]F_{n+1} + [-\sin(n+2)\theta + \sin(n+1)\theta + \sin(n\theta)]F_n + 2sin\theta}{1 + 4\sin^2\theta}$$

(2) $F_1 cos\theta + F_2 \cos 2\theta + \cdots + F_n \cos(n\theta)$

$$= \frac{[-\cos(n+1)\theta + \cos(n\theta) + \cos(n-1)\theta]F_{n+1} + [-\cos(n+2)\theta + \cos(n+1)\theta + \cos(n\theta)]F_n - 1}{1 + 4\sin^2\theta}$$ 。

證明:

令$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$代入(1)式，得

$$e^{i\theta}A + e^{2i\theta}A^2 + \cdots + e^{ni\theta}A^n = e^{i\theta}A\left(I - e^{ni\theta}A^n\right)\left(I - e^{i\theta}A\right)^{-1} \text{，(2)}$$

利用引理 2.1，(2)式等號左邊矩陣的(1,2)元為

$$e^{i\theta}F_1 + e^{2i\theta}F_2 + \cdots + e^{ni\theta}F_n \text{，} \quad (3)$$

顯然地，(3)式實部為

$$F_1 cos\theta + F_2 cos2\theta + \cdots + F_n \cos(n\theta) \text{，}$$

虛部為

$$F_1 sin\theta + F_2 sin2\theta + \cdots + F_n \sin(n\theta) \text{。}$$

接著計算(2)式等號右邊，首先

$$I - e^{i\theta}A = \begin{bmatrix} 1 - e^{i\theta} & -e^{i\theta} \\ -e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(I - e^{i\theta}A\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - e^{i\theta} & -e^{i\theta} \\ -e^{i\theta} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - e^{i\theta} - e^{2i\theta}} \begin{bmatrix} 1 & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & 1 - e^{i\theta} \end{bmatrix} \text{，} \quad (4)$$

將(4)式代入(2)式，得等號右邊矩陣(1,2)元為

$$\frac{e^{i\theta}-e^{(n+1)i\theta}F_{n+1}-e^{(n+2)i\theta}F_n}{1-e^{i\theta}-e^{2i\theta}}$$

因為

$$\frac{1}{1-e^{i\theta}-e^{2i\theta}}=\frac{1}{(1-cos\theta-cos2\theta)-i(sin\theta+sin2\theta)}$$

$$=\frac{(1-cos\theta-cos2\theta)+i(sin\theta+sin2\theta)}{(2\sin^2\theta-cos\theta)^2+(2sin\theta cos\theta+sin\theta)^2}$$

$$=\frac{1-e^{-i\theta}-e^{-2i\theta}}{1+4\sin^2\theta}\text{ 。}$$

所以

$$\frac{e^{i\theta}-e^{(n+1)i\theta}F_{n+1}-e^{(n+2)i\theta}F_n}{1-e^{i\theta}-e^{2i\theta}}$$

$$=\frac{1-e^{-i\theta}-e^{-2i\theta}}{1+4\sin^2\theta}\left[e^{i\theta}-e^{(n+1)i\theta}F_{n+1}-e^{(n+2)i\theta}F_n\right]$$

$$=\frac{\left[-e^{(n+1)i\theta}+e^{ni\theta}+e^{(n-1)i\theta}\right]F_{n+1}+\left[-e^{(n+2)i\theta}+e^{(n+1)i\theta}+e^{ni\theta}\right]F_n+e^{i\theta}-1-e^{-i\theta}}{1+4\sin^2\theta} \tag{5}$$

(5)式實部為

$$\frac{[-\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)+\cos(n-1)\theta]F_{n+1}+[-\cos(n+2)\theta+\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)]F_n-1}{1+4\sin^2\theta}$$

，虛部為

$$\frac{[-\sin(n+1)\theta+\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta]F_{n+1}+[-\sin(n+2)\theta+\sin(n+1)\theta+\sin(n\theta)]F_n+2sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

，比較(2)式等號兩邊矩陣(1,2)元實部後，得

$$F_1cos\theta+F_2\cos(2\theta)+\cdots+F_n\cos(n\theta)$$

$$=\frac{[-\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)+\cos(n-1)\theta]F_{n+1}+[-\cos(n+2)\theta+\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)]F_n-1}{1+4\sin^2\theta},$$

比較(2)式等號兩邊矩陣(1,2)元虛部後，得

$$F_1 sin\theta + F_2\sin(2\theta) + \cdots + F_n\sin(n\theta)$$
$$= \frac{[-\sin(n+1)\,\theta + \sin(n\theta) + \sin(n-1)\,\theta]F_{n+1} + [-\sin(n+2)\,\theta + \sin(n+1)\,\theta + \sin(n\theta)]F_n + 2sin\theta}{1+4\sin^2\theta},$$

得證。

參、利用旋轉矩陣推導

旋轉矩陣是一個有如下形式的2×2矩陣$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -sin\,\theta \\ sin\,\theta & cos\,\theta \end{bmatrix}$，當我們計算$R^n$時，我們會得到$R^n = \begin{bmatrix} \cos(n\theta) & -sin(n\theta) \\ sin(n\theta) & cos(n\theta) \end{bmatrix}, n \geq 0$。

當所求為

$$a_1\,cos\,\theta + a_2\,cos\,2\,\theta + \cdots + a_n\,cos(n\theta)$$

與

$$a_1\,sin\,\theta + a_2\,sin\,2\,\theta + \cdots + a_n\,sin(n\theta)$$

我們可以將問題轉換成求矩陣$a_1R + a_2R^2 + \cdots + a_nR^n$,

要計算

$$F_1cos\theta + F_2\cos2\theta + \cdots + F_n\cos(n\theta)$$

與

$$F_1sin\theta + F_2\sin2\theta + \cdots + F_n\sin(n\theta)。$$

很自然地我們考慮計算$F_1x + F_2x^2 + \cdots + F_nx^n$的封閉形式，即以下引理 3.1。

引理 3.1: $F_1x + F_2x^2 + \cdots + F_nx^n = \frac{F_1x - F_{n+1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}}{1-x-x^2}$。 (6)

證明:

令 $S = F_1x + F_2x^2 + \cdots + F_nx^n$

$$=> xS = F_1x^2 + F_2x^3 + \cdots + F_{n-1}x^n + F_nx^{n+1}$$
$$=> (1-x)S = F_1x + F_0x^2 + F_1x^3 + \cdots + F_{n-2}x^n - F_nx^{n+1}$$
$$= F_1x + x^2S - F_{n-1}x^{n+1} - F_nx^{n+1} - F_nx^{n+2}$$

$$= F_1x + x^2S - F_{n+1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}$$

$$=> S = \frac{F_1x - F_{n+1}x^{n+1} - F_nx^{n+2}}{1 - x - x^2}\text{，}$$

得證。

定理 1 另證:

令$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$代入(6)式，得

$$F_1R + F_2R^2 + \cdots + F_nR^n = (I - R - R^2)^{-1}(F_1R - F_{n+1}R^{n+1} - F_nR^{n+2})\text{，} \tag{7}$$

(7)式等號左邊矩陣的(1,1)元與(2,1)元分別為

$$F_1\cos\theta + F_2\cos 2\theta + \cdots + F_n\cos(n\theta)$$

與

$$F_1\sin\theta + F_2\sin 2\theta + \cdots + F_n\sin(n\theta)\text{。}$$

現在計算(7)式等號右邊

已知

$$I - R - R^2 = \begin{bmatrix} 1 - \cos\theta - \cos 2\theta & \sin\theta + \sin 2\theta \\ -\sin\theta - \sin 2\theta & 1 - \cos\theta - \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$=> (I - R - R^2)^{-1} = \frac{1}{1 + 4\sin^2\theta}\begin{bmatrix} 1 - \cos\theta - \cos 2\theta & -\sin\theta - \sin 2\theta \\ \sin\theta + \sin 2\theta & 1 - \cos\theta - \cos 2\theta \end{bmatrix}\text{，} \tag{8}$$

將(8)式代入(7)式，等號右邊為

$$\frac{1}{1 + 4\sin^2\theta}\begin{bmatrix} 1 - \cos\theta - \cos 2\theta & -\sin\theta - \sin 2\theta \\ \sin\theta + \sin 2\theta & 1 - \cos\theta - \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} F_1\cos\theta - F_{n+1}\cos(n+1)\theta - F_n\cos(n+2)\theta & -F_1\sin\theta + F_{n+1}\sin(n+1)\theta + F_n\sin(n+2)\theta \\ F_1\sin\theta - F_{n+1}\sin(n+1)\theta - F_n\sin(n+2)\theta & F_1\cos\theta - F_{n+1}\cos(n+1)\theta - F_n\cos(n+2)\theta \end{bmatrix} \tag{9}$$

將矩陣乘開後再利用和差角公式，即可得(9)式(1,1)元的分子

$$-1 + [-\cos(n+1)\theta + \cos(n\theta) + \cos(n-1)\theta]F_{n+1} + [-\cos(n+2)\theta + \cos(n+1)\theta + \cos(n\theta)]F_n$$

與(2,1)元分子

$2\sin\theta+[-\sin(n+1)\theta+\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta]F_{n+1}+[-\sin(n+2)\theta+\sin(n+1)\theta+\sin(n\theta)]F_n$ 。

比較(7)式等號兩邊矩陣的(1,1)元與(2,1)元，本定理得證。

肆、利用順向內積公式證明卷積恆等式

我們發現利用定理 1(順向內積)與和角公式可以推出費氏數列與正弦、餘弦函數的卷積，即以下定理 2 與定理 3。

定理 2[1]:　$\sin\theta\cdot F_{n-1}+\sin 2\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+\sin(n-1)\theta\cdot F_1$

$$=\frac{2\sin\theta F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin n\theta}{1+4\sin^2\theta}\text{。}$$

證明:

利用定理 1，得

$$\sin(n\theta)[F_1\cos\theta+F_2\cos 2\theta+\cdots+F_{n-1}\cos(n-1)\theta]$$

$$=\sin(n\theta)\frac{[-\cos(n\theta)+\cos(n-1)\theta+\cos(n-2)\theta]F_n+[-\cos(n+1)\theta+\cos(n\theta)+\cos(n-1)\theta]F_{n-1}-1}{1+4\sin^2\theta}\quad(10)$$

$$\cos(n\theta)[F_1\sin\theta+F_2\sin 2\theta+\cdots+F_{n-1}\sin(n-1)\theta]$$

$$=\cos(n\theta)\frac{[-\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta+\sin(n-2)\theta]F_n+[-\sin(n+1)\theta+\sin(n\theta)+\sin(n-1)\theta]F_{n-1}+2\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}\quad(11)$$

利用$(10)-(11)$式與和差角公式，得

$$F_1\sin(n-1)\theta+F_2\sin(n-2)\theta+\cdots+F_n\sin\theta$$

$$=\frac{[-\sin(n\theta)\cos(n\theta)+\sin(n\theta)\cos(n-1)\theta+\sin(n\theta)\cos(n-2)\theta]-[-\cos(n\theta)\sin(n\theta)+\cos(n\theta)\sin(n-1)\theta+\cos(n\theta)\sin(n-2)\theta]}{1+4\sin^2\theta}F_n$$

$$+\frac{[-\sin(n\theta)\cos(n+1)\theta+\sin(n\theta)\cos(n\theta)+\sin(n\theta)\cos(n-1)\theta]-[-\cos(n\theta)\sin(n+1)\theta+\cos(n\theta)\sin(n\theta)+\cos(n\theta)\sin(n-1)\theta]}{1+4\sin^2\theta}F_{n-1}$$

$$+\frac{-\sin(n\theta)-2\cos(n\theta)\sin\theta}{1+4\sin^2\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\sin 2\theta)F_n+2\sin\theta F_{n-1}+[-\sin(n\theta)-2\cos(n\theta)\sin\theta]}{1+4\sin^2\theta},$$

利用倍角公式與和差化積，得

$$\frac{2\sin\theta F_{n+1}+(2\cos\theta-1)\sin\theta F_n-2\sin(n+1)\theta+(2\cos\theta-1)\sin(n\theta)}{1+4\sin^2\theta} \text{ ,}$$

得證。

定理 3: $cos\,\theta\cdot F_{n-1}+cos\,2\,\theta\cdot F_{n-2}+\cdots+cos(\,n-1)\theta\cdot F_1$

$$=\frac{(\cos 2\theta+\cos\theta-1)F_n+F_{n-1}-\cos(n+1)\theta-\cos n\theta+\cos(n-1)\theta}{1+4\sin^2\theta} \text{ 。}$$

證明:

利用定理 1，得

$$cos(\,n\theta)[F_1\,cos\,\theta+F_2\,cos\,2\,\theta+\cdots+F_{n-1}\,cos(\,n-1)\theta]$$

$$=cos(n\theta)\frac{[-cos(n\theta)+cos(n-1)\theta+cos(n-2)\theta]F_n+[-cos(n+1)\theta+cos(n\theta)+cos(n-1)\theta]F_{n-1}-1}{1+4\,sin^2\,\theta} \tag{12}$$

$$sin(\,n\theta)[F_1\,sin\,\theta+F_2\,sin\,2\,\theta+\cdots+F_{n-1}\,sin(\,n-1)\theta]$$

$$=sin(n\theta)\frac{[-sin(n\theta)+sin(n-1)\theta+sin(n-2)\theta]F_n+[-sin(n+1)\theta+sin(n\theta)+sin(n-1)\theta]F_{n-1}+2\,sin\,\theta}{1+4\,sin^2\,\theta} \tag{13}$$

利用(12) + (13)式與和差角公式，得

$$F_1\,cos(n-1)\,\theta+F_2\,cos(n-2)\,\theta+\cdots+F_n\,cos\,\theta$$

$$=\frac{[-cos(n\theta)\,cos(n\theta)+cos(n\theta)\,cos(n-1)\,\theta+cos(n\theta)\,cos(n-2)\,\theta]+[-sin(n\theta)\,sin(n\theta)+sin(n\theta)\,sin(n-1)\,\theta+sin(n\theta)\,sin(n-2)\,\theta]}{1+4\,sin^2\,\theta}F_n$$

$$=\frac{[-cos(n\theta)\,cos(n+1)\,\theta+cos(n\theta)\,cos(n\theta)+cos(n\theta)\,cos(n-1)\,\theta]+[-sin(n\theta)\,sin(n+1)\,\theta+sin(n\theta)\,sin(n\theta)+sin(n\theta)\,sin(\,n-1)\theta]}{1+4\,sin^2\,\theta}F_{n-1}$$

$$+\frac{-cos(n\theta)+2\,sin(n\theta)\,sin\,\theta}{1+4\,sin^2\,\theta}$$

$$=\frac{(-1+cos\,\theta+cos\,2\theta)F_n+F_{n-1}+[-cos(n+1)\theta+cos(n-1)\theta-cos(n\theta)]}{1+4\,sin^2\,\theta} \text{ ,}$$

得證。

伍、應用

利用定理 1，當取適當的角度時，我們可以得到費氏數列的等式，即以下的定理 4 到定理 8。

定理 4[8]: $F_1+F_2+\cdots+F_n=F_{n+2}-1$。

證明:

利用定理 1(2)，當 $\theta=0$ 代入即可得證。

定理 5[8]: $F_1-F_2+F_3-\cdots+(-1)^{n+1}F_n=(-1)^{n+1}F_{n-1}+1$。

證明:

利用定理 1(2)，當 $\theta=\pi$ 代入，得

$$F_1 cos\pi+F_2\cos(2\times\pi)+\cdots+F_n\cos n\pi$$

$$=-F_1+F_2-F_3+\cdots+(-1)^nF_n$$

$$=\frac{[-\cos(n+1)\pi+\cos(n\pi)+\cos(n-1)\pi]F_{n+1}+[-\cos(n+2)\pi+\cos(n+1)\pi+\cos(n\pi)]F_n-1}{1+4\sin^2\pi} \tag{14}$$

當 n 為奇數時 (14)式為

$$-F_{n+1}+F_n-1=-F_{n-1}-1，$$

當 n 為偶數時 (14)式為

$$F_{n+1}-F_n-1=F_{n-1}-1，$$

得證。

定理 6[8]:$F_1-F_3+F_5+\cdots+(-1)^{n+1}F_{2n-1}=\frac{(-1)^{n+1}(F_{2n}+2F_{2n-1})+2}{5}$。

證明: 利用定理 1(1)，當 $\theta=\frac{\pi}{2}$，項數為 $2n-1$ 時

$$F_1 sin\frac{\pi}{2}+F_2\sin(2\times\frac{\pi}{2})+\cdots+F_{2n-1}\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{\left[-\sin(2n)\frac{\pi}{2}+\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}+\sin(2n-2)\frac{\pi}{2}\right]F_{2n}+\left[-\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}+\sin(2n)\frac{\pi}{2}+\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}\right]F_{2n-1}+2sin\frac{\pi}{2}}{1+4\sin^2\frac{\pi}{2}} \tag{15}$$

當 n 為奇數時 (15)為

$$\frac{F_{2n}+2F_{2n-1}+2}{5}\quad，$$

當 n 為偶數時 (15)為

$$\frac{-F_{2n}-2F_{2n-1}+2}{5}\ ,$$

得證。

定理 7[8]: $\sum_{k=0}^{n} F_{3k+3}=\frac{F_{3n+5}-1}{2}$ 。

證明:

利用定理 1(2)，

$F_1 cos\theta + F_2\cos 2\theta + \cdots + F_n\cos(n\theta)$

$$=\frac{[-\cos(n+1)\,\theta+\cos(n\theta)+\cos(n-1)\,\theta]F_{n+1}+[-\cos(n+2)\,\theta+\cos(n+1)\,\theta+\cos(n\theta)]F_n-1}{1+4\sin^2\theta}$$

當 $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ，項數為 $3n+3$ 時，

$$\sum_{k=1}^{3n+3}F_k\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=\left(F_1\cos\frac{2\pi}{3}+F_2\cos\frac{4\pi}{3}+F_3\cos\frac{6\pi}{3}\right)+\left(F_4\cos\frac{8\pi}{3}+F_5\cos\frac{10\pi}{3}+F_6\cos\frac{12\pi}{3}\right)$$

$$+\cdots+\left(F_{3n+1}\cos\frac{2\pi(3n+1)}{3}+F_{3n+2}\cos\frac{2\pi(3n+2)}{3}+F_{3n+3}\cos\frac{2\pi(3n+3)}{3}\right)$$

$$=\left(F_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_3\right)+\left(F_4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_6\right)+\cdots+\left(F_{3n+1}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_{3n+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+F_{3n+3}\right)$$

$$=\frac{\left[-\cos(3n+4)\frac{2\pi}{3}+\cos(3n+3)\frac{2\pi}{3}+\cos(3n+2)\frac{2\pi}{3}\right]F_{3n+4}+\left[-\cos(3n+5)\frac{2\pi}{3}+\cos(3n+4)\frac{2\pi}{3}+\cos(3n+3)\frac{2\pi}{3}\right]F_{3n+3}-1}{1+4\sin^2\frac{2\pi}{3}}$$

$$=\frac{F_{3n+4}+F_{3n+3}-1}{4}=\frac{F_{3n+5}-1}{4} \qquad (16)$$

將(16)式等號兩邊同乘 (-2) ，得

$$\sum_{k=0}^{n}\left(F_{3k+1}+F_{3k+2}-2F_{3k+3}\right)=\frac{1-F_{3n+5}}{2} \qquad (17)$$

因為 $F_{3k+1}+F_{3k+2}-2F_{3k+3}=-F_{3k+3}$ ，代入(17) 得

$$\sum_{k=0}^{n} F_{3k+3} = \frac{F_{3n+5}-1}{2}$$ ，得證。

定理 8: $$\sum_{k=0}^{n}\left(F_{6k+1}-F_{6k+4}+2F_{6k+6}\right)=\frac{F_{6n+7}+2F_{6n+6}-1}{2}$$ 。

證明:

利用定理 1(2)，

$$F_1 cos\theta + F_2\cos 2\theta + \cdots + F_n\cos(n\theta)$$

$$= \frac{[-\cos(n+1)\,\theta+\cos(n\theta)+\cos(n-1)\,\theta]F_{n+1}+[-\cos(n+2)\,\theta+\cos(n+1)\,\theta+\cos(n\theta)]F_n-1}{1+4\sin^2\theta}$$

當 $\theta=\frac{\pi}{3}$ ，項數為 $6n+6$時，

$$\sum_{k=1}^{6n+6}F_k\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)=\left(F_1\cos\frac{\pi}{3}+F_2\cos\frac{2\pi}{3}+F_3\cos\frac{3\pi}{3}+F_4\cos\frac{4\pi}{3}+F_5\cos\frac{5\pi}{3}+F_6\cos\frac{6\pi}{3}\right)$$

$$+\left(F_7\cos\frac{7\pi}{3}+F_8\cos\frac{8\pi}{3}+F_9\cos\frac{9\pi}{3}+F_{10}\cos\frac{10\pi}{3}+F_{11}\cos\frac{11\pi}{3}+F_{12}\cos\frac{12\pi}{3}\right)$$

$$+\cdots$$

$$+\left(F_{6n+1}\cos\frac{(6n+1)\pi}{3}+F_{6n+2}\cos\frac{(6n+2)\pi}{3}+F_{6n+3}\cos\frac{(6n+3)\pi}{3}+F_{6n+4}\cos\frac{(6n+4)\pi}{3}+F_{6n+5}\cos\frac{(6n+5)\pi}{3}+F_{6n+6}\cos\frac{(6n+6)\pi}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(F_1-F_2-2F_3-F_4+F_5+2F_6\right)+\left(F_7-F_8-2F_9-F_{10}+F_{11}+2F_{12}\right)+\cdots+\left(F_{6n+1}-F_{6n+2}-2F_{6n+3}-F_{6n+4}+F_{6n+5}+2F_{6n+6}\right)\right]$$

$$=\frac{\left[-\cos(6n+7)\frac{\pi}{3}+\cos(6n+6)\frac{\pi}{3}+\cos(6n+5)\frac{\pi}{3}\right]F_{6n+7}+\left[-\cos(6n+8)\frac{\pi}{3}+\cos(6n+7)\frac{\pi}{3}+\cos(6n+6)\frac{\pi}{3}\right]F_{6n+6}-1}{1+4\sin^2\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{F_{6n+7}+2F_{6n+6}-1}{4} \qquad (18)$$

將(18)式等號兩邊同乘 2，得

$$\sum_{k=0}^{n}\left(F_{6k+1}-F_{6k+2}-2F_{6k+3}-F_{6k+4}+F_{6k+5}+2F_{6k+6}\right)=\frac{F_{6n+7}+2F_{6n+6}-1}{2}$$ ，

因為

$$F_{6k+1}-F_{6k+2}-2F_{6k+3}-F_{6k+4}+F_{6k+5}+2F_{6k+6}=F_{6k+1}-F_{6k+4}+2F_{6k+6},$$

故 $\sum_{k=0}^{n}\left(F_{6k+1}-F_{6k+4}+2F_{6k+6}\right)=\dfrac{F_{6n+7}+2F_{6n+6}-1}{2}$，

得證。

陸、結語

費氏數列與三角函數是中學生常見的題材，我們利用基本的矩陣計算，來作它們的順向內積，再藉由和角公式推出它們的卷積，使用的都是常用的手法，並無高深知識或特殊技巧。對於費氏數列有興趣的讀者，可參考資料[8]，

這本書厚達 600 頁以上，閱讀它除了可以了解更多費氏數列的題材外，更可從中找到許多研究問題。

參考資料:

1. 陳建燁。費波那契彈(談)正弦--F-sine 卷積恆等式。科學教育月刊, 407, 18-23, 2018。
2. 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話(上)：將 Padovan 數列用「完全齊次對稱多項式」表示。數學傳播季刊, 42(1), 71-79, 2018。
3. 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 的對話(下)：F-P 卷積恆等式。數學傳播季刊, 42(3), 66-73, 2018。
4. 陳建燁。F-P 卷積恆等式的一頁證明。數學傳播季刊,43(3), 60-62, 2018。
5. 陳建燁。Fibonacci 與 Padovan 順向內積恆等式。科學教育月刊,428 期, 32-39,2020。
6. 廖信傑。用矩陣方法探討三階遞迴數列。數學傳播季刊,38(1), 36-55, 2014。
7. 廖信傑、薛昭雄。關於「Fibonacci 與 Padovan 的對話及 F-P 卷積恆等式」之迴響。數學傳播季刊,44(1), 50-57, 2020。
8. T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, 2001.