消費者剩餘與生產者剩餘

李政豐 [1*] 黃立國 [2]

[1] 國立竹南高級中學 退休數學教師

[2] 銘傳大學經濟系退休教授

壹、緣起

108 數學新課綱，條目 F-12 乙-6 積分的應用：連續函數值的平均、總量與剩餘意涵.在課程手冊 P.490 的釋例中，出現消費者剩餘與生產者剩餘，做為某個閉區間兩個函數圖形所夾面積的積分練習，有的課本放在數學乙(上)，也有的放在數學乙(下)，這是一個新的嘗試，是好的開始，讓學生了解積分在生活中的應用。當時的定位是數學乙在指考是不考的，但是現在的定位是 114 年分科測驗考試也可能納入數學乙的考試範圍。

現行新教科書較偏向於積分的計算，對兩種剩餘、需求曲線及供給曲線在經濟學裡的解說與意涵稍有不足，許多高中數學老師抱怨這個單元很難教。因為我們經濟學科目學得不多，我聽到一位老師的感嘆：「連我都無法說服我自己，我怎麼去教給學生?」於是，特地請教了銘傳大學經濟糸黃立國教授之後，引起動機去寫一段更通俗的教材，希望對教師及學生的了解會有點幫助。

貳、本文

我們先來了解兩種曲線：

一、 需求曲線

在開放市場，消費者對商品需求的數量，會受到商品價格的影響。假設市場調查發現，某商品價格與需求數量的對應關係如下:

當商品單價為 90 元時，消費者願意購買 1 個商品；

當商品單價為 80 元時，消費者願意購買 2 個商品；

當商品單價為 70 元時，消費者願意購買 3 個商品；

……………………………………………………………………………..

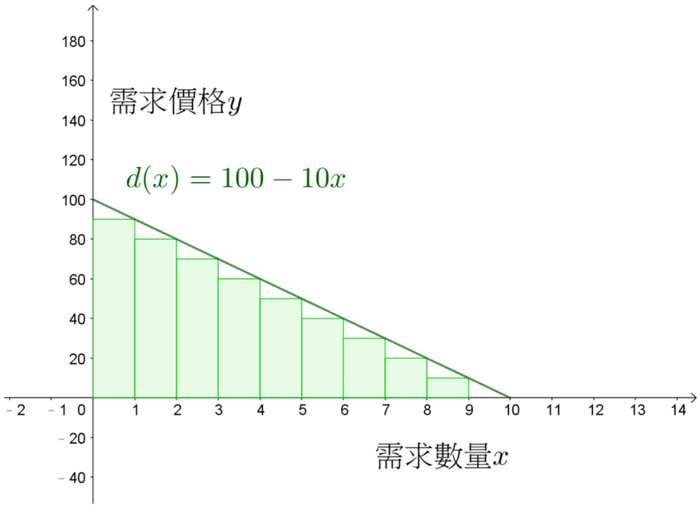
當商品單價為 10 元時，消費者願意購買 9 個商品。

價格 d(x)	90	80	70	60	50	40	30	20	10
願意購買的商品個數 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9

從上表，我們可看出

1. 當商品價格高的時候，消費者需求的數量較少，當商品價格低的時候，消費者需求的數量會變多。
2. 在其他情況維持不變的情況下，需求曲線是由需求數量與需求價格成”反比”的關係所畫出的曲線 (這裡的反比是指價格高，需求量少，價格低，需求量多，不一定是$xy=k$的關係)。

我們可以將數量 x 對應價格 y 的直方圖畫出如下：



圖一

根據圖一，我們可以找得一條多項式的最適合曲線為 $y=100-10x$ 。 (當然也可能是指數或其他函數的曲線)。以 x 代表數量，$d(x)$代表價格，我們得到一條消費者需求曲線 $d(x)=100-10x$。

二、 供給曲線

另一個經濟現象是：對生產者而言，當商品價格上揚時，在獲得更大的利潤吸引下，生產者願意供給的商品數量會增加。假設市場調查發現，某商品價格與生產者願意供給商品數量的對應關係如下：

當單價為 26 元時，生產者願意供給 1 個商品；

當單價為 32 元時，生產者願意供給 2 個商品；

當單價為 38 元時，生產者願意供給 3 個商品；

……………………………………………………………………………

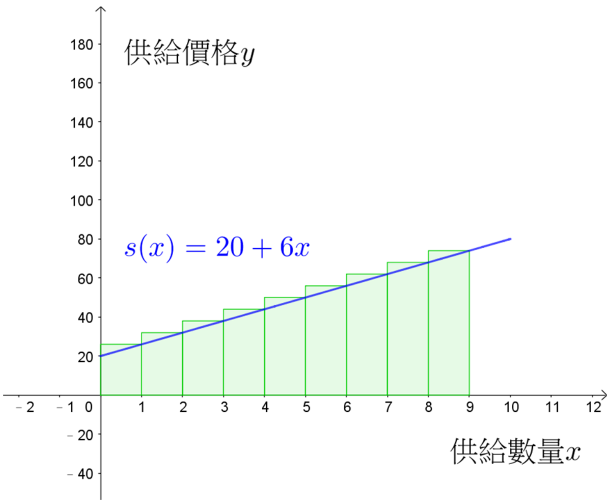
當單價為 74 元時，生產者願意供給 9 個商品。

價格 s(x)	26	32	38	44	50	56	62	68	74
生產者願意供應的商品數量 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9

從上表，我們可看出：

1. 當商品價格低的時候，生產者願意供給的數量較少，當商品價格高的時候，生產者願意供給的數量會變多。
2. 在其他情況維持不變的情況下，供給曲線是由供給數量與供給價格成”正比”的關係所畫出的曲線.(這裡的正比是指價格低，則供給數量較少，價格升高，則供給數量會變多，不一定是$y = kx$的關係)。

我們可以將生產者願意供給商品數量 x 對應商品價格 y 的直方圖畫出如下：



圖二

根據圖二，我們可以找得一條多項式的最適合曲線 $y = 20 + 6x$ (當然也可能是指數或其他函數的曲線)。以 x 代表數量，$s(x)$代表價格，我們得到一條生產者供給曲線 $s(x) = 20 + 6x$。

三、消費者剩餘與生產者剩餘

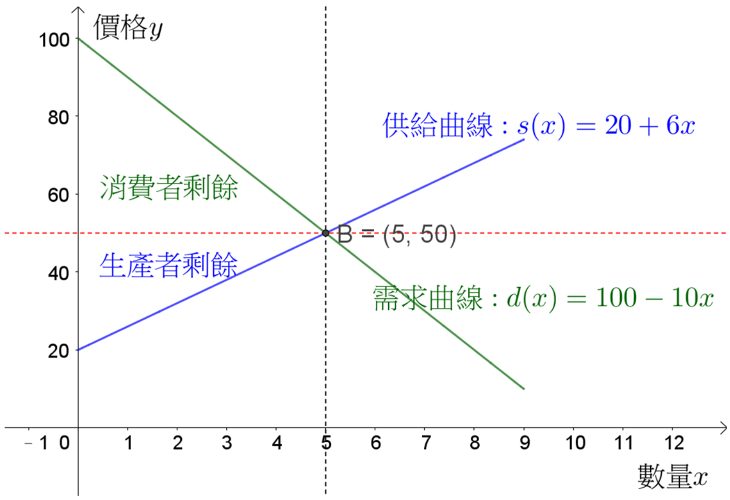
我們想要計算的消費者剩餘與生產者剩餘是多少錢。因此消費者的需求曲線$d(x)$與生產者的供給曲線$s(x)$，都以價格當 y 坐標、數量當作 x 坐標，這樣把價格 y 對數量 x 的積分。才會是代表錢的多少。在其他情況維持不變的情況下，商品均衡價格與均衡數量是由

消費者需求曲線與生產者供給曲線的交點來決定的(當兩種曲線的函數值相等時)。在前面提到的例子中，

$$s(x) = d(x)$$

$$20 + 6x = 100 - 10x$$

解得當時的均衡數量(生產或消費) $x = 5$，此時，均衡價格 $s(x) = d(x) = 50$。當均衡數量 $x = 5$ 時，參考下面圖三。



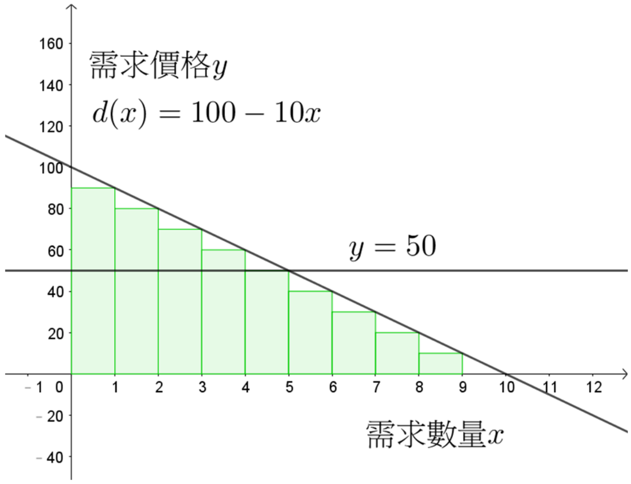
圖三

消費者剩餘：

甲、 若以離散的直方圖來說明：消費者剩餘是指「消費者願付的錢減實付(均衡價格×均衡數量)的正差額」，即是消費者討到的便宜。

當買入的商品數量 $x = 5$ 時，此時代入消費者需求曲線得到價格 $d(5) = 100 - 10 \times 5$=50。

價格 d(x)	90	80	70	60	50	40	30	20	10
願意購買的商品個數 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9



圖四

消費者剩餘=(90-50)+(80-50)+(70-50)+(60-50)+(50-50)=100 元，也就是消費者原來願意以需求函數算得的價格，每種價格購買 1 個商品。但最後成交卻以較低的均衡價格50元購買均衡數量 5 個商品，這樣交易所節省下來的錢。

乙、 若現在 x 坐標代表的不是商品多少個，而是多少單位(如每單位是 1 萬個)

1 個商品的價格 d(x)	90	80	70	60	50	40	30	20	10
願購買的商品單位數 x (每單位 1 萬個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

此時圖三的 x 坐標就不是正整數，例如 10005 個商品，x=1.0005，它變成是小數，這時 x 坐標很像實數，1 個 x 對應 1 個 $d(x)$，呈現出很密集的點散布圖，幾乎是一條連續的直線，這就是消費者需求曲線 $d(x) = 100 - 10x$。此時消費者剩餘是指「消費者願付的錢(需求曲線從 0 積分到均衡數量)減實付(均衡價格×均衡數量)的正差額」，也就是消費者討到的便宜。如果用上面圖(4)來說明，即為y軸、消費者需求曲線$d(x) = 100 - 10x$與均衡價格$y = 50$三者所圍的三角形面積。若以連續的需求曲線 $d(x) = 100 - 10x$ 來說明：令

A=數量 x 在 0 到 5 之間，把需求函數 $d(x) = 100 - 10x$ 對x積分（代表消費者願意支付的金額）

B=以均衡價格 50 元購買均衡數量 5 單位的金額

則消費者剩餘=$A-B$ ，可用積分表示如下：

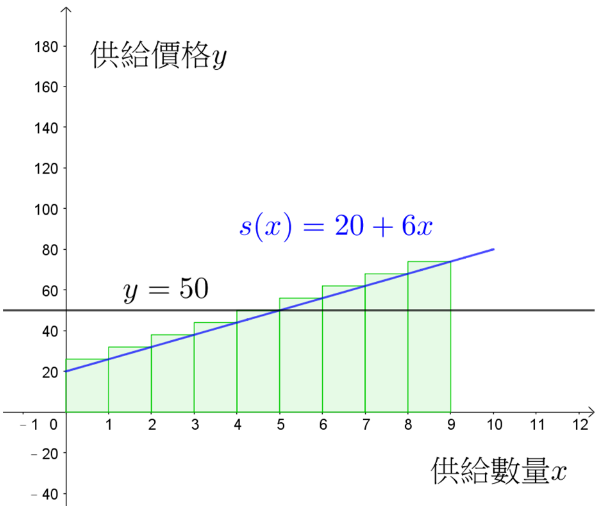
$$\int_0^5[(100-10x)-50]dx=(50x-5x^2)\Big|_0^5=125 \text{ 萬元}$$

如圖四，需求函數是直線，當然也可以用三角形面積來計算 $\frac{1}{2}(100-50)\times 5=125$萬元。當每單位的商品個數很多的時候，並且我們又知道需求函數，用積分來計算消費者剩餘會更方便。

生產者剩餘：

甲、 若以離散的直方圖來說明：生產者剩餘是指「生產者實收(均衡價格×均衡數量)減去成本之後的正差額」，也就是生產著所獲得的利潤。例如：當賣出的商品數量$x=5$時，代入生產者供給曲線價格 $s(5)=20+6\times 5$=50。

價格 s(x)	26	32	38	44	50	56	62	68	74
生產者願意供應的商品個數 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9



圖五

生產者剩餘=(50-26)+(50-32)+(50-38)+(50-44)+(50-50)=60 元，也就是生產者原來打算以供給函數算得的價格，每種價格賣出 1 單位商品。但最後成交卻按照較高的均衡價格50元賣出均衡數量 5 個商品，這樣交易所多賺到的錢。

乙、 若現在 x 坐標代表的不是商品多少個，而是多少單位(如每單位是 1 萬個)

1 個商品的價格 $s(x)$	26	32	38	44	50	56	62	68	74
生產者願意供應的商品單位數 x (每單位 1 萬個)	1	2	3	4	5	6	7	8	9

此時圖五的 x 坐標就不是正整數，例如 13 個商品，x=0.0013，它變成是小數。這時 x 坐標就像實數，1 個 x 對應 1 個$s(x)$，是很密集的點散布圖，變成像直線一樣，這就是生產者供給曲線$s\,(x) = 20 + 6x$。此時生產者剩餘是指「生產者實收(均衡價格×均衡數量)減成本(生產曲線從 0 積分到均衡數量)的正差額」，也就是生產者所獲得的利潤。如果用上面圖五來說明，即為y軸、生產者供給曲線$s(x) = 20 + 6x$與均衡價格$y = 50$三者所圍的三角形面積。若以連續的供給曲線$s(x) = 20 + 6x$來說明：令

C=數量 x 在 0 到 5 之間，把供給函數$s(x) = 20 + 6x$對 x 積分所得的值

（代表生產者按照供給曲線的價格所賣得的成本金額.）

B=以均衡價格 50 元賣出均衡數量 5 單位所獲得的金額

則生產者剩餘=$B - C$，將它用積分表示是

$$\int_0^5 [50 - (20 + 6x)]dx = (30x - 3x^2)\Big|_0^5 = 75\text{萬元}。$$

供給函數是直線，我們也可以用三角形面積來計算 $\frac{1}{2}(50 - 20) \times 5 = 75$萬元。

當每單位的商品個數很大的時候，並且我們又知道供給函數，用積分來計算生產者剩餘會很方便。

例題：

假設在其他情況維持不變的情況下，商品價格是由消費者的需求曲線與生產者的供給曲線的交點來決定(兩種曲線的函數值相等時)。已知消費者的需求曲線函數是$d(x) = 100 - x^2$，例如：當$x = 3$， $d(3) = 91$，代表當單價為 91 元時，消費者願意購買 3 單位商品。又知生產者的供給曲線函數是$s(x) = 3x^2$，例如：當$x = 4$， $s(4) = 84$，代表當單價為 84 元時，生產者願意供給 4 單位商品。

試求：均衡數量、均衡價格、消費者者剩餘與生產者剩餘。

解說：

$$s(x) = d(x)$$

$$3x^2 = 100 - x^2$$

解得當時的均衡數量(生產或消費) $x = 5$單位

此時均衡價格 $s(x) = d(x) = 75$元

當數量$x = 5$時，參考下面圖六

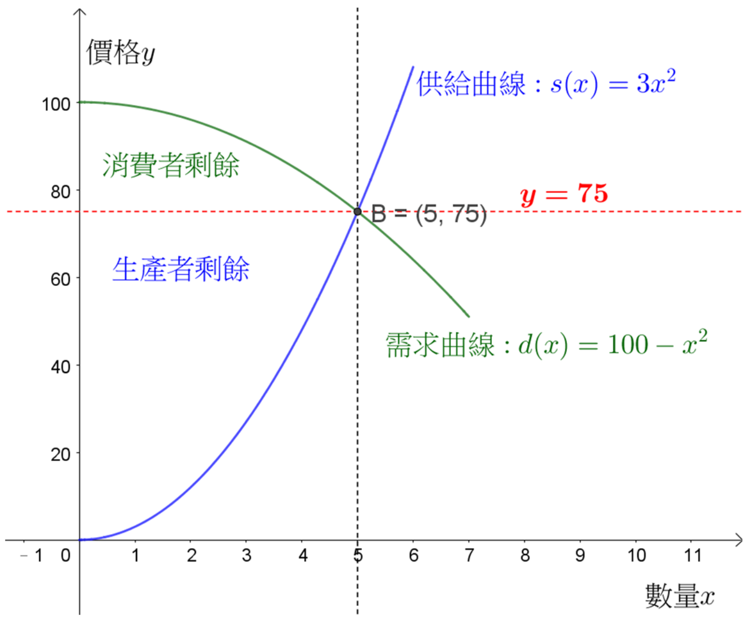


圖 六

消費者剩餘：

如圖六是指y軸、消費者需求曲線$d(x) = 100 - x^2$與平衡價格$y = 75$三者所圍的面積。若以連續的需求曲線 $d(x) = 100 - x^2$來說明: 令

A=數量 x 在 0 到 5 之間，把需求函數$d(x) = 100 - x^2$對x積分

（代表消費者願意支付的金額）

B=以均衡價格 75 元購買均衡數量 5 單位的金額

則消費者剩餘=$A - B$ ，可用積分表示是

$\int_0^5 [(100 - x^2) - 75]dx = \frac{250}{3} \approx 83.3333$元。

生產者剩餘：

如圖六是指y軸、生產者供給曲線$s(x) = 3x^2$與平衡價格$y = 75$三者所圍的面積。若以連續的供給曲線$s(x) = 3x^2$來說明：令

C=數量 x 在 0 到 5 之間，把供給函數$s(x) = 3x^2$對 x 積分所得的值

（代表生產者按照供給曲線的價格所賣得的成本金額）

B=以均衡價格 75 元賣出均衡數量 5 單位所獲得的金額

則生產者剩餘=$B - C$，可用積分表示是$\int_0^5 (75 - 3x^2)dx = 250$元

注意此例題的需求曲線與供給曲線是二次函數，無法用三角形或梯形法來算，只能借用積分來求區域面積。

參、結語

教材的編寫要遵循簡單、明瞭與扼要的三大原則，所用到的名詞要定義得很嚴謹詳細；例如：需求曲線、供給曲線、消費者剩餘與生產者剩餘。各種名詞的性質要能解釋很清楚；例如：需求曲線是在其他情況維持不變的情況下，由需求數量與需求價格成反比的關係所畫出的曲線.(這裡的反比是指價格高、需求量少，價格低、需求量多，不一定是$xy = k$的關係)。還需要提到:消費者剩餘+生產者剩餘=社會剩餘(社會福利)，這是我們學習兩種剩餘的最終目的。新課綱加入許多生活中的情境與素養，這是好的導向。但是數學老師寫出來的教材是嚴謹而理想化，經濟學老師寫出來的教材是實用而社會化，如果能兩者兼顧，那才是老師與學生的福氣。

參考資料:

1. G. Don Allen，Charles Chui，and Bill Perry (1988)，Elements of Calculus，華泰書局。
2. 翁秉仁(2015)，微積分乙，台大出版中心。
3. 黃立國(1991)，經濟學原理(第三版)，昌海書局出版。