中學生通訊解題第 146 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14601

已知 x 是自然數，若化分數 $\frac{x}{23}$ 為循環小數，可得 $\frac{x}{23}=0.\overline{c_1c_2c_3 60c_6c_7\cdots c_{22}}$，求 x 之值。

【簡答】 18

【詳解】

設 $\frac{y}{23}=0.\overline{60a_3a_4a_5\cdots a_{22}}$，$y$ 是自然數，則 $\frac{60}{100}<\frac{y}{23}<\frac{61}{100}$，

$\Rightarrow \frac{1380}{2300}<\frac{100y}{2300}<\frac{1403}{100}$，而知 $y=14$，得 $\frac{14}{23}=0.\overline{60a_3a_4a_5\cdots a_{22}}$，

因為 $\frac{x}{23}=0.\overline{c_1c_2c_3 60c_6c_7\cdots c_{22}}$，所以 $\frac{1000x}{23}=k+\frac{14}{23}$，

k 是自然數，$k=\overline{c_1c_2c_3}$，得 $1000x=23k+14$，

化為 $(23\times 43)x+11x=23k+14$，可知 $11x$ 除以 23 之餘數為 14，

即存在自然數 a，使得 $11x=23a+14\cdots\cdots$ (I)，

化為 $11x=11\times(2a+1)+a+3$，可知 $a+3$ 是 11 的倍數，

即存在自然數 t，使 $a+3=11t$，代回(I)式，

得 $11x=23(11t-3)+14=23\times 11t-55$，故 $x=23t-5\cdots\cdots$ (II)，

由於 $x<23$，t 是自然數，根據(II)式，解得 $x=18$ 唯一存在。

【解題評析】

循環小數是小學時候就已接觸的名詞，「任何一個分數都可化成有限小數或循環小數」也是眾所周知的概念，你會化分數為小數嗎？當然；甚至，「如何化有限小數或循環小數為分數」，對於多數同學來說，相信也非難事。

然而，循環小數知多少？同學們在處理分數與小數形式互換之餘，除了算術操作之外，對於可能蘊涵其中的算理，是否感到好奇？是否曾經仔細思考或進而深入研究？以

下是有關分數與小數之關係的幾個基本性質：

(1) 分母的質因數只有 2 或 5 之既約分數，可化為有限小數。

(2) 分母的質因數有 2 或 5 以外質數之既約分數，可化為循環小數。

(i) 承(2)，分母的質因數不含 2 和 5 者，可化為純循環小數。

(ii) 承(2)，分母的質因數含 2 或 5 者，可化為混循環小數；此混循環小數「不循環的位數」與「分母的因數裡 2 或 5 乘冪之較大者」等值。

(3) 分母為 n 之既約分數，若可化為循環小數，則其循環節最多有 n−1 位。

這些性質應已耳熟能詳，其中算理簡明易懂，只要基本概念便可充分掌握。

此外，還有一些有趣的性質值得探索，以下簡述一二。

(4) 設 k./ p 表示「分子為 k，分母為 p」的分數，其中 p 是質數，1≦k＜p，k 是自然數；又設 k./ p 之循環小數表示式的循環節之長度有 m 位，則

(i) m 是 p−1 的因數。

(ii) m = p−1 時，

對於任意 k 值，循環節內容為相同一組 m 個數字的循環排列。

例如：p = 7 時，

循環節為(142857)，隨 k 值分別為 1, 3, 2, 6, 4, 5 依序循環排列，

1/7 =$0.\overline{142857}$，3/7 =$0.\overline{428571}$，2/7 =$0.\overline{285714}$，

6/7 = $0.\overline{857124}$，4/7 =$0.\overline{571428}$，5/7 =$0.\overline{714285}$。

(iii) 2m = p−1 時，循環節有兩組，

對於一半 k 值，循環節內容為相同一組 m 個數字的循環排列；

另一半 k 值亦然，其循環節內容為另外一組 m 個數字的循環排列。

例如：p = 13 時，循環節有兩組，

一組為(076923)，隨 k 之值分別為 1, 10, 9, 12, 3, 4 依序循環排列，

1/13 =$0.\overline{076923}$，10/13 =$0.\overline{769230}$，9/13 =$0.\overline{692307}$，

12/13 =$0.\overline{923076}$，3/13 =$0.\overline{230769}$，4/13 =$0.\overline{307692}$；

另一組為(153846)，隨 k 之值分別為 2, 7, 5, 11, 6, 8 依序循環排列，

2/13 =$0.\overline{153846}$，7/13 =$0.\overline{538461}$，5/13 =$0.\overline{384615}$，

11/13 =$0.\overline{846153}$，6/13 =$0.\overline{461538}$，8/13 =$0.\overline{615384}$。

(iv) 其他情形類推。

(5) 分母為質數之既約分數，若其循環節長度為偶數，則將循環節從中切分為位數相同的兩段後，此兩段中相同位置的兩個數字之和必為 9。

例如：1/7 =$0.\overline{142857}$，若分 142857 為 142 與 867，則 142+857 = 999。

性質(4)之由來為何，同學如果用心思考，必然有所發現，這樣的發現足以讓人感 到喜悅。實際上，「小數運算之小數點每右移一位」或「長除法運算之每往右補一 個 0」，皆等同原數乘以 10，k 值之如何依序變化於是可知。

性質(5)之證明如下，提供參考。

已知 p 是質數，k 是自然數，1≦k＜p，又設 k / p 可化為循環節是 2n 位的純循環小數，如右：$0.\overline{d_1 d_2 \ldots d_n d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n}}$，

則有自然數 a = $\overline{d_1 d_2 \ldots d_n}$，b = $\overline{d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n}}$，a≠b，a+b＜2($10^n-1$)，

使得
$$\frac{k}{p}=\frac{10^n a+b}{10^{2n}-1}=\frac{(10^n-1)a+(a+b)}{(10^n-1)(10^n+1)}=\frac{(10^n+1)a+(-a+b)}{(10^n-1)(10^n+1)}，$$

由於 −a+b＜10^n+1，而知 $10^n a+b$ 不可能是 10^n+1 的倍數，但 p 是質數，因此，$10^n a+b$ 為 10^n-1 的倍數，故 a+b 是 10^n-1 的倍數，而 a+b＜2(10^n-1)，得證 a+b = 10^n-1 = 99⋯9。

本題雖然架構在循環小數上，解題思維對於循環小數的認識之要求其實非常低，如同以上【詳解】所寫下的方法，找到 1000x = 23k + 14 這個式子是很容易的，如何尋找此一不定方程式的自然數解才是需要注意的重點。

然而，受到循環小數表象的影響，多數應答同學走的不是這條路，而直接從算出 1/23 = $0.\overline{0434782608695652173913}$ 著手，這應與 23 太小有關，如果將 23 改成 113，而循環節改為有 56 位，再求 x 值，那麼大家可能會有另外的思考。（答：如此改換數據後，可得 x = 109，請再試算。）

當然以解題而言，方法可以多樣，一題多解，舊題新解，難題巧解，都可以拓展辨析與想像能力，有助於數學素養與解題視野的提升，是值得研究、推介與鼓勵的課題。不過，先將 1/23 化為小數頗為費事，不是好方法；而由該小數式到寫出 x/23 = 0.782608695⋯，其間何以可以如此跳躍，最好有所論述，這就有賴於確實的理解與良好的表達能力了。在這一點，答題同學大多語焉不詳或不置一詞，不僅是否確實理解未可確知，有些還露出了一知半解的本質，嚴謹程度有明顯的缺失，是不能評為滿分的主因，雖然答案正確。

事實上，利用長除法化 1/23 為小數的過程，就是 1, 10, 100,⋯ 除以 13 求商與餘數的連續操作，(參照以上性質(4))，故循環節(0434782608695652173913)小數點後由第 n 個數開始之循環小數（n = 1, 2,⋯, 22）若等於 k/23，則 k 為 10^{n-1} 除以 23 的餘數，故知這些循環小數所對應的分數 k/23 的分子 k 之值依序為 1, 10, 8, 11, 18, 19, 6, 14, 2, 20, 16, 22,

13, 15, 12, 5, 4, 17, 9, 21, 3, 7，因此，只要掌握長除法的要點，即足以解題，實在不必完全化 1/23 為小數。

利用長除法，要求本題之 x 值，在先找到介於 0.60×23 與 0.61×23 之數為 14 後，如果已知前述數列，那麼只要由 14 往前數到第三個數為 18，即得 x 值；如果不知前述數列，試著逆算長除法如下：

14+23×2 = 60，6+23×8 = 190，19+23×7 = 180，即得 x = 18。

以上算法數據 2, 8, 7 之取得根據為何？為何可以這麼算？ 本題很容易找到答案，除了【詳解】所演示者之外，還有此處【評析】裡所展示的方法。但我們不能以找到答案為已足，所謂「實事求是，精益求精」，為了希望同學們能詳加考慮其中的原因，溫故知新，所以寫下了以上一些有關循環小數的說明，以為同學慎思明辨之助。

本題應答頗為踴躍，共有 52 人參與答題，答題同學表現優良，值得稱道。

問題編號
14602

已知 $-1 \le x \le 1$, $y=\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}+\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}}$，求 y 的最大值在哪兩個連續整數之間？

【簡答】 在 4, 5 之間

【詳解】

反覆利用不等式 $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

$$
\begin{aligned}
y&=\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}+\sqrt{4+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}}\\
&\le\sqrt{2\left(8+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}\right)}\\
&=\sqrt{16+2\left(\sqrt{3+\sqrt{1+x}}+\sqrt{3+\sqrt{1-x}}\right)}\\
&\le\sqrt{16+2\sqrt{2\left(6+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}}
\end{aligned}
$$

$$=\sqrt{16+2\sqrt{12+2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)}}$$

$$\leq\sqrt{16+2\sqrt{12+2\left(\sqrt{2\cdot 2}\right)}}$$

$$=\sqrt{24}$$

取 $x=0$ 時 $1+x=1-x$，可以發生 y 的最大值為 $\sqrt{24}$。

$\because\ 4=\sqrt{16}<\sqrt{24}<\sqrt{25}=5 \quad \therefore\ y$ 的最大值在 4,5 之間。

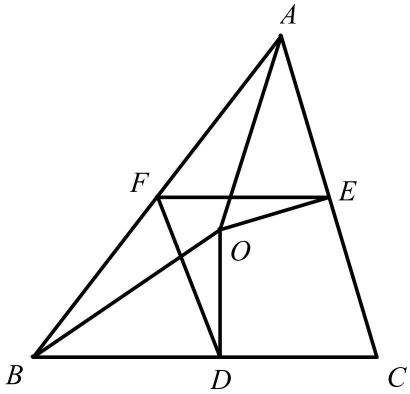
【解題評析】

本題屬偏易的代數題，反覆利用一個不等式操作得出極值再予以估計。多數同學直接從題設估計範圍，呈現出許多有趣的估計想法。但也是有同學所用的論述沒有理論支持未竟全功，還有進步空間。本題共 7 位同學參與徵答，6 位同學獲得滿分。

問題編號

14603

已知 O 為 ΔABC 內一點，D、E 分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 上，滿足 $\overline{OD}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{OE}\perp\overline{AC}$，F 為 $\overline{AB}$ 的中點，已知 $\angle OBD=\angle OAE$，證明 $\overline{DF}=\overline{EF}$。



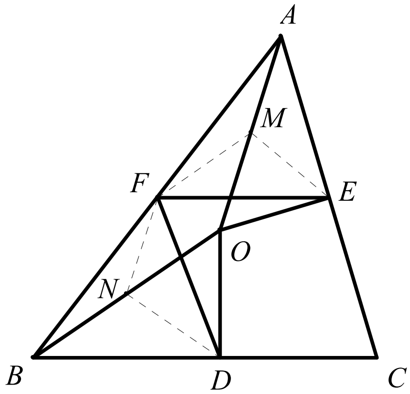
【證明】

作 $\overline{AO}$ 中點 M，$\overline{BO}$ 中點 N，因為 ΔOBD 為直角三角形，

所以 $\overline{ND}=\dfrac{1}{2}\overline{OB}=\overline{MF}$，同理，$\overline{ME}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\overline{NF}$，

又 $\overline{MF}\,//\,\overline{OB}$ 且 $\overline{NF}\,//\,\overline{OA}$，

所以四邊形 $ONFM$ 是平行四邊形，得 $\angle ONF = \angle OMF$ ，
又 $\angle OBD = \angle OAE$ 得 $\angle OND = 2\angle OBD = 2\angle OAE = \angle OME$ ，
所以 $\angle FND = \angle FME$ ，得 $\Delta DNF \cong \Delta FME$ (SAS)，所以 $\overline{DF} = \overline{EF}$ 。

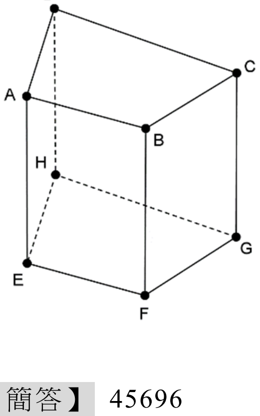


【解題評析】

本題的解題關鍵在於作出 $\overline{AO}$ 與 $\overline{BO}$ 中點，便可使用直角三角形的斜邊中點到三頂點等距離與三角形中點連線的性質，再使用三角形的全等性質得到最後的結果。

問題編號
14604

如圖，要用 8 種顏色將一個四稜柱 $ABCD-EFGH$ 的 6 個面染色，滿足有公共邊的任意兩個面不同色，問共有多少種不同的染色方法？



【簡答】 45696

【詳解】

(1) 若上、下兩個底面不同色，則從 8 色中取 1 色染上底面，有 8 種方法，
餘下 7 色中取 1 色染下底面有 7 種方法，
則染上、下底面有 $8\times 7=56$ 種方法，
餘下 6 色染 4 個面，
又分兩種情形：
當前、後兩個側面不同色時，
染前、後側面有 $6\times 5=30$ 種染色方法，
而左、右兩個側面各有 4 種染色方法，
4 個側面有 $30\times 4\times 4=480$ 種染色方法；
當前、後側面同色時，
類似可得 4 個側面有 $6\times 5\times 5=150$ 種染色方法，
故 4 個側面共有 $480+150=630$ 種染色方法，
這時四稜柱有 $56\times 630=35280$ 種染色方法。

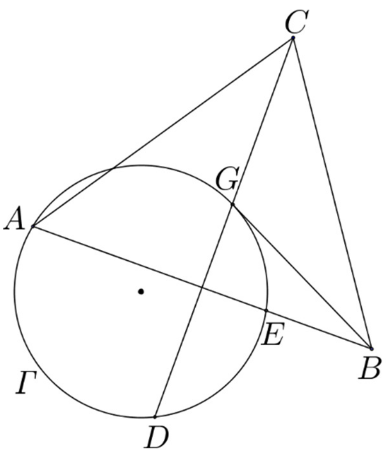
(2) 當上、下底面同色時，
用 1 色染上、下底面有 8 種方法，
餘下 7 色染 4 個側面(分前、後面不同色、同色兩種情形)
有 $7\times 6\times 5\times 5+7\times 6\times 6=1050+252=1302$ 種染色方法，
這時四稜柱有 $8\times 1302=10416$ 種染色方法。
綜上所述，四稜柱共有 $35280+10416=45696$ 種染色方法。

【解題評析】

本期共有 8 位同學參加徵答。參與答題的同學，分析的都非常有系統，寫的也很詳細，值得鼓勵。

問題編號
14605

已知等腰△ABC 中，$\overline{CA}=\overline{CB}$，作圓 Γ 過△ABC 的重心 G 及頂點 A，並與 $\overline{BG}$ 切於點 G，延長 $\overline{CG}$ 交 Γ 於點 D，$\overline{AB}$ 交 Γ 於點 E，證明：$\overline{BE}\cdot\overline{BA}=\overline{GC}\cdot\overline{GD}$。



【證明】

因為 $\overline{CA}=\overline{CB}$，所以 $\overline{GA}=\overline{GB}$，

由切割線定理得 $\overline{BG}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BA}$，因此 $\overline{AG}^2=\overline{BE}\cdot\overline{BA}$，

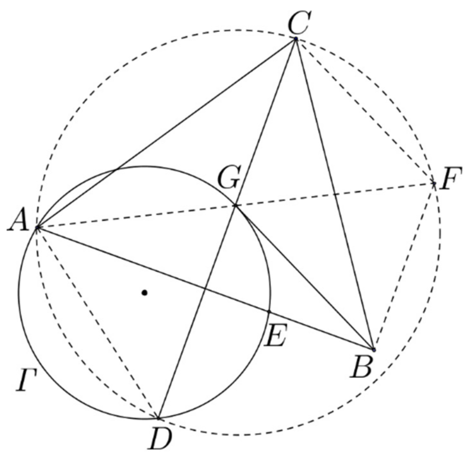
延長 $\overrightarrow{AG}$ 至點 F，使 $\overline{AG}=\overline{GF}$，得平行四邊形 $BFCG$，

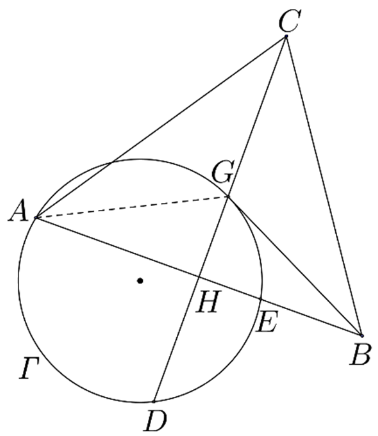
因此 $\angle FCG=\angle BGD$，

因為 $\overline{BG}$ 切 Γ 於點 G，所以 $\angle BGD=\angle GAD$，故 $\angle FCD=\angle FAD$，

因此，四點 F, C, A, D 共圓，得 $\overline{AG}\cdot\overline{GF}=\overline{AG}^2=\overline{GC}\cdot\overline{GD}$，

故 $\overline{BE}\cdot\overline{BA}=\overline{GC}\cdot\overline{GD}$。





【方法二】

[新北市文山國中林宥王作法改編]

作 $\overline{AG}$，設 $\overline{CD}$、$\overline{AB}$ 交於點 H，

因為 $\overline{BG}$ 為切線，所以 $\overline{EB}\cdot\overline{BA}=\overline{BG}^2$ (切割線性質)，

又因為 $\overline{CA}=\overline{CB}$，$G$ 為重心，

所以 $\overline{GA}=\overline{GB}$，$\overline{CG}=2\overline{GH}$，

因此

$$\begin{aligned}\overline{CD}\cdot\overline{GD}&=2\overline{GH}(\overline{GH}+\overline{HD})\\&=2\overline{GH}^2+2\overline{GH}\cdot\overline{HD}=2\overline{GH}^2+2\overline{AH}\cdot\overline{HE}\text{(圓內冪性質)}\\&=2\overline{GH}^2+2\overline{AH}(\overline{HB}-\overline{HE})\\&=2\overline{BG}^2-\overline{AB}\cdot\overline{BE}=2\overline{AB}\cdot\overline{BE}-\overline{AB}\cdot\overline{BE}\\&=(2\overline{GH}^2+2\overline{AH}^2)-\overline{AB}\cdot\overline{BE}=2\overline{AB}\cdot\overline{BE}-\overline{AB}\cdot\overline{BE}=\overline{AB}\cdot\overline{BE}\end{aligned}$$

【解題評析】

1. 幾何問題，適當的作補助線或是外接圓，常常是解題的關鍵。方法一就是主要去做補助線與外接圓，就會有對應角相等與圓冪性質，因此迎刃而解；參與徵答的同學大都採用方法二的解法，可以多參考方法一的解法。
2. 說明此題所應用的數學原理：

   (1)等腰三角形的頂點至另兩點等長，頂點與重心的連線垂直平分底邊。

   (2)弦切角等於對同弧的圓周角。

   (3)對同弧的圓周角相等。

   (4)四點共圓的性質。

   (5)重心的性質。

   (6)圓冪性質。
3. 此題參與徵答的作答很好，條理正確清楚，值得嘉許！持續對於數學的愛好，繼續精進！