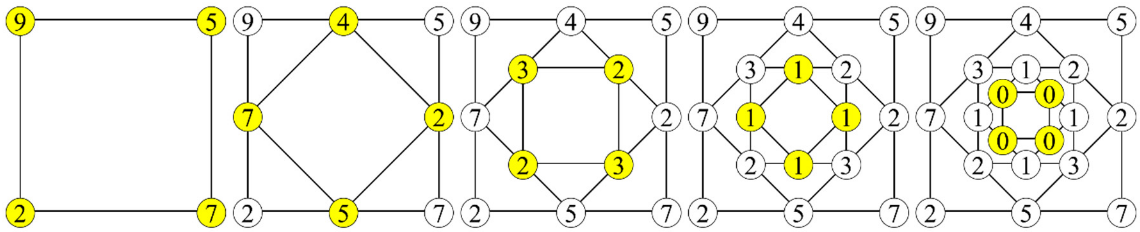
再探數學方塊-歸零或循環(上)

蘇楹翔 呂季軒 蘇柏奇＊
苗栗縣立興華高級中學

壹、前言

張建祥等人[1]探討中國時報科學專欄中名為數學方塊的題目，該題目為：「在一個正方形的四個頂點寫上任意四個正整數，接著在每邊中點寫上兩端點之數值差，再將四邊中點連線畫出一個正方形，重複這個程序」。他們將上述程序稱為「運算」。如下圖，在四個頂點上填入 9, 5, 7, 2，經過 4 次運算變成皆為 0，上述過程可記為：(9,5,7,2) → (4,2,5,7) → (2,3,2,3) → (1,1,1,1) → (0,0,0,0)。他們將所有數變成 0 的情形稱為「運算成立」，本文則稱為「歸零」。



他們驗證得四個數的運算必成立 (即歸零) 後，進而探討一般的情形，藉由 $(x+y)^{2^n-1}$ 各項的係數 $C_i^{2^n-1}=\dfrac{(2^n-1)!}{(2^n-1-i)!i!}=\dfrac{(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)...(2^n-i)}{1\times2\times3\times...\times i}$ 皆為奇數的性質，得到 2^n 個數最多經過 2^n-1 次運算可得 2^n 個奇偶性質相同的正整數，再運算一次必可得全為偶數；另一方面，又因 $\begin{cases}(ax,bx,cx,dx) & \to & (|ax-bx|,|bx-cx|,|cx-dx|,|dx-ax|)\\ (a,b,c,d) & \to & (|a-b|,|b-c|,|c-d|,|d-a|)\end{cases}$，即 (ax,bx,cx,dx) 的運算與 (a,b,c,d) 結果相同，故可將全為偶數的四數，提出 2 的因數，再重複運算，因為一直提出 2 的因數，最後必可得最小偶數，故得證此 2^n 個數全為 0。另外，他們也指出，有時運算過程會出現循環，故無法形成所有數全為 0，例如：(5,2,7)→(3,5,2) → (2,3,1) → (1,2,1) → (1,1,0) → (0,1,1) → (1,0,1) → (1,1,0) →⋯，他們證得：「奇數個數皆進入循環，運算必不成立」。本文將運算不成立的情形稱為「循環」，並利用輾轉相除法算出三個數進入循環的次數，另外，經由分類並逐一運算，得到除了四個數嚴格遞增的情形外，所有情形都可以在 6 次以內歸零。

文獻結論 1：

1. 2^n 個數的運算必成立（所有數經有限次運算變成皆為 0）。

2. 奇數個數的運算必不成立（出現循環）。

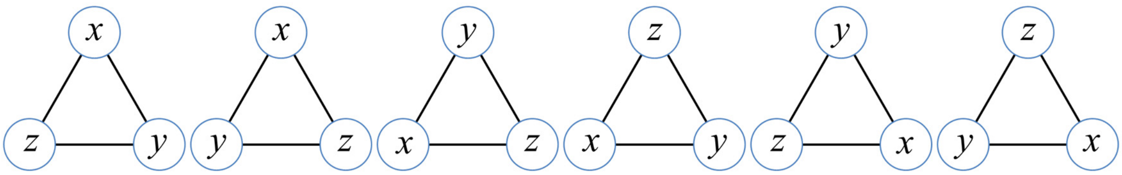
鍾佳霖等人[2]將多邊形頂點上的數字排列為數列，探討：「任意 n 個正整數的數列，其相鄰兩數相減的絕對值形成一新數列 $<a_1,a_2,a_3,...,a_n>\to<|a_1-a_2|,|a_2-a_3|,...,|a_n-a_1|>$，並重複這個運算」，他們用數學歸納法得證數列中的最大值必遞減，因而經有限次運算後，數列每項皆為 0 或每項為 0 或 m 兩數，且當數列中僅有 0、m 兩數時，由鴿籠原理得必產生循環或歸 0。本文在環狀排列的情形下，探討僅有 0、1 兩種數字時的運算規律。

文獻結論 2：

數列經有限次運算後，不是均變為 0，就是變成 0、m 兩種數字。

貳、三個數進入循環所需的次數

在三角形頂點上填入三個數有以下六種情形，但經旋轉、翻轉後都相同，不失一般性，只需討論其中一種，用數對 (x,y,z) 表示，其中 $x\le y\le z$。另外，因 (x,y,z) 與 (dx,dy,dz) 的運算相同，故僅需討論 $\gcd(x,y,z)=1$ 的情形。



利用 Excel 加速探討過程，發現所有數對經過若干次運算後都變成(0, m, m)，如：

次數	x	y	z
初始	3	17	26
1	14	9	23
2	5	14	9
3	9	5	4
4	4	1	5
5	3	4	1
6	1	3	2
7	2	1	1
8	1	0	1

次數	x	y	z
初始	9	17	38
1	8	21	29
2	13	8	21
3	5	13	8
4	8	5	3
5	3	2	5
6	1	3	2
7	2	1	1
8	1	0	1

次數	x	y	z
初始	3	17	25
1	14	8	22
2	6	14	8
3	8	6	2
4	2	4	6
5	2	2	4
6	0	2	2

我們發現進入循環的次數有規律可循，說明如下：

令 $\begin{cases} y-x=a \\ z-y=b \end{cases}$，則 $(x,y,z)\to(y-x,z-y,z-x)=(a,b,a+b)$，其中，特別注意到 $a,b,a+b$ 三數具有較小兩數之和等於最大數的性質，換言之，最大數由較小兩數所決定，因此，關鍵在觀察較小兩數的變化。

不妨設 $b\geq a$，再令 $b=at+r,\ 0\leq r<a$，得：

$$
\begin{array}{llllll}
(a,b,a+b)= & (& a & at+r & (t+1)a+r &) \\
 & & & \downarrow & & \\
 & (& (t-1)a+r & a & at+r &) \ =(a,(t-1)a+r,at+r)
\end{array}
$$

即：$(a,at+r,(t+1)a+r)\to(a,(t-1)a+r,at+r)$。其中，運算後 $a,(t-1)a+r,at+r$ 三數仍具有較小兩數之和等於最大數的性質。

以 $t=3$ 為例，觀察較小兩數的變化：

$$
\begin{array}{llllll}
(& a & 3a+r & 4a+r &) & \\
 & & \downarrow & & & \\
(& 2a+r & a & 3a+r &) & =(\ a \quad 2a+r \quad 3a+r\ ) \\
 & & \downarrow & & & \\
(& a+r & 2a+r & a &) & =(\ a \quad a+r \quad 2a+r\ ) \\
 & & \downarrow & & & \\
(& a & a+r & r &) & =(\ a \quad r \quad a+r\ )
\end{array}
$$

變化的關鍵在第二個數的遞減：$3a+r \to 2a+r \to a+r \to r$。

不難得到：「若 $b=at+r$，$0 \le r < a$，$(a,b,a+b)$ 經 t 次運算得 $(r,a,a+r)$。」

例如：$(8,20,28)$，由 $20=8\times 2+4$ 得經 2 次運算為 $(4,8,4+8)$

$$\begin{array}{cccc} & 8 & 20 & 28 \\ \to & 12 & 8 & 20 \\ \to & 4 & 12 & 8 \end{array}$$

特別：$(7,35,42)$，由 $35=7\times 5+0$ 得經 5 次運算為 $(0,7,0+7)$

$$\begin{array}{cccc} & 7 & 35 & 42 \\ \to & 28 & 7 & 35 \\ \to & 21 & 28 & 7 \\ \to & 7 & 21 & 14 \\ \to & 14 & 7 & 7 \\ \to & 7 & 0 & 7 \end{array}$$

反覆運用上述結果運算，發現運算過程跟輾轉相除法極其相似，故可援以簡化計算，以(3,17,26)為例說明如下：

(3,17,26)經 1 次運算得(9,14,23)

由 $14=9\times 1+5$ 得再經 1 次運算得(5,9,14)

由 $9=5\times 1+4$ 得再經 1 次運算得(4,5,9)

由 $5=4\times 1+1$ 得再經 1 次運算得(1,4,5)

由 $4=1\times 4+0$ 得再經 4 次運算得(0,1,1)

共經 8 次運算得(0,1,1)

次數	x	y	z
初始	3	17	26
1	14	9	23
2	5	14	9
3	9	5	4
4	4	1	5
5	3	4	1
6	1	3	2
7	2	1	1
8	1	0	1

1	14	9	1
	9	5	
1	5	4	4
	4	4	
	1	0	

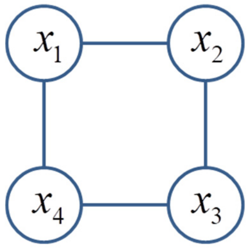
歸納如下：

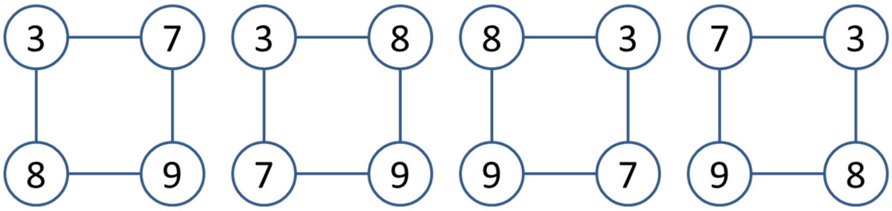
> 結論 1：
>
> (x,y,z)，$x \le y \le z$，令 $a=\max\{y-x,z-y\}$，$b=\min\{y-x,z-y\}$，
>
> 計算得 $\begin{cases} a = bq_1 + r_1 \\ b = r_1q_2 + r_2 \\ r_1 = r_2q_3 + r_3 \\ \cdots \\ r_n = r_{n+1}q_{n+2} \end{cases}$，則 (x,y,z) 經 $1+\sum_{i=1}^{n+2} q_i$ 次運算得 $(0,r_{n+1},r_{n+1})$。

（註：r_{n+1} 為 a,b 的最大公因數）

參、四個數運算成立所需的次數

在正方形頂點上填入四個數，因將旋轉、翻轉後都相同者當成同一種情形，不失一般性，只需討論 (x_1,x_2,x_3,x_4)，其中 $x_1=\min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 且 $x_2\le x_4$。例如下列四個情形都視為同一種，只需討論最左方的情形。

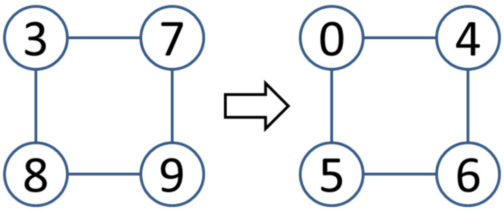


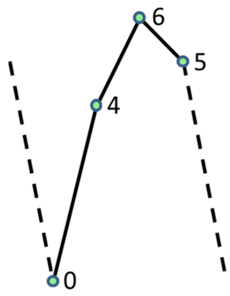


另外，當 $x_1=\min\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ 時，因為

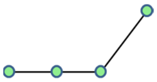
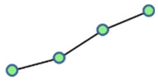
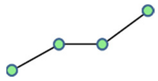
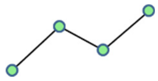
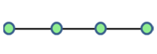
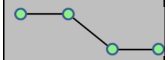
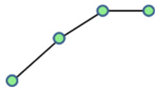
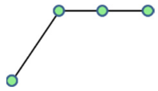
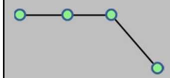
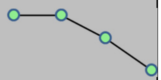
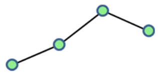
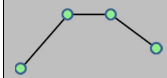
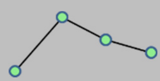
$$\begin{cases}(x_1,x_2,x_3,x_4) & \to\quad (|x_2-x_1|,|x_3-x_2|,|x_4-x_3|,|x_4-x_1|)\\(0,x_2-x_1,x_3-x_1,x_4-x_1) & \to\quad (|x_2-x_1|,|x_3-x_2|,|x_4-x_3|,|x_4-x_1|)\end{cases},$$

故可進一步使第一數為 0，僅需討論 $(0,x_1,x_2,x_3)$ 且 $x_1\le x_3$ 的情形。此外，為方便判別數字大小與分類，輔以折線圖表示。



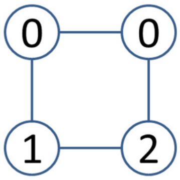


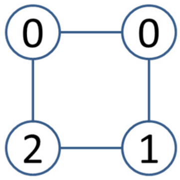
我們依照折線圖的型態，分類討論 $(0,x_1,x_2,x_3)$ 且 $x_1\le x_3$，先分為 x_1=0 及 x_1>0 兩大類，再依照 x_2-x_1、 x_3-x_2 為正數、0 或負數分類如下表 A、B、C、D、E 五類，其中將 x_1,x_2,x_3 為負數或 $x_1>x_3$ 的型態以灰底色標註，不須討論。我們將歸零所需次數彙整後，發現除了 $(0,x_1,x_2,x_3)$, $x_3>x_2>x_1>0$ 外，最多經過 6 次即可歸零。

	$x_1=0$			$x_1>0$		
x_2-x_1 \ x_3-x_2	正數	0	負數	正數	0	負數
正數	 4、6 次	 4 次	 不須討論	 任意次	 3、4 次	 2、3、4 次
0	 3 次	 0 次	 不須討論	 4、6 次	 4 次	 不須討論
負數	 4、6 次	 不須討論	 不須討論	 2、3、4、6 次	 不須討論	 不須討論
分類	A 類：$x_2>x_1=0$	B 類：$x_2=x_1=0$		C 類：$x_2>x_1>0$	D 類：$x_2=x_1>0$	E 類：$x_1>x_2\ge 0$

一、A 類 $(0,x_1,x_2,x_3)$，$x_2>x_1=0$：

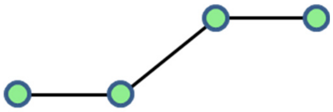
可再分為 $x_2<x_3$、$x_2=x_3$、$x_2>x_3$ 三類，但 $x_2<x_3$ 與 $x_2>x_3$ 經翻轉後，可視為同一種情形，兩者歸零次數相同（例如 $(0,0,1,2)$ 與 $(0,0,2,1)$），以下僅需討論 $x_2<x_3$、$x_2=x_3$ 的歸零次數。





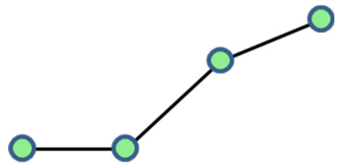
1. $(0,0,x_2,x_3),x_2=x_3>0$：得歸零所需運算次數為 3 次。

$$\begin{array}{lcccc} & 0 & 0 & x_2 & x_2 \\ \to & 0 & x_2 & 0 & x_2 \\ \to & x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



2. $(0,0,x_2,x_3),\, x_3 > x_2 > 0$：再分為四種情形，得到：

$$\begin{cases} 當\ x_2 < x_3 \le 2x_2\ 時，運算次數為\ 4 \\ 當\ x_3 > 2x_2\ 時，運算次數為\ 6 \end{cases}。$$



(1) $x_2 < x_3 < 2x_2$：運算次數為 4 次

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ \to & 0 & x_2 & x_3-x_2 & x_3 \\ \to & x_2 & 2x_2-x_3 & x_2 & x_3 \\ \to & x_3-x_2 & x_3-x_2 & x_3-x_2 & x_3-x_2 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(2) $x_3 = 2x_2$：運算次數為 4 次

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & x_2 & 2x_2 \\ \to & 0 & x_2 & x_2 & 2x_2 \\ \to & x_2 & 0 & x_2 & 2x_2 \\ \to & x_2 & x_2 & x_2 & x_2 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(3) $2x_2 < x_3 \le 3x_2$：運算次數為 6 次

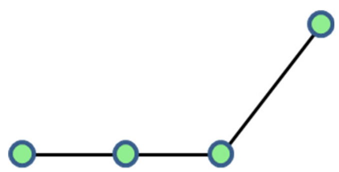
$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ \to & 0 & x_2 & x_3-x_2 & x_3 \\ \to & x_2 & x_3-2x_2 & x_2 & x_3 \\ \to & 3x_2-x_3 & 3x_2-x_3 & x_3-x_2 & x_3-x_2 \\ \to & 0 & 2x_3-4x_2 & 0 & 2x_3-4x_2 \\ \to & 2x_3-4x_2 & 2x_3-4x_2 & 2x_3-4x_2 & 2x_3-4x_2 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(4) $x_3 > 3x_2$：運算次數為 6 次

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & x_2 & x_3 \\ \to & 0 & x_2 & x_3-x_2 & x_3 \\ \to & x_2 & x_3-2x_2 & x_2 & x_3 \\ \to & x_3-3x_2 & x_3-3x_2 & x_3-x_2 & x_3-x_2 \\ \to & 0 & 2x_2 & 0 & 2x_2 \\ \to & 2x_2 & 2x_2 & 2x_2 & 2x_2 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

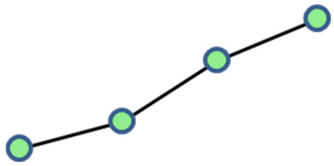
二、B 類 $(0,x_1,x_2,x_3)$，$x_2 = x_1 = 0$：分為 $x_3 = 0$ 及 $x_3 > 0$ 兩類，歸零次數分別為 0 次與 4 次。

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 0 & 0 & x_3 \\ \to & 0 & 0 & x_3 & x_3 \\ \to & 0 & x_3 & 0 & x_3 \\ \to & x_3 & x_3 & x_3 & x_3 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



三、C 類 $(0,x_1,x_2,x_3)$， $x_2>x_1>0$：可分為三種 $x_2<x_3$、 $x_2=x_3$、 $x_2>x_3$，討論如下：

1. $(0,x_1,x_2,x_3)$， $x_3>x_2>x_1>0$：



$(0,x_1,x_2,x_3)$, $x_3>x_2>x_1>0$ 為嚴格遞增，可能經過多次後仍為嚴格遞增數對。我們具體提供經 $n-1$ 次運算後仍為嚴格遞增的遞迴關係式：

「給定 $a_1<b_1<c_1$ 且當 $n>1$ 時，令 $\begin{cases} a_n=c_{n-1}-a_{n-1} \\ b_n=a_{n-1}+c_{n-1} \\ c_n=a_{n-1}+2b_{n-1}+c_{n-1} \\ d_n=a_{n-1}+2b_{n-1}+3c_{n-1} \end{cases}$ 」。

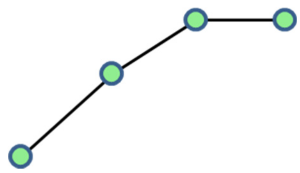
先算得 $\begin{cases} b_n-a_n=2a_{n-1} \\ c_n-b_n=2b_{n-1} \\ d_n-c_n=2c_{n-1} \\ d_n-a_n=2a_{n-1}+2b_{n-1}+2c_{n-1} \end{cases}$，不難由數學歸納法證得：

「當 $n>1$ 時，滿足 $a_n<b_n<c_n<d_n$ 」，

並且將 (a_n,b_n,c_n,d_n) 運算 $n-1$ 次，運算過程中的數對皆為嚴格遞增。例如：給定 $(a_1,b_1,c_1)=(1,3,4)$，利用遞迴關係式算得 $(a_8,b_8,c_8,d_8)=(1344, 2464, 4544, 8352)$，除以最大公因數 32 後，得(42, 77, 142, 261)，列出(42, 77, 142, 261)運算 8 次的過程，每次運算的結果皆為嚴格遞增。由此得到 $(0,x_1,x_2,x_3)$ 為嚴格遞增時，雖能完成運算，但不存在運算成立次數的上界。

初始	42	77	142	261
1	35	65	119	219
2	30	54	100	184
3	24	46	84	154
4	22	38	70	130
5	16	32	60	108
6	16	28	48	92
7	12	20	44	76
8	8	24	32	64

2. $(0,x_1,x_2,x_3)$,



$x_2=x_3>x_1>0$：得到 $\begin{cases} \text{當 } x_1<x_2<2x_1 \text{ 時，運算次數為 } 6 \\ \text{當 } x_2\ge 2x_1 \text{ 時，運算次數為 } 4 \end{cases}$。

(1) $x_1 < x_2 < 2x_1$：運算 6 次

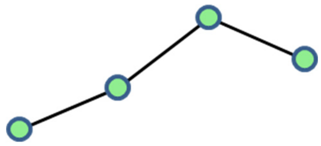
$$\begin{array}{ccccc} & 0 & x_1 & x_2 & x_2 \\ \to & x_1 & x_2-x_1 & 0 & x_2 \\ \to & 2x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2 & x_2-x_1 \\ \to & x_2 & x_1 & x_1 & x_2 \\ \to & x_2-x_1 & 0 & x_2-x_1 & 0 \\ \to & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_1 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(2) $x_2 \geq 2x_1$：運算 4 次

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & x_1 & x_2 & x_2 \\ \to & x_1 & x_2-x_1 & 0 & x_2 \\ \to & x_2-2x_1 & x_2-x_1 & x_2 & x_2-x_1 \\ \to & x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

3. $(0,x_1,x_2,x_3)$, $x_2 > x_3 \geq x_1 > 0$：有 $x_3 > x_1$、$x_3 = x_1$ 兩種情形，先討論 $x_3 > x_1$ 的情形：當 $(0,x_1,x_2,x_3)$, $x_2 > x_3 > x_1 > 0$時，經兩次運算為

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \to & x_1 & x_2-x_1 & x_2-x_3 & x_3 \\ \to & |x_2-2x_1| & x_3-x_1 & |x_2-2x_3| & x_3-x_1 \end{array}$$



絕對值化簡時，需比較 $x_2, 2x_1, 2x_3$ 的大小關係，但此前，需先考慮 x_3, $2x_1$ 的大小關係，分為 $x_3 > 2x_1$、$x_3 = 2x_1$、$x_3 < 2x_1$ 三種情形討論。其中，本節不討論 $x_2 = x_3$ 的情形，但由前節討論，得紅色標記部分的運算次數為 4。

(1) $x_3 > 2x_1$，再依照 x_2 的大小，分段討論得到以下結果：

① $x_3 < x_2 \leq 2x_3$：$\begin{cases} \text{當 } x_2 \neq x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 4 \\ \text{當 } x_2 = x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 3 \end{cases}$

② $x_2 > 2x_3$：運算 6 次

(2) $x_3 = 2x_1$，再依照 x_2 的大小，分段討論得到以下結果：

① $2x_1 < x_2 \leq 2x_3$：$\begin{cases} \text{當 } x_2 \neq x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 4 \\ \text{當 } x_2 = x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 3 \end{cases}$

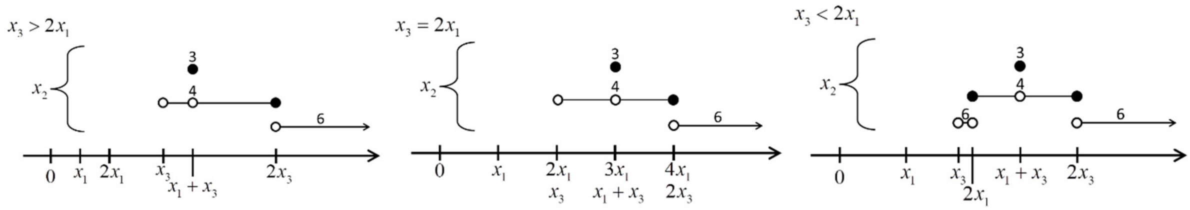
② $x_2 > 2x_3$：運算 6 次；

(3) $x_3 < 2x_1$，再依照 x_2 的大小，分段討論得到以下結果：

① $x_3 < x_2 < 2x_1$：運算 6 次；

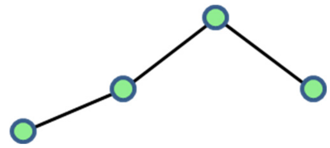
② $2x_1 \leq x_2 \leq 2x_3$：$\begin{cases} \text{當 } x_2 \neq x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 4 \\ \text{當 } x_2 = x_1 + x_3 \text{ 時，運算次數為 } 3 \end{cases}$

③ $x_2 > 2x_3$：運算 6 次。



接著討論 $x_3 = x_1$ 情形，運算過程如下，得$\begin{cases} 當\ x_2 = 2x_1 時，運算次數為 2 \\ 當\ x_2 \neq 2x_1 時，運算次數為 4 \end{cases}$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & x_1 & x_2 & x_1 \\ \to & x_1 & x_2 - x_1 & x_2 - x_1 & x_1 \\ \to & |x_2 - 2x_1| & 0 & |x_2 - 2x_1| & 0 \\ \to & |x_2 - 2x_1| & |x_2 - 2x_1| & |x_2 - 2x_1| & |x_2 - 2x_1| \\ \to & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



所得結果歸納如下：

結論 2-1：$(0, x_1, x_2, x_3), x_2 > x_3 > x_1 > 0$ 的運算次數

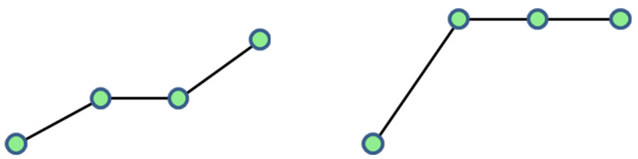
1. 當 $x_2 = x_1 + x_3$ 時，運算次數為 3.
2. 當 $x_2 \geq 2x_3$ 或 $x_3 < x_2 < 2x_1$ 時，運算次數 6.
3. 當 $2x_1 \leq x_3 \leq x_2 \leq 2x_3$ 或 $x_3 < 2x_1 \leq x_2 \leq 2x_3$ 時（ $x_2 \neq x_1 + x_3$ ），運算次數 4.

結論 2-2：$(0, x_1, x_2, x_3), x_2 > x_3 = x_1 > 0$ 的運算次數

1. 當 $x_2 = 2x_1$ 時，運算次數為 2.
2. 當 $x_2 \neq 2x_1$ 時，運算次數為 4.

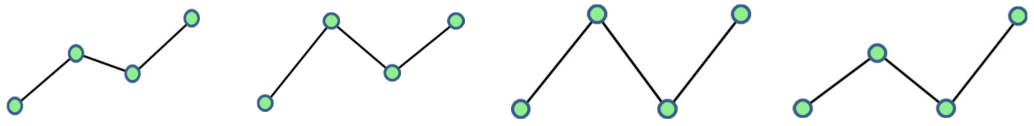
四、D 類 $(0, x_1, x_2, x_3), x_2 = x_1 > 0$ 可分為兩種 $x_1 < x_3$ 、 $x_1 = x_3$ ，討論如下：

1. $(0, x_1, x_2, x_3)$， $x_1 = x_2 < x_3$ ：得到$\begin{cases} 當\ x_3 \neq 2x_1 時，運算次數為 4 \\ 當\ x_3 = 2x_1 時，運算次數為 3 \end{cases}$。
2. $(0, x_1, x_2, x_3)$， $x_1 = x_2 = x_3$ ：運算 4 次。



五、E 類 $(0,x_1,x_2,x_3)$， $x_1 > x_2 \geq 0$ 可分為四種討論如下：

1. 當 $x_3 > x_1 > x_2 > 0$ 時：得到 $\begin{cases} \text{當 } x_3 \neq x_1 + x_2 \text{ 時，運算次數為 } 4 \\ \text{當 } x_3 = x_1 + x_2 \text{ 時，運算次數為 } 3 \end{cases}$。
2. 當 $x_1 = x_3 > x_2 > 0$ 時：運算 4 次。
3. 當 $x_3 = x_1 > x_2 = 0$ 時：運算 2 次。
4. 當 $x_3 > x_1 > x_2 = 0$ 時：運算 4 次。

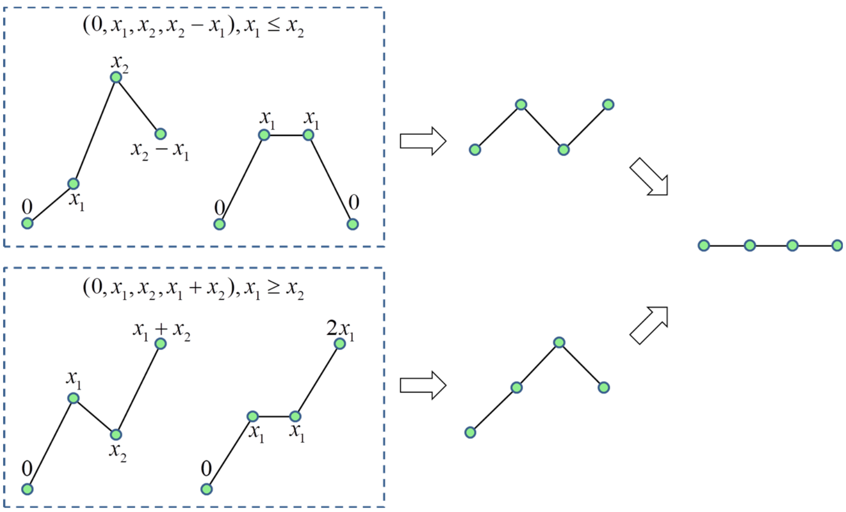


$x_3 > x_1 > x_2 > 0$ $\qquad$ $x_1 = x_3 > x_2 > 0$ $\qquad$ $x_3 = x_1 > x_2 = 0$ $\qquad$ $x_3 > x_1 > x_2 = 0$

六、綜合討論：

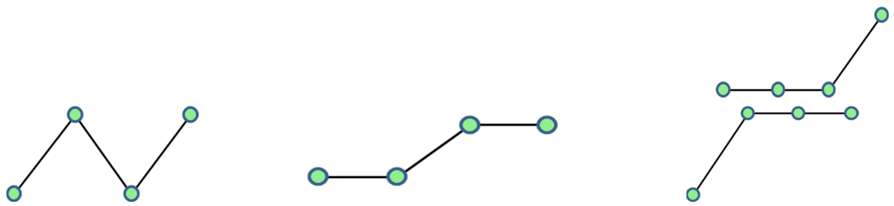
綜上五類的討論，首先發現除了嚴格遞增的情形外，任意四個數最多經過 6 次即能完成運算。觀察運算次數不超過三次的情形，其中，特別的是運算 3 次歸零的兩類，其第四數分別為第二、三數的和與差。

> 結論 3-1：四個數的運算次數
>
> 1. 當 (x_1,x_2,x_3,x_4) 不是嚴格遞增時，運算次數最多為 6 次。
> 2. 運算次數 3 次以內的情形有：
>   (1) 運算一次的情形有：(a,a,a,a)。
>   (2) 運算兩次的情形有：$(0,a,0,a)$ 及 $(0,a,2a,a)$。
>   (3) 運算三次的情形有：$(0,x_1,x_2,x_2-x_1), x_1 \leq x_2$ 及 $(0,x_1,x_2,x_1+x_2), x_1 \geq x_2$。



再者，當四數中有不相鄰兩數大小相等時，不妨記為 (a,b,a,c)，可分為四類，得到運算次數最多為 4 次：

1. 當 $a=b=c$ 時：運算次數 1 次。
2. 當 $a\neq b=c$ 時：即為 E 類中的其中一種如下，運算次數 2 次。
3. 當 $a\neq b\neq c$ 時：運算 1 次後為 $(|a-b|,|a-b|,|a-c|,|a-c|)$，即為 A 類中的其中一種如下，故再經 3 次運算成立，合計運算總次數為 4 次。
4. 當 $a=b\neq c$ 或 $a\neq b=c$ 時：即為 B 類或 D 類的其中一種如下，運算次數為 4 次。



$a\neq b=c$　　　$a\neq b\neq c$　　　$a=b\neq c$ 或 $a\neq b=c$

> 結論 3-2：四個數的運算次數
>
> 　四數中有不相鄰的兩數大小相同時，運算次數最多為 4 次。

接著考慮三數 (a,b,c) 的運算，可分為兩大類：

1. (a,b,c) 為嚴格遞增或嚴格遞減時：運算兩次得第二數為 $|a+c-2b|$。

$a<b<c$ 時：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & b-a \arrow[dr] & & c-b \arrow[dl] & \\ & & |a+c-2b| & & \end{tikzcd}$$

$a>b>c$ 時：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & a-b \arrow[dr] & & b-c \arrow[dl] & \\ & & |a+c-2b| & & \end{tikzcd}$$

2. (a,b,c) 不為嚴格遞增且不為嚴格遞減時：運算兩次得第二數為 $|a-c|$。

$b=\max\{a,b,c\}$ 時：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & b-a \arrow[dr] & & b-c \arrow[dl] & \\ & & |a-c| & & \end{tikzcd}$$

$b=\min\{a,b,c\}$ 時：

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr] & & b \arrow[dl] \arrow[dr] & & c \arrow[dl] \\ & a-b \arrow[dr] & & c-b \arrow[dl] & \\ & & |a-c| & & \end{tikzcd}$$

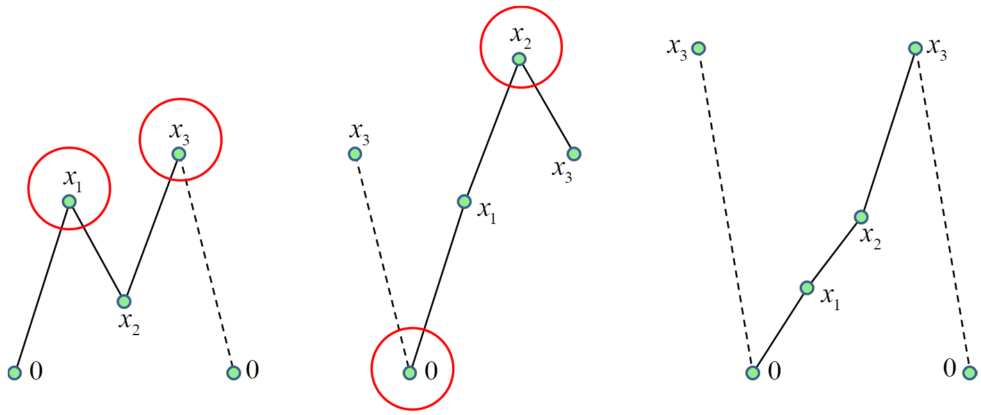
結論 3-3：三個數的 2 次運算結果

1. (a,b,c) 為嚴格遞增或嚴格遞減時：運算兩次得第二數為 $|a+c-2b|$。
2. (a,b,c) 不為嚴格遞增且不為嚴格遞減時：運算兩次得第二數為 $|a-c|$。

最後討論為何除了嚴格遞增的情形外，皆可以在 6 次以內完成運算。我們發現：

「非嚴格遞增時，經過兩次運算，必得四數中有不相鄰的兩數大小相同」

例如：$(0,x_1,x_2,x_3),0<x_2<x_1<x_3$ 時，因 $x_1=\max\{0,x_1,x_2\}$ 及 $x_3=\max\{x_2,x_3,0\}$，由結論 3-3.2，第二數與第四數運算兩次後皆為 x_2；再例如：$(0,x_1,x_2,x_3),0<x_1<x_3<x_2$ 時，因 $0=\min\{x_3,0,x_1\}$ 及 $x_2=\max\{x_1,x_2,x_3\}$，由結論 3-3.2，第一數與第三數運算兩次後皆為 $|x_3-x_1|$。因運算 2 次即能得不相鄰兩數大小相同的情形，由結論 3-2，最多再經 4 次運算即成立，故得非嚴格遞增的情形運算次數最多為 6 次。相對的，當 $(0,x_1,x_2,x_3)$ 為嚴格遞增時，因 $0=\min\{x_3,0,x_1\}$ 且 $x_1<x_2<x_3$，故運算兩次後，第一個數和第三個數分別為 $|x_3-x_1|$ 與 $|x_1+x_3-2x_2|$，不一定相等；同理，運算兩次後第二數與第四數也不一定相等，進而無法得運算次數不超過 6 次。



【待續】