從臺南美術二館的公共藝術談填充空間的四面體

王儷娟
臺南市立仁德文賢國民中學

壹、引言

2019 年正式營運的臺南美術二館，主體建築特色為鳳凰花轉化成的五角造型，不僅有許多堆疊交錯的方形空間，戶外還有五十二座樓梯連結不同角落的露台，以及大型謝爾賓斯基碎形遮蔭屋頂[1]。三樓 M 展覽室的戶外平台，有一個長 500×寬 495×深 250cm 大紅色的不鏽鋼烤漆作品《天地人和》(如圖 1)，作者是高齡逾九十歲的藝術家李再鈐老師，此作品由六個四面體構成，形成了整體外觀是六邊形，而中間鏤空的部分是三角形的樣貌，藉此與碎形屋頂的設計相呼應。本文從認識單一的四面體開始，進而討論是否能找到可填充空間的四面體？以及如何利用簡單的摺紙技巧，摺出可以填充空間的四面體呢?期盼透過本文的討論以及提供動手做的模板，讓讀者在欣賞藝術家的創作時，也能欣賞到數學幾何之美!

圖 1：天地人和

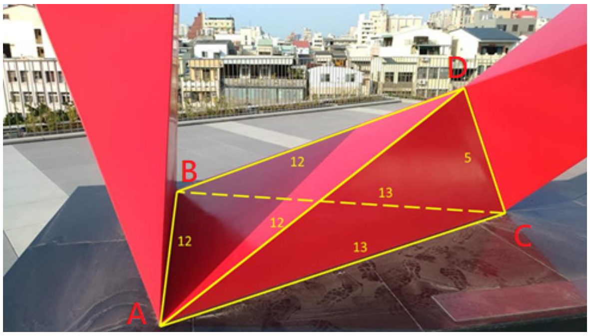


圖 2：四面體 D-ABC 邊長的比例估計

貳、認識單一的四面體

實際測量與估計《天地人和》的一個四面體，發現它有一個面是正三角形，一個面是等腰三角形，二個面是全等的直角三角形。各邊長的比例如圖 2 所示。圖 3 為此四面體之展開圖，讀者可以自行列印並依序 a 貼 a、b 貼 b 及 c 貼 c 即可完成四面體。如果完成二個四面體並將正三角形的面貼完全貼齊，將可得到體積 2 倍大的四面體，如圖 4。

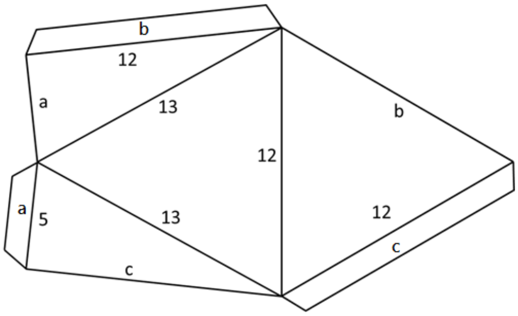


圖 3：四面體展開圖

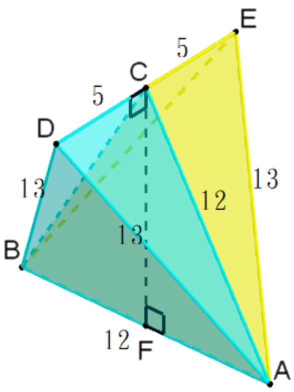


圖 4：體積 2 倍大的四面體

參、尋找填充空間的四面體

日常生活中，如賣場貨架上的物品(如圖 5)或搬運籃(如圖 6)，是最常見到利用立方體或長方體做到一個貼著一個完全沒有空隙，也就是常見的多面體填充空間的例子。除了立方體和長方體可以填充空間外，是否也能找到可以填充空間的四面體呢?

觀察圖 4 之四面體，可以發現$\overline{AB}\perp\overline{CF}$和$\overline{DE}\perp\overline{CF}$，△ABD 和△ABE 是三邊長為(12,13,13)的等腰三角形，△ADE 和△BDE 是三邊長為(10,13,13)的等腰三角形。

為了尋找填充空間的四面體，如果控制條件如下：(如圖 7)

1.長方體的底面四邊形 AGBH 為正方形，

2.$\overline{DE}$為長方體上底面的對角線， $\overline{AB}$為長方體下底面的對角線。

可知$\overline{AB}=\overline{DE}$，且△ABD、△ABE、△ADE 和△BDE 都是全等的等腰三角形，四面體 ABDE 的形狀就只受到$\overline{CF}$長度的變化的影響了!

圖 5：賣場貨架

圖 6：搬運籃

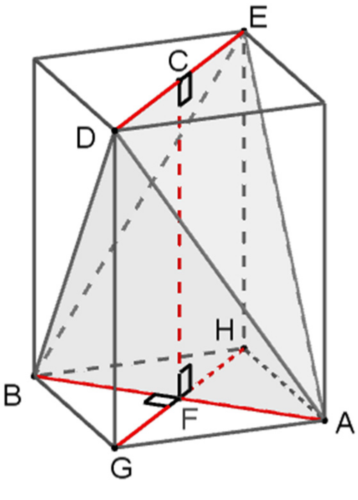


圖 7：四面體控制條件示意圖

延續上方控制條件下，尋找可以填充空間的四面體。

很容易發現圖 7 中四面體的每個面都是全等的等腰三角形，當 $\overline{CF}$長度改變時，四面體的二面角的度數又會如何改變？

首先，若把長方體改為正立方體，如圖 8，假設正立方體的邊長為 1，則$\overline{CF}$=1，四面體 ABDE 的各邊長為$\sqrt{2}$，也就是說四面體 ABDE 的每一個面都是正三角形，所以四面體 ABDE 是一個正四面體。

因為$\overline{AC}\perp\overline{DE}$且$\overline{BC}\perp\overline{DE}$，$\overline{AB}=\sqrt{2}$，$\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

所以由餘弦定理知：$\cos\angle ACB=\frac{\overline{AC}^2+\overline{BC}^2-\overline{AB}^2}{2\times\overline{AC}\times\overline{BC}}=\frac{1}{3}$

$\angle ACB=\cos^{-1}(\frac{1}{3})\fallingdotseq 70.53^\circ$

可知正四面體各邊兩側的二面角約為 70.53°，因此正四面體無法填充空間，如圖 9。

若將正立方體改為底面為正方形的四角柱，則四角柱裡的四面體的二面角的度數將隨柱高改變而變大或變小，下方圖 10-1 與圖 10-2 藉由 Geogebra 繪圖觀察角度變化[2]。

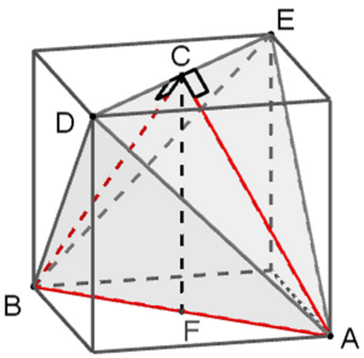


圖 8：正四面體

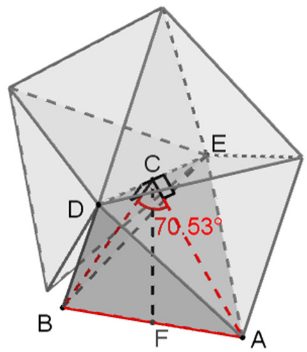


圖 9： 正四面體無法填充空間

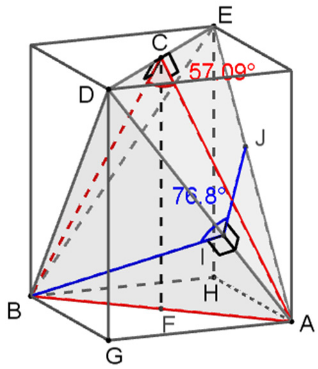


圖 10-1： $\overline{CF}>\overline{AG}$

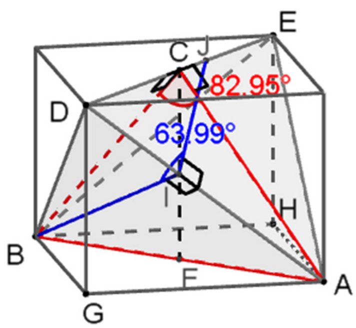


圖 10-2 ：$\overline{CF}<\overline{AG}$

若四邊形 AGBH 為正方形，$\overline{CF}$為柱高。

如圖 10-1 當 $\overline{CF} > \overline{AG}$時，四面體 ABDE 的二面角∠ACB< $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$，

二面角∠BIJ> $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$

如圖 10-2 當 $\overline{CF} < \overline{AG}$時，四面體 ABDE 的二面角∠ACB> $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$，

二面角∠BIJ< $\cos^{-1}(\frac{1}{3})$

如圖 11-1 至 11-3 當$\overline{AG}:\overline{CF} = \sqrt{2}:1$時，四面體 ABDE 的二面角

∠ACB=90°，二面角∠CIJ=60°，說明如下：

(1) 求二面角∠ACB

假設圖 11-1 中$\overline{AG} = \sqrt{2}$，$\overline{CF} = 1$

圖 11-2 中，$\overline{AB} = \overline{DE} = 2$，$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{BD} = \overline{BE} = \sqrt{3}$即△ADE 和△BDE 均為等腰三角形，

又∵$\overline{CD} = \overline{CE} = 1$

可知

$\overline{AC} \perp \overline{DE}$，$\overline{BC} \perp \overline{DE}$，$\overline{AC} = \overline{BC} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$

∴$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$，故∠ACB=90°

(2)求二面角∠BIC

如圖 11-3，△ADB 中，∵$\overline{AF} = \overline{BF} = 1$，$\overline{AD} = \overline{BD} = \sqrt{3}$

∴$\overline{DF} = \sqrt{2}$

作$\overline{BI} \perp \overline{AD}$，

則△ADB 面積=$\frac{\overline{AB} \times \overline{DF}}{2} = \frac{\overline{AD} \times \overline{BI}}{2}$，

$$\frac{2 \times \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \overline{BI}}{2}$$

$$\overline{BI} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$\overline{DI} = \sqrt{\overline{BD}^2 - \overline{BI}^2} = \sqrt{3 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$⋯(1)

接著如圖 11-4，在△ADE 中，∵$\overline{CD} = \overline{CE} = 1$，$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{3}$

∴$\overline{AC} = \sqrt{2}$

作$\overline{CI'} \perp \overline{AD}$

則△ACD 面積=$\frac{\overline{AC} \times \overline{CD}}{2} = \frac{\overline{AD} \times \overline{CI'}}{2}$，

$$\frac{\sqrt{2} \times 1}{2} = \frac{\sqrt{3} \times \overline{CI'}}{2}$$

$\overline{CI'} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\overline{DI'} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CI'}^2} = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdots (2)$

由(1)(2)知$\overline{DI} = \overline{DI'}$，所以 I 點和 I’ 點重合。

即$\overline{AD}$垂直△BCI

因為△BCI 中$\overline{BC} = \sqrt{2}$，$\overline{BI} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，$\overline{CI} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

得$\overline{BC}:\overline{BI}:\overline{CI} = \sqrt{3}:2:1$

故∠BIC=60°(如圖 11-5)

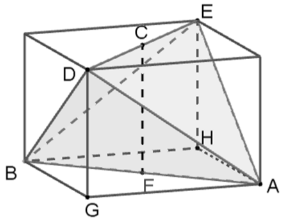


圖 11-1：
$\overline{AG}:\overline{CF} = \sqrt{2}:1$

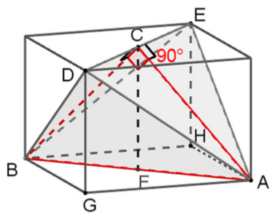


圖 11-2 ：
二面角∠ACB=90°

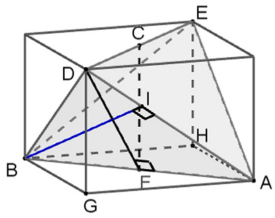


圖 11-3：
作$\overline{BI} \perp \overline{AD}$

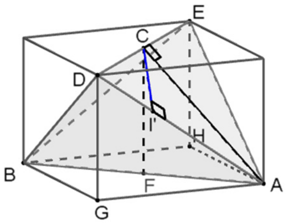


圖 11-4：作$\overline{CI'} \perp \overline{AD}$

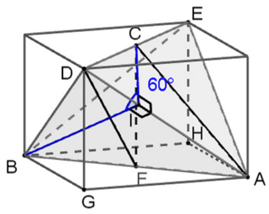


圖 11-5：二面角∠BIC=60°

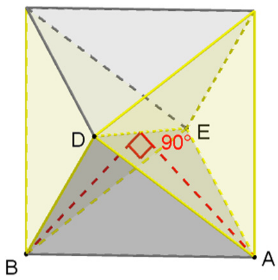


圖 12-1：八面體

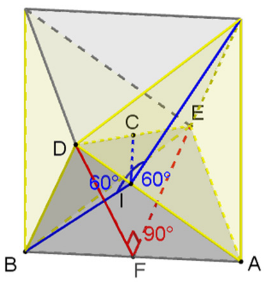


圖 12-2：八面體的二面角

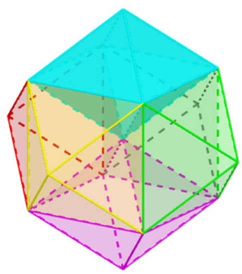


圖 12-3：菱形十二面體

因此，如圖 12-1，將四面體 ABDE 以直線 DE 為轉軸，旋轉 90°、180°以及 270°複製 3 個四面體，可以形成一個八面體，這個八面體的每一個面都是邊長比為$\sqrt{3}:\sqrt{3}:2$的等腰三角形，而且這個八面體相鄰兩面的二面角分別為 120°和 90°。(如圖 12-2)故六個八面體就可以組合成菱形十二面體，如圖 12-3，而菱形十二面體可以填充空間，故圖 11 中的四面體 ABDE 也可以填充空間。

圖 13-1： 準備 A4 影印紙一張，假設短邊$\overline{AB}=1$

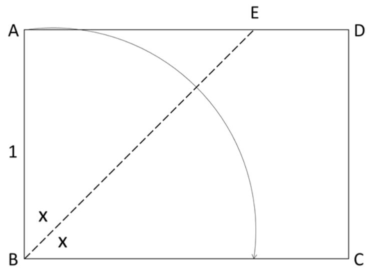


圖 13-2 ：摺∠ABC 的平分線

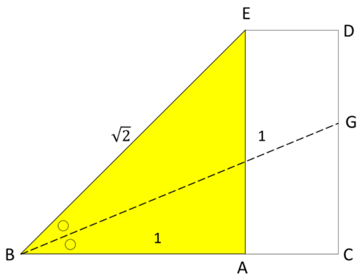


圖 13-3：摺∠EBC 的平分線

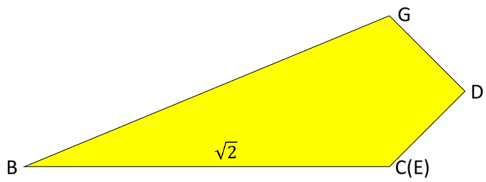
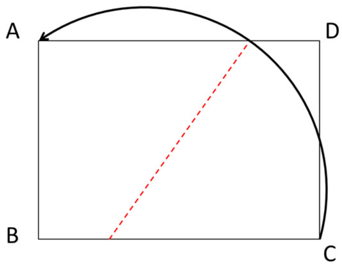


圖 13-4： $\overline{BC}=\overline{BE}=\sqrt{2}$

由圖 13-1 至圖 13-4 的摺紙過程可以知道$\overline{BE}$和$\overline{BC}$會重合，故 A4 影印紙的長寬比為$\sqrt{2}:1$。

接著，拿出 A4 影印紙依照下方的九個步驟，摺製可以填充空間的四面體；或者拿起手機掃描圖 15 之摺製影片 QR Code ，一邊觀看影片一邊摺製更容易完成。



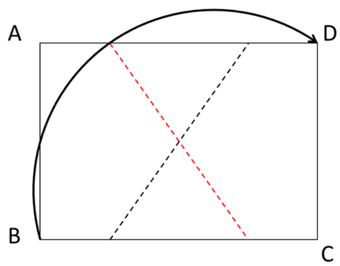


圖 14-1 ：C 到 A 點對點對摺

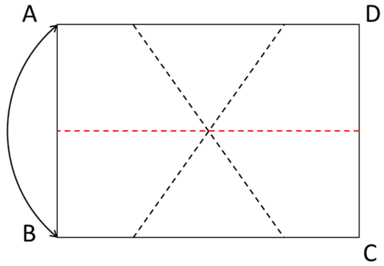
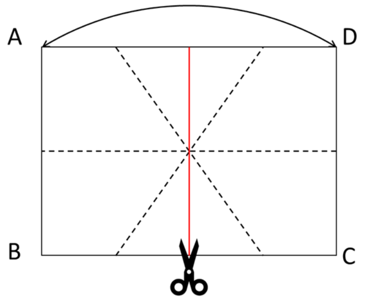


圖 14-2 ：B 到 D 點對點對摺



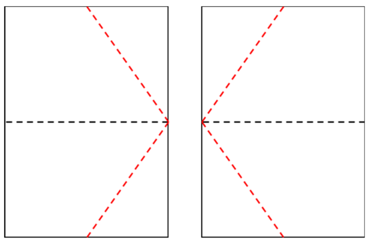


圖 14-3：上下對摺

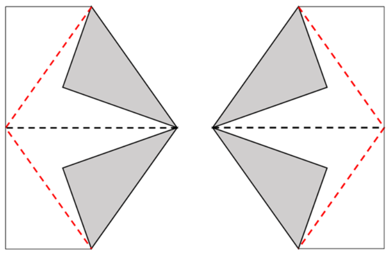


圖 14-4：左右對摺並剪開

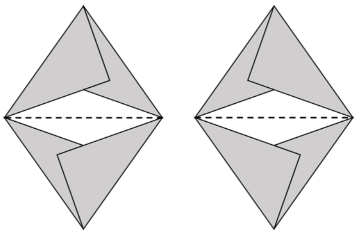


圖 14-5：沿紅線向內摺

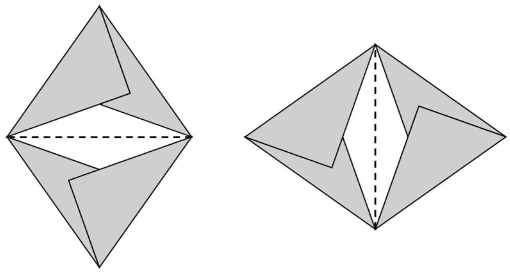


圖 14-6：沿紅線向內摺

圖 14-7：調整二個零件成為對稱圖形

圖 14-8：一個零件旋轉 90 度翻面互扣

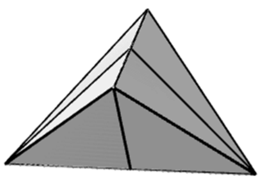


圖 14-9： 四面體完成

圖 15： 摺製影片 QR Code

想一想

最後有幾個問題留給讀者思考：

[問題一]

圖 16 為步驟 14-1 製 14-9 摺製過程在 A4 影印紙上產生的摺痕，試問△GMO、△ENO、△FMO 和△HNO 是邊長比為$\sqrt{3}$:$\sqrt{3}$: 2的三角形嗎?

[問題二]

如圖 17，將可以填充空間的四面體沿著$\overline{AC}$與$\overline{BC}$二等分，其中$\overline{AC} \perp \overline{DE}$，利用圖 18 的展開圖製作 6 個三角錐，並模仿李再鈐老師的天地人和作品完成一個四面體環，請問這個四面體環可以翻轉嗎?翻轉時中央有空隙嗎?

經由以上的討論與實作，讀者是否會很想趕緊前往臺南市美術二館親自欣賞李再鈐老師這個充滿數學味的「藝數」創作呢?別遲疑，帶著您的作品即刻出發!

本文的完成特別感謝「藝數摺學」寫作群組的李政憲老師(林口國中)一同尋找前往《天地人和》的秘徑，彭良禎老師(師大附中)和張惟淳老師(後甲國中)的建議與校稿。

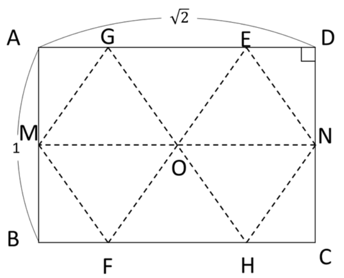


圖 16：A4 影印紙上產生的摺痕

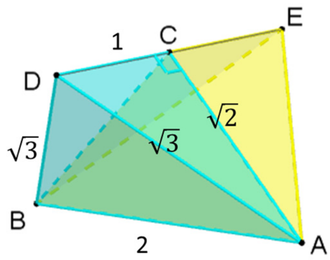


圖 17：填充空間的四面體沿著$\overline{AC}$與$\overline{BC}$二等分

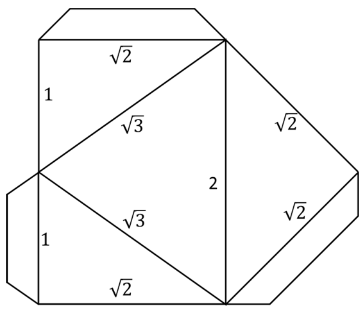


圖 18：展開圖

參考資料:

1. 臺南美術館建築特色 https://www.tnam.museum/about_us/building