

中學生通訊解題第 147 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

14701

求所有的三元整數組 (x, y, z) ，使得 $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 107$ 。

【簡答】 $(x, y, z) = (36, 36, 35), (36, 35, 36), (35, 36, 36)$

【詳解】

因為 $(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2] = 2 \times 107$
且 $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \equiv 0 \pmod{2}$ 。

$$\text{故 } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 214 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{或 } \begin{cases} x + y + z = 107 \\ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 2 \end{cases} \quad (2)$$

由方程式(1)得

$$(x - y)^2 + (x + 2y - 1)^2 + (2x + y - 1)^2 = 214$$

$$\text{即 } 6x^2 + 6y^2 + 6xy - 6x - 6y + 2 = 214$$

但 $212 \equiv 2 \pmod{6}$ ，矛盾。

考慮方程式(2)

因為 $|x - y|, |y - z|, |z - x|$ 中有兩個 1，一個 0，不妨設 $x \geq y \geq z$ 。

當 $x - 1 = y = z$ 時， $3x - 2 = 107$ ，無解；

當 $x = y = z + 1$ 時， $3x + 2 = 107$ ， $z = 35$ 。

因此，滿足條件的三元數組為 $(x, y, z) = (36, 36, 35), (36, 35, 36), (35, 36, 36)$ 。

【解題評析】

1. 本題徵答人數為 2 人，本題數論有些難度，徵答人數偏少，其中得 6 分者是新

北市海山國小同學，相當不容易，特別值得嘉許。

2. 同學的作答方式有共同的缺點，在窮舉討論的時候，沒有討論到所有整數的情況，或者說明不夠完整。本題是數論題，其中有 3 個整數變數，這類的問題一般來說，可以試著先對式子進行因式分解，再利用整數的奇偶性，減少我們需要討論的情況。另外原方程式的變數有對稱性，所以我們討論的時候可以先令 $x \geq y \geq z$ 。得出 1 組解的時候，再依對稱性可以推得 3 組解。

問題編號

14702

有一公差為 1 的等差數列，其各項均為實數，且首項的平方與其餘各項之和不超過 2450，請問這樣的數列最多有幾項？

【簡答】 99

【詳解】

設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是公差為 1 的等差數列，且 $a_1^2 + a_2 + a_3 + \dots + a_n \leq 2450$

$$a_1^2 + \frac{[(a_1+1)+(a_1+n-1)]}{2} \cdot (n-1) \leq 2450, \quad a_1^2 + (n-1)a_1 + \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 2450\right) \leq 0$$

當 $D = (n-1)^2 - 4\left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} - 2450\right) \geq 0$ ，至少存在一實數 a_1 滿足上述不等式

即 $n^2 - 9801 \leq 0 \Leftrightarrow -99 \leq n \leq 99$ ，取 n 最大值為 99

(該數列即 $-49, -48, \dots, -1, 0, 1, \dots, 48, 49$ ，共 99 項)

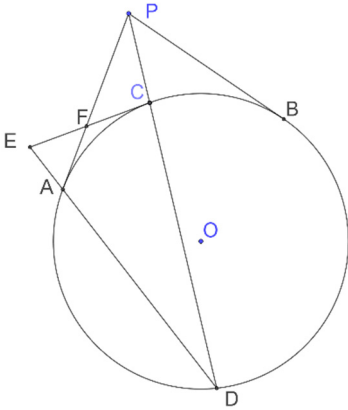
【解題評析】

本題可依題幹說明列出不等式並用判別式算出 n 的範圍，但仍需檢驗等號是否成立，故需真的找到一組滿足的數列。

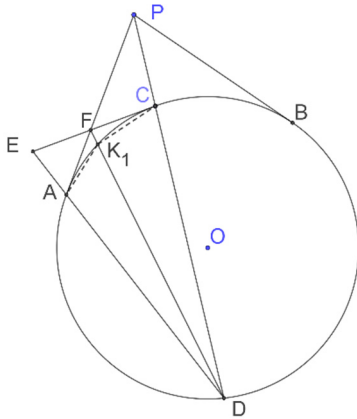
問題編號

14703

如圖，從圓 O 外一點 P 作圓 O 的兩條切線， A, B 為切點，再從 P 引圓 O 的一條割線 PCD ，過 C 作圓 O 的切線分別交直線 $\overline{PA}, \overline{DA}$ 於 F, E 兩點，
求證： $\overline{DF}, \overline{BE}$ 兩直線的交點在圓 O 上。



【證明】



如圖，設 \overline{DF} 交圓 O 於 K_1 ，連接 $\overline{AK_1}, \overline{K_1C}$ 。

易知， $\triangle FAK_1 \sim \triangle FDA, \triangle FCK_1 \sim \triangle FDC$ ，

$$\text{則 } \frac{\overline{AK_1}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{K_1C}}{\overline{CD}} \text{，從而 } \frac{\overline{AK_1}}{\overline{K_1C}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \dots (1)。$$

設 \overline{BE} 交圓 O 於 K_2 ，連接 $\overline{AK_2}, \overline{K_2C}, \overline{CB}, \overline{BD}, \overline{AC}$ 。

由 $\triangle EAK_2 \square \triangle EBD, \triangle EBC \square \triangle ECK_2$ ，

可分別得 $\frac{\overline{AK_2}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{EK_2}}{\overline{ED}} \cdots (2), \frac{\overline{CB}}{\overline{K_2C}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{EK_2}} \cdots (3)$ ；

由 $\triangle ECD \square \triangle EAC$ ，可得 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} \cdots (4)$ ；

又 $\triangle PBD \square \triangle PCB, \triangle PAD \square \triangle PCA$ ，

可得 $\frac{\overline{BD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \cdots (5)$ ；

$(2) \times (3) \times (4) \times (5) : \frac{\overline{AK_2}}{\overline{K_2C}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}$ 。

再由式(1)可知： $\frac{\overline{AK_1}}{\overline{K_1C}} = \frac{\overline{AK_2}}{\overline{K_2C}}$ ，所以， K_1, K_2 兩點重合。

故 $\overline{DF}, \overline{BE}$ 兩直線的交點在圓 O 上。

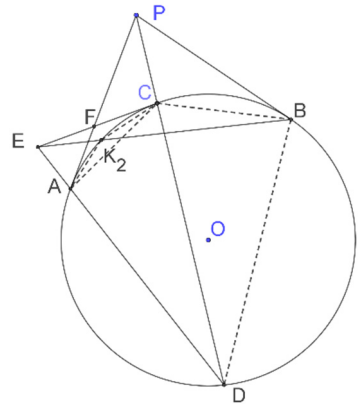
【解題評析】

本題沒有同學參加徵答。

問題編號
14704

已知 a, b, c 是 1 到 9（包含 1 和 9）中的不同整數，則 $\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值為何？

【簡答】 1



【詳解】

在 $a=1, b=2, c=3$ 的情況下，可以達到值為 1。

以下說明不能小過 1。分母可達到最大值為 24，
所以只須考慮分子小於 24 的情況，列表如下：

a	b	c	$a+b+c$	abc
1	2	3	6	6
		4	7	8
		5	8	10
		6	9	12
		7	10	14
		8	11	16
		9	12	18
1	3	4	8	12
		5	9	15
		6	10	18
		7	11	21
1	4	5	10	20

在這些情況下 $a+b+c < abc$ ，

而在其他所有情況 $abc \geq 24$ 同時 $a+b+c \leq 24$ 。

是以 $\frac{abc}{a+b+c}$ 的最小值為 1。

【解題評析】

本題屬偏易的組合操作題，當然也可用代數做分析解構。有的同學分析過程不夠嚴謹，雖得出正確答案，但不算答題正確實屬可惜。本題共 2 位同學參與徵答，1 位同學獲得滿分。

問題編號

14705

在 15×15 的方格紙中的每一個小方格內任意地寫上 $1, 2, 3, \dots, 55, 56$ 中的一個數。

求證：一定能找到 4 個小方格，它們的中心是一個平行四邊形（包括退化的）的四個頂點，且平行四邊形對角線兩端的兩個小正方形中數字之和相等。

【證明】

設方格紙的中心方格為 A ，則除去 A 外其餘 224 個方格可以配成 112 對，且每對小方格關於 A 的中心對稱，配對小方格中兩數之和必不小於 $1+1$ ，且不大於 $56+56$ ，即 112，從而配對小方格中兩數之和最多有 111 個不同的取值，而現在有 112 對配對小方格，由鴿籠原理知，必有兩對小方格，其中數字之和相等，而這兩對小方格的中心組成以 A 的中心為對稱中心的平行四邊形，即證明了命題。

【解題評析】

1. 本題是運用了組合數學裡的鴿籠原理(或稱為抽屜原理)。
鴿籠原理是說：將 k 個東西分成 n 類，若 $k \geq n(r-1)+1$ 則有一類東西之數目大於或等於 r 。
2. 本題只有台北市仁愛國中鐘同學參與作答，很高興鐘同學能掌握本題需要使用鴿籠原理的想法，可惜錯把籠子當鴿子用，因而只獲得 2 分。其實鐘同學犯的錯誤很常見，它也是許多不熟悉鴿籠原理的同學常犯的錯誤。
3. 我們接下來說明一下本題的籠子與鴿子。
4. 在求證敘述中，「一定能找到」是一個「存在性」的描述，所以我們可以直接考慮「 15×15 方格紙的中心方格 A 作為所求平行四邊形的中心」，這樣只要再掌握「一定可以找到某個平行四邊形以 A 為中心，其對角線兩端的兩個小正方形中數字之和相等」即可，此時使用鴿籠原理，其中「籠子」是「對角線兩端的兩個小正方形中數字之和的所有可能，即 $1+1=2, 3, 4, \dots, 112=56+56$ ，共有 111 種可能」，而「鴿子」則是「以 A 為對稱中心的兩個小正方形所有的配對可能，即共有 $\frac{15 \times 15 - 1}{2} = 112$ 對配對小方格」。所以，由鴿籠原理可知，必有兩對小方格，其中數字之和相等，而這兩對小方格的中心組成以 A 的中心為對稱中心的平行四邊形，即證明了命題。
5. 最後，請觀察 112 與 111 兩個數字之間的關係，同學們可以想一想為什麼題目會假設「在 15×15 的方格紙中的每一個小方格內任意地寫上 $1, 2, 3, \dots, 55, 56$ 中的一個數」呢？題目中的數字是怎麼設計的呢？