再探數學方塊-歸零或循環(下)

蘇楹翔 呂季軒 蘇柏奇＊

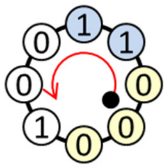
苗栗縣立興華高級中學

肆、僅有 0、1 時的運算規律式

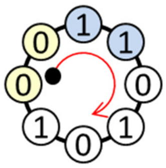
一、符號定義與運算規則

根據文獻結論 2，本節探討僅有 0、1 兩種數字的運算，本研究考慮環狀排列，當環中分別有 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 個 0 相鄰、$b_1,b_2,\dots,b_n$ 個 1 相鄰時，不失一般性，不妨令適當選擇起點與方向，先以最多相鄰的 0 為起點，再依兩旁較多相鄰的 1 決定順時針或逆時針方向，擷取成直線排列 $\underbrace{00...0}_{a_1}\underbrace{11...1}_{b_1}\underbrace{00...0}_{a_2}\underbrace{11\dots1}_{b_2}\cdots\underbrace{00...0}_{a_n}\underbrace{11...1}_{b_n}$，其中，$a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ 且 $b_1\ge b_n$，

記為 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$，其中，上列為 0 的個數，下列為 1 的個數。例如：



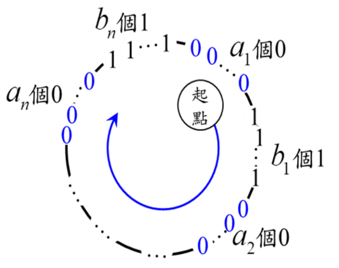
000 11 00 1 $\Rightarrow\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$



00 11 0 1 0 1 $\Rightarrow\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

定義符號：

擷取右圖環狀排列為 $\underbrace{00...0}_{a_1}\underbrace{11...1}_{b_1}\underbrace{00...0}_{a_2}\underbrace{11\dots1}_{b_2}\cdots\underbrace{00...0}_{a_n}\underbrace{11...1}_{b_n}$,



並記為：$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}, a_1=\max\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$

且 $b_1\ge b_n$。

觀察運算的變化如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \to & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}，記為\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}；$$

*為本文通訊作者

$$\begin{matrix} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \rightarrow & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$，記為 $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；

不難發現：(1) 前 $a_i - 1$ 個 0 運算後仍為 0、第 a_i 個 0 運算後為 1；

(2) 前 $b_i - 1$ 個 1 運算後為 0、第 b_i 個 0 運算後仍為 1，如下圖所示：

$$\overbrace{0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0\ \ 0}^{a_i}\ \ \overbrace{1\ \ 1\ \ \ldots\ \ 1\ \ 1}^{b_i}\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots$$

$$\rightarrow \underbrace{0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0}_{a_i - 1}\ \ 1\ \ \underbrace{0\ \ 0\ \ \ldots\ \ 0}_{b_i - 1}\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ \ldots$$

因此，得運算規則：

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 - 1 & a_2 - 1 & b_2 - 1 & \ldots & a_n - 1 & b_n - 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

據此規則，當 a_i 或 b_i 為 1 時，運算後出現 0，則可合併，例如當 $b_i = 1$ 的運算如下：

$$\overbrace{0\ \ldots\ 0\ \ 0}^{a_i}\ \overbrace{1}^{1}\ \overbrace{0\ \ldots\ 0\ \ 0}^{a_{i+1}}\ \overbrace{1\ \ 1\ \ldots\ 1}^{b_{i+1}}$$

$$\rightarrow \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{a_i - 1}\ \underbrace{1\ \ 1}_{2}\ \underbrace{0\ \ldots\ 0}_{a_{i+1} - 1}\ \underbrace{1}_{1}\ \underbrace{0\ \ 0\ \ldots}_{b_{i+1} - 1}\ \underbrace{1}_{1}$$

$$\begin{pmatrix} a_i & a_{i+1} \\ 1 & b_{i+1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_i - 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} a_{i+1} - 1 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} b_{i+1} - 1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i - 1 & a_{i+1} - 1 & b_{i+1} - 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因此，得合併化簡：$\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y + z \end{pmatrix}$。

例如：$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$。

此外，我們發現經過運算後可能產生 $a_1 \neq \max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 或 $b_1 < b_n$ 的情形，可立即以符號紀錄規則重新調整。例如上例中運算後 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 可調整為 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$；再如

$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$可調整為$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$。

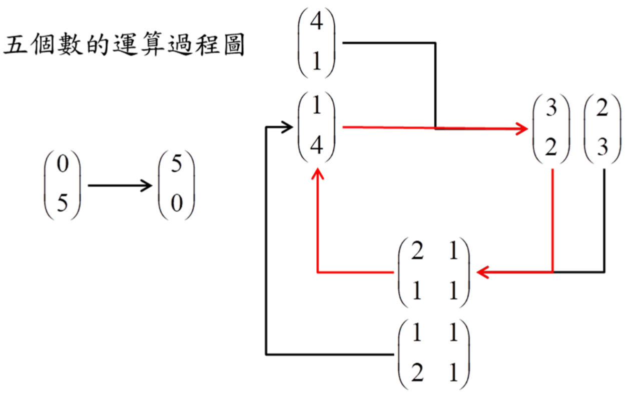
結論 4：運算及合併規則

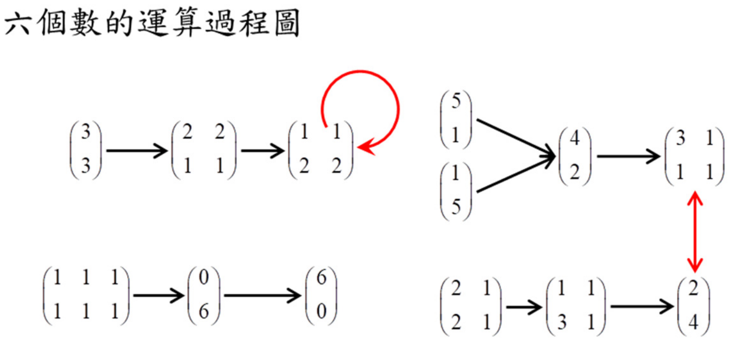
1.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1-1 & b_1-1 & a_2-1 & b_2-1 & \dots & a_n-1 & b_n-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

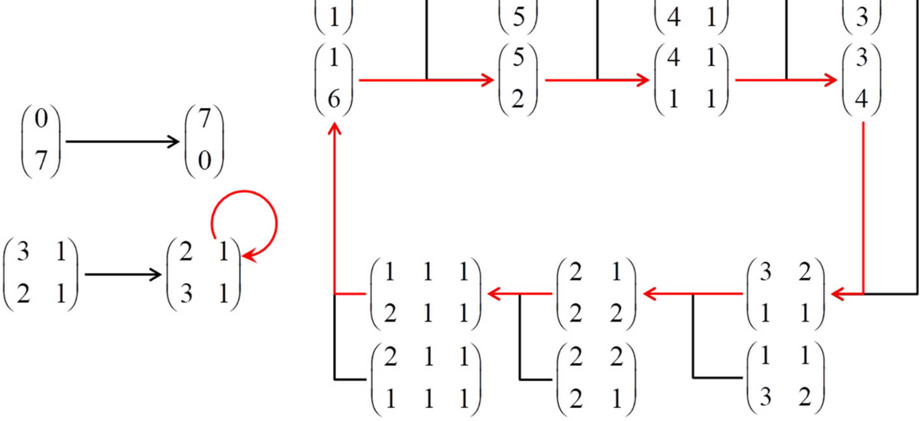
2. $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}$

運用上述運算及合併規則，劃出 5~7 個數的運算過程如下：





七個數的運算過程圖



觀察到：$\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix}$皆運算為$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$；$\begin{pmatrix}4&1\\1&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&1\\4&1\end{pmatrix}$皆運算為$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，利用運算規則得：

$$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1-1&b_1-1\\1&1\end{pmatrix}\text{、}\begin{pmatrix}b_1\\a_1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1-1&a_1-1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1-1&b_1-1&a_2-1&b_2-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\text{、}\begin{pmatrix}b_1&b_2\\a_1&a_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1-1&a_1-1&b_2-1&a_2-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

又因$\begin{pmatrix}a_1-1&b_1-1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-1&a_1-1\\1&1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a_1-1&b_1-1&a_2-1&b_2-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1-1&a_1-1&b_2-1&a_2-1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

得$\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}b_1\\a_1\end{pmatrix}, a_1,b_1\neq 0$運算結果相同；$\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}b_1&b_2\\a_1&a_2\end{pmatrix},\ a_1,b_1,a_2,b_2\neq 0$運算結果相同。

由$\begin{pmatrix}a_1&a_2&\dots&a_n\\b_1&b_2&\dots&b_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_1-1&b_1-1&a_2-1&b_2-1&\dots&a_n-1&b_n-1\\1&1&1&1&\dots&1&1\end{pmatrix}$，得運算後，每個 a_i,b_i 都形成一行，但當 $a_i-1=0$ 或 $b_i-1=0$ 時，該行與下一行合併，即運算後之符號有多少行，取決於有多少個大於 1 的 a_i,b_i ，得到「若有 m 個 a_i,b_i 大於 1，則運算後有 m

行」。

結論 5：運算的規律

1. $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$運算結果相同；$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$運算結果相同。

2. 若$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$中恰有 m 個 a_i, b_i 大於 1，則運算後的符號有 m 行。

二、循環長度為 1 與 2 的解

觀察發現$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$運算後仍為$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$，可視為一個長度 1 的循環，考慮$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$

運算為$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$的可能性，首先：

1. $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$：因運算後有 1 行，故 a_1, b_1 中恰有 1 個為 1，

$\begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & b_1 - 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ b_1 \end{pmatrix}$，得 $b_1 = 2$，即$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。

$\begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 \\ 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a_1 \\ 1 \end{pmatrix}$，無解。

2. $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$：因運算後有 2 行，故 a_1, a_2, b_1, b_2 中恰有 2 個為 1，

有三種可能：

(1)　當 $a_1 = 1$ 時，因 $a_1 = \max\{a_1, a_2\}$，故 $a_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & b_1 - 1 & 0 & b_2 - 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 1 & b_2 - 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

當 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - 1 & b_2 - 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，解得 $b_1 = b_2 = 2$，即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$。

(2)　當 $a_1 \neq 1$ 時，因 $b_1 \geq b_2$，故有 $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 兩種：

① $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 - 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 - 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，

當 $\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & b_1 - 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$，解得 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 3 \end{cases}$，即 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$。

② $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 - 1 & 0 & a_2 - 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，

當 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - 1 & a_2 - 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，無解。

3. 從 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 聯想到 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$ 是否也具相同的性質？

由 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 2 & 2 & \ldots & 2 \end{pmatrix}$，得證。

4. 從六個數的運算過程圖中發現 $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$，接著考慮 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$ 的解？

先由$\begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_1-1 & d_1-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$，得$b_1 = b_2 = 1$

再由$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1-1 & 0 & a_2-1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$，得$\begin{cases} a_2 = 1 \\ d_1 = 4 \end{cases}$

再由$\begin{pmatrix} c_1 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c_1-1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，得$\begin{cases} a_1 = 3 \\ c_1 = 2 \end{cases}$，故得$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$。

結論 6：循環長度為 1 或 2 的解

1. 滿足$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$的解只有$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$。
2. 滿足$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$的解只有$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$。
3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \end{pmatrix}$
4. 滿足$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ d_1 \end{pmatrix}$的解只有$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$。

三、$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$經過 2^n 次運算的結果

利用運算規則得：$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-1 & y-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，先討論$\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$後續的運算過程如下：

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-2 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} x-3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-4 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} x-5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x-8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

觀察到 $\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 經過 2^n-1 次為 $\begin{pmatrix} x-2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$， $n=1,2,3$ ，可猜測 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 經過 2^n 次為 $\begin{pmatrix} x-2^n & y-2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$。

為驗證上述觀察，考慮直接得到運算 2^n 次的結果。以數列方式表示，將初始情形記為 $<a_0>=<a_{0,1},a_{0,2},...a_{0,n}>$ ，經過運算 t 次所得結果為 $<a_t>=<a_{t,1},a_{t,2},...a_{t,n}>$ ，比較 $a_{t,j}=|a_{t-1,j}-a_{t-1,j-1}|$ 及 $b_{t,j}=a_{t-1,j}+a_{t-1,j-1}$ 且 $c_{t,j}\equiv b_{t,j}(\mathrm{mod}\,2)$ 其中 $c_{t,j}$=0 或 1，如下：

$a_{t-1,j}$	$a_{t-1,j-1}$	$a_{t,j}=\|a_{t-1,j}-a_{t-1,j-1}\|$	$b_{t,j}=a_{t-1,j}+a_{t-1,j-1}$	$c_{t,j}\equiv b_{t,j}(\mathrm{mod}\,2)$
0	0	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	2	0

四種情況都得到 $a_{t,j}=c_{t,j}$，相較於絕對值的計算，加法與同餘式相對簡單，因此，我們將先算得 $b_{t,j}$，藉由同餘式得 $c_{t,j}$，因 $a_{t,j}=c_{t,j}$，即得 $<a_t>=<a_{t,1},a_{t,2},...a_{t,n}>$。計算 $b_{t,j}$ 時，

不難發現其與帕斯卡三角形的關聯，如下：

$$
\begin{aligned}
b_{t,j} &= a_{t-1,j} + a_{t-1,j+1} \\
&= a_{t-2,j} + 2a_{t-2,j+1} + a_{t-2,j+2} \\
&= a_{t-3,j} + 3a_{t-3,j+1} + 3a_{t-3,j+2} + a_{t-3,j+3} \\
&\cdots \qquad\qquad \cdots \\
&= C_0^t a_{0,j} + C_1^t a_{0,j+1} + \ldots + C_i^t a_{0,j+i} + \ldots + C_t^t a_{0,j+t}
\end{aligned}
$$

如：$<a_0> = <0,0,0,0,1,1,1>$ 時，求 $c_{4,2}$ 過程如下：

$$
\begin{aligned}
b_{4,2} &= C_0^4 a_{0,2} + C_1^4 a_{0,3} + C_2^4 a_{0,4} + C_3^4 a_{0,5} + C_4^4 a_{0,6} \\
&= 1\times 0 + 4\times 0 + 6\times 0 + 4\times 1 + 1\times 1 \\
&= 5
\end{aligned}
$$

，

$<a_0>$	0	0	0	0	1	1	1
$<a_1>$	0	0	0	1	0	0	1
$<a_2>$	0	0	1	1	0	1	1
$<a_3>$	0	1	0	1	1	0	1
$<a_4>$	1	1	1	0	1	1	1

再得 $c_{4,2}$=1。

由同餘式計算 $c_{t,j}$ 時，只需計算 C_j^i 為奇數或 $a_{0,j}=1$ 的部分。因 $C_i^{2^n-1},\ i=0,1,2,\ldots,2^n-1$ 皆為奇數，可將 $b_{2^n-1,j} = C_0^{2^n-1}a_{0,j} + C_1^{2^n-1}a_{0,j+1} + \ldots + C_i^{2^n-1}a_{0,j+i} + \ldots + C_{2^n-1}^{2^n-1}a_{0,j+2^n-1}$ 簡化為 $b_{2^n-1,j} = a_{0,j} + a_{0,j+1} + \ldots + a_{0,j+2^n-1}$。

結論 7：計算 $b_{t,j}$ 的方法

$b_{t,j} = C_0^t a_{0,j} + C_1^t a_{0,j+1} + \ldots + C_i^t a_{0,j+i} + \ldots + C_t^t a_{0,j+t}$，

其中，當 $t=2^n-1$ 時， $b_{2^n-1,j} = a_{0,j} + a_{0,j+1} + \ldots + a_{0,j+2^n-1}$。

接著，驗證 $\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 經過 2^n-1 次為 $\begin{pmatrix} x-2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$ 如下：

由$\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$得$< a_0 >=< 0,0,...,0,1 >$即$\begin{cases} a_{0,1}=a_{0,2}=...=a_{0,x-1}=0 \\ a_{0,x}=1 \end{cases}$

得$\begin{cases} b_{2^n-1,1} & = & a_{0,1}+a_{0,2}+...+a_{0,2^n} & = & 0 \\ b_{2^n-1,2} & = & a_{0,2}+a_{0,3}+...+a_{0,2^n+1} & = & 0 \\ & ... & & & \\ b_{2^n-1,x-2^n} & = & a_{0,x-2^n}+a_{0,x-2^n+1}+...+a_{0,x-1} & = & 0 \\ b_{2^n-1,x-2^n+1} & = & a_{0,x-2^n+1}+a_{0,x-2^n+2}+...+a_{0,x} & = & 1 \\ & ... & & & \\ b_{2^n-1,x} & = & a_{0,x}+a_{0,x+1}+...+a_{0,x+2^n-1} & = & 1 \end{cases}$，記為$\begin{pmatrix} x-2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$，證畢。

另外，因為$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$經一次運算為$\begin{pmatrix} x-1 & y-1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，再經過$2^n-1$次為$\begin{pmatrix} x-2^n & y-2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$，

即得$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$經過$2^n$次為$\begin{pmatrix} x-2^n & y-2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$。

結論 8：運算規則

1. $\begin{pmatrix} x-1 \\ 1 \end{pmatrix}$經過$2^n-1$次為$\begin{pmatrix} x-2^n \\ 2^n \end{pmatrix}$，其中$x \ge 2^n$。

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$經過$2^n$次為$\begin{pmatrix} x-2^n & y-2^n \\ 2^n & 2^n \end{pmatrix}$，其中$x \ge 2^n$且$y \ge 2^n$。

四、0、1 個數互換（即$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$）與循環長度

接下來，觀察 9 個數的例子如下：

$\begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}$ 經 7 次運算為 $\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$<a_0>$	0	0	0	0	0	0	0	0	1
$<a_1>$	0	0	0	0	0	0	0	1	1
$<a_2>$	0	0	0	0	0	0	1	0	1
$<a_3>$	0	0	0	0	0	1	1	1	1
$<a_4>$	0	0	0	0	1	0	0	0	1
$<a_5>$	0	0	0	1	1	0	0	1	1
$<a_6>$	0	0	1	0	1	0	1	0	1
$<a_7>$	0	1	1	1	1	1	1	1	1

$\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ 經 7 次運算為 $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$<a_0>$	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$<a_1>$	0	0	0	0	0	1	0	0	1
$<a_2>$	0	0	0	0	1	1	0	1	1
$<a_3>$	0	0	0	1	0	1	1	0	1
$<a_4>$	0	0	1	1	1	0	1	1	1
$<a_5>$	0	1	0	0	1	1	0	0	1
$<a_6>$	1	1	0	1	0	1	0	1	1
$<a_7>$	0	1	1	1	1	1	1	0	0

$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ 經 7 次運算為 $\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$<a_0>$	0	0	0	0	1	1	1	1	1
$<a_1>$	0	0	0	1	0	0	0	0	1
$<a_2>$	0	0	1	1	0	0	0	1	1
$<a_3>$	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$<a_4>$	1	1	1	1	0	1	1	1	1
$<a_5>$	0	0	0	1	1	0	0	0	0
$<a_6>$	0	0	1	0	1	0	0	0	0
$<a_7>$	0	1	1	1	1	0	0	0	0

再例如：$\begin{pmatrix}16\\1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}14\\3\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}12\\5\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}10\\7\end{pmatrix}$分別經 15 次運算變為$\begin{pmatrix}1\\16\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}3\\14\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$，

這些例子皆為有 2^n+1 個數且有奇數個 1 的情形，進而推測 $\begin{pmatrix}2^n-2x\\2x+1\end{pmatrix}$ 經 2^n-1 次運算為

$\begin{pmatrix}2x+1\\2^n-2x\end{pmatrix}$，驗證如下：

由 $\begin{pmatrix}2^n-2x\\2x+1\end{pmatrix}$，得 $<a_0>=<\underbrace{0,0,\ldots,0}_{2^n-2x},\underbrace{1,1,\ldots,1}_{2x+1}>$，即 $\begin{cases}a_{0,1}=a_{0,2}=\ldots=a_{0,2^n-2x}=0\\a_{0,2^n-2x+1}=a_{0,2^n-2x+2}=\ldots=a_{0,2^n+1}=1\end{cases}$

$$\text{算得}\begin{cases}b_{2^n-1,1} & = & a_{0,1}+a_{0,2}+\ldots+a_{0,2^n} & = & 2x+1-a_{0,2^n+1}\\b_{2^n-1,2} & = & a_{0,2}+a_{0,3}+\ldots+a_{0,2^n+1} & = & 2x+1-a_{0,1}\\\ldots\end{cases},$$

因 $a_{0,2^n-2x+1}=a_{0,2^n-2x+2}=\ldots=a_{0,2^n+1}=1$

故得 $b_{0,i}$ 中恰有 $2x+1$ 個連續的偶數，記為 $\begin{pmatrix}2x+1\\2^n-2x\end{pmatrix}$。證畢。

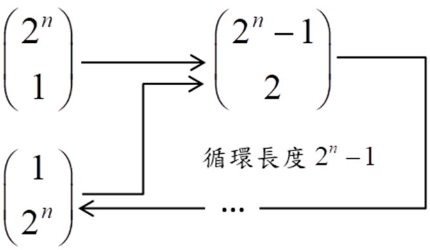
結論 9：2^n+1 個數的運算

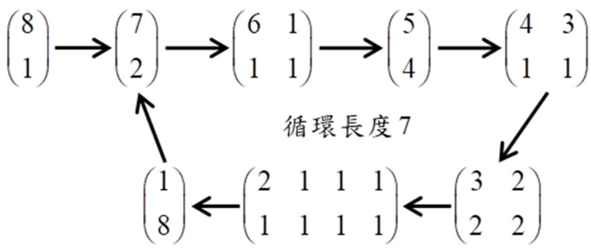
$\begin{pmatrix} 2^n-2x \\ 2x+1 \end{pmatrix}$經 2^n-1 次運算為 $\begin{pmatrix} 2x+1 \\ 2^n-2x \end{pmatrix}$。

注意到：將 $x=0$ 代入結論 9，或將 $x=2^n+1$ 代入結論 8-1，皆得到 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 1 \end{pmatrix}$ 經 2^n-1 次運算為 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^n \end{pmatrix}$。兩者差別在於結論 8-1 限制僅 1 個 1 但總個數不限，而結論 9 討論奇數個 1 但總個數為 2^n+1 的情形。

以下考慮循環長度：

1. 當有 2^n+1 個數時：由結論 8-1，$\begin{pmatrix} 2^n \\ 1 \end{pmatrix}$ 經過 2^n-1 次運算為 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^n \end{pmatrix}$，又由結論 5-1 得 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2^n \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 1 \end{pmatrix}$ 的運算結果相同，即進入循環，循環長度為 2^n-1。例如：有 $2^3+1=9$ 個數時，存在循環長度為 $2^3-1=7$ 之循環如下。

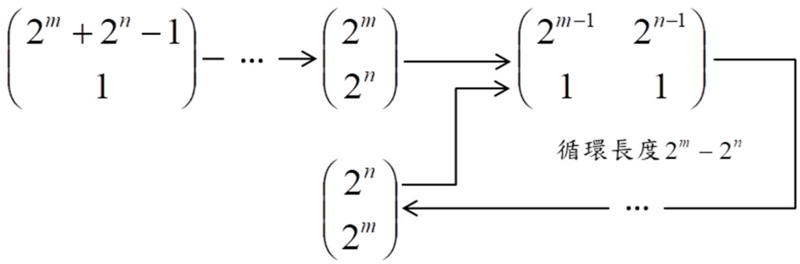


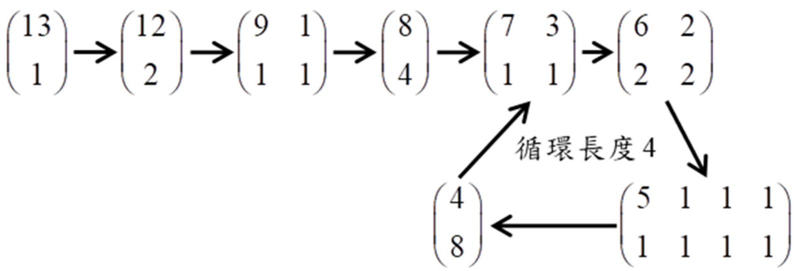


2. 當有 2^m+2^n 個數（不妨設 $m>n$）時：由結論 8-1，$\begin{pmatrix} 2^m+2^n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 經過 2^n-1 次運算為 $\begin{pmatrix} (2^m+2^n)-2^n \\ 2^n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2^m \\ 2^n \end{pmatrix}$，同理，$\begin{pmatrix} 2^m+2^n-1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 經過 2^m-1 次運算為 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 2^m \end{pmatrix}$。由結論 5-1

得$\begin{pmatrix}2^m\\2^n\end{pmatrix}$與$\begin{pmatrix}2^n\\2^m\end{pmatrix}$的運算結果相同皆為$\begin{pmatrix}2^m-1 & 2^n-1\\1 & 1\end{pmatrix}$，即進入循環，循環長度為

$2^m-1-(2^n-1)=2^m-2^n$。例如：有$2^3+2^2=12$個數時，存在循環長度為$2^3-2^2=4$之循環如下。



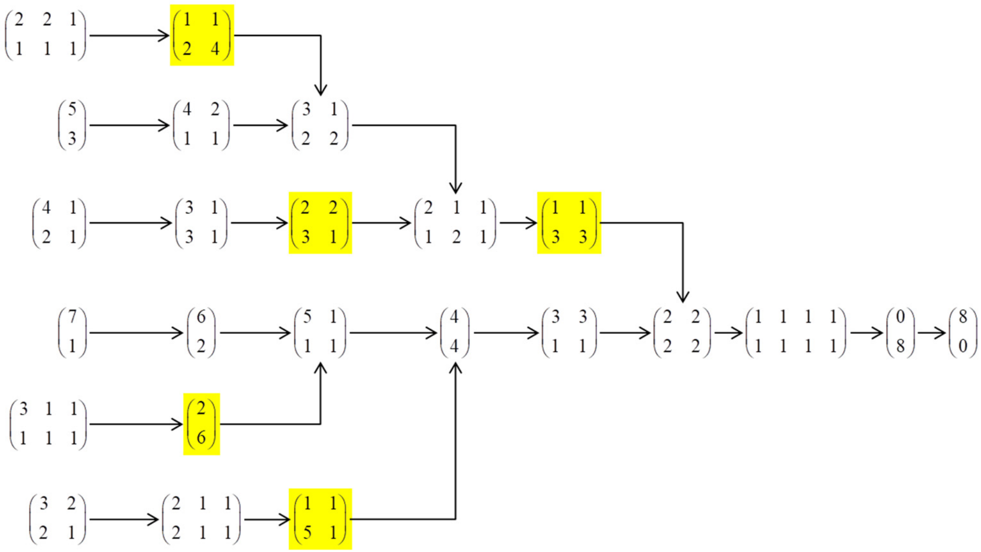


結論 10：2^m+2^n個數的循環長度 $2^m+2^n, m>n\geq 0$個數時，存在長度為2^m-2^n的循環。

五、2^n個數歸零的運算次數

觀察八個數的運算過程，發現所有奇數個 1 的情形都經 8 次完成運算，其他的則最多經過 7 次完成運算。

八個數的運算過程圖



驗證上述觀察如下：

由 $\begin{pmatrix} 2^n - x \\ x \end{pmatrix}$ 得 $< a_0 >=< \underbrace{0,0,\dots,0}_{2^n - x}, \underbrace{1,1,\dots,1}_{x} >$ 即 $\begin{cases} a_{0,1} = a_{0,2} = \dots = a_{0,2^n - x} = 0 \\ a_{0,2^n - x+1} = a_{0,2^n - x+2} = a_{0,2^n} = 1 \end{cases}$

$$\text{得}\begin{cases} b_{2^n-1,1} & = & a_{0,1} + a_{0,2} + \dots + a_{0,2^n} & = & x \\ b_{2^n-1,2} & = & a_{0,2} + a_{0,3} + \dots + a_{0,2^n+1} & = & x \\ \dots & & & & \\ b_{2^n-1,2^n} & = & a_{0,x} + a_{0,x+1} + \dots + a_{0,2^{n+1}-1} & = & x \end{cases},$$

當 x 為奇數時，得 $a_{2^n-1,1} = a_{2^n-1,2} = \dots = a_{2^n-1,2^n} = 1$，記為 $\begin{pmatrix} 0 \\ 2^n \end{pmatrix}$，再經 1 次運算為 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$

即得 $\begin{pmatrix} 2^n - x \\ x \end{pmatrix}$ 經過 2^n 次運算為 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$

當 x 為偶數時，得 $a_{2^n-1,1} = a_{2^n-1,2} = \dots = a_{2^n-1,2^n} = 0$，記為 $\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$

即得$\begin{pmatrix} 2^n - x \\ x \end{pmatrix}$最多經過$2^n - 1$次運算為$\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$

上述驗證過程在$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_t \\ b_1 & b_2 & \dots & b_t \end{pmatrix}$, $\sum_{i=1}^{t}(a_i + b_i) = 2^n$且$\sum_{i=1}^{t} b_i$為奇、偶數的情況下也適用。

結論 11：2^n個數歸零的運算次數 若$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_t \\ b_1 & b_2 & \dots & b_t \end{pmatrix}$, $\sum_{i=1}^{t}(a_i + b_i) = 2^n$，則 1. 當$\sum_{i=1}^{t} b_i$為奇數時，經過$2^n$次運算為$\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$。 2. 當$\sum_{i=1}^{t} b_i$為偶數時，最多經過$2^n - 1$次運算為$\begin{pmatrix} 2^n \\ 0 \end{pmatrix}$。

伍、結語

我們具體得到三個數進入循環所需的次數，特別的是意外發現輾轉相除法的應用。四個數時，若為嚴格遞增，我們找到可造出經任意次運算仍為嚴格遞增的遞迴關係式，故不存在運算成立次數的上界（但仍可經有限次完成運算），而除了嚴格遞增的情形外，根據逐一檢驗的結果，得最多經過 6 次運算即能歸零。相較於得到經$n-1$運算仍為嚴格遞增的遞迴數列，筆者對於非嚴格遞增情況必能在 6 次內完成運算更為訝異。此兩者的差異，在於是否存在不相鄰兩數同為局部最大值或局部最小值。

僅有 0、1 時，我們考慮的是環狀排列，藉由適當的定義符號、歸納符號運算的規則，快速得到許多實驗數據，而藉由同餘式，則可快速得到第 j 個位置在運算 t 次的結果$c_{j,t}$（特別是$t = 2^n - 1$時），進而討論得循環長度與歸零次數。

參考資料:

1. 張建祥、王重凱(1995)，方塊數論。第 35 屆全國中小學科展高中組數學科作品。
2. 鍾佳霖、黃甄儒、李佳怡(2017)，數的循環。第 57 屆全國中小學科展高中組數學科作品。

【完】