

從四軸星組木摺紙談起

李政憲^{1*} 王儷娟²

¹ 新北市立林口國民中學

² 台南市立仁德文賢國民中學

壹、前言

2021 年 10 月 17 日，承蒙中興大學暨財團法人創藝文化基金會的贊助支持，藝數摺學社團在中興大學辦理了第三屆的年會，而此次年會邀請到高雄女中退休的林義強老師針對組木與摺紙間的關聯性作了開場演講（如下圖 1），介紹了 Stewart Coffin 對於 Diagonal Burr 的作品介紹，引發了我們在群組中的熱烈討論，除了研究如何以摺紙方式完成同樣比例零件以組裝，甚至延伸開發了新的模板與組裝方式，因此特撰此文以作紀錄。



圖 1

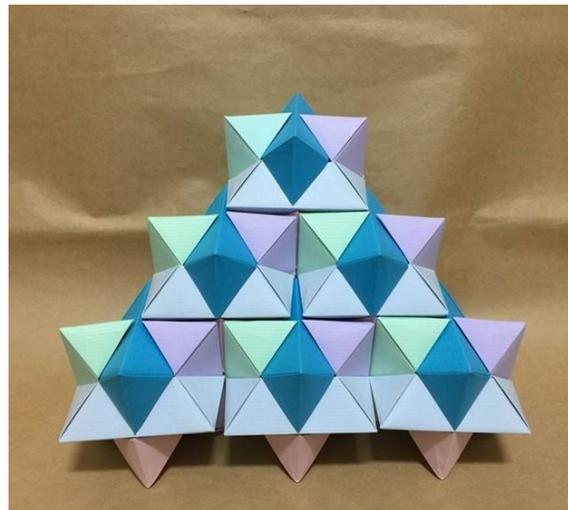


圖 2

首先我們先對 Diagonal Burr 作個簡單的定義，所謂的 Diagonal Burr 譯為斜角六桿組木，所指的是將有缺口（或缺角，一般不是直角）的六塊（或更多塊）木製或塑膠製組木以特殊方式進行拼組（組裝方式與對角及空間中的三軸有關，如上圖 1 海報中附圖）¹，我們生活中常聽到的魯班鎖有不少屬於這種組木，我們在社團中也曾研發以六個零件完成的艾雪多面體並撰寫文章（如上方右圖 2，取自藝數摺學社團，連崇馨老師提供），發展成課堂上可實作的課程²。

*為本文通訊作者

而這次搭配年會中義強老師分享的內容，以及社團線上共備時分享的「從 n-Axis Star 談起」中的內容，我們對於一個由 John 和 Jane Kostick 的藝術作品所設計的 Tetraxis® magnetic geometry puzzle 有極大的興趣³，是由十二塊組木所完成的一個作品（如下方圖 3，引自註解 3 網頁），因其零件中具有磁鐵，共十二塊零件可以互相吸附為一個內部為空心的立體作品，我們對於其組裝方式特別感興趣，所以先透過群組老師們以數學軟體解構其幾何結構，進一步我們並開始研究如何以摺紙完成一個比例相同的作品。



圖 3

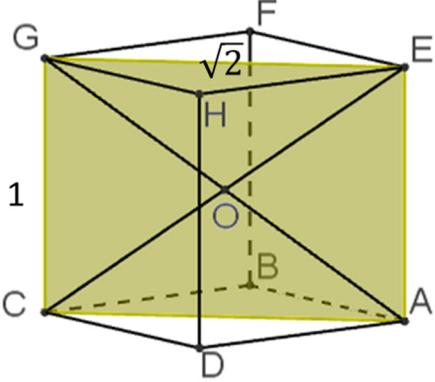
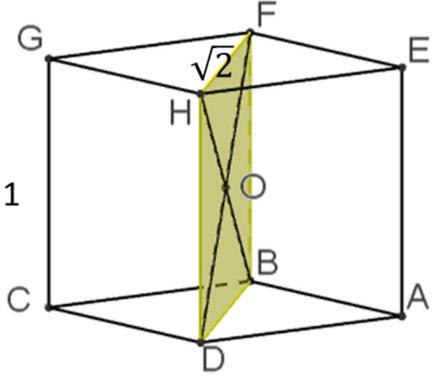
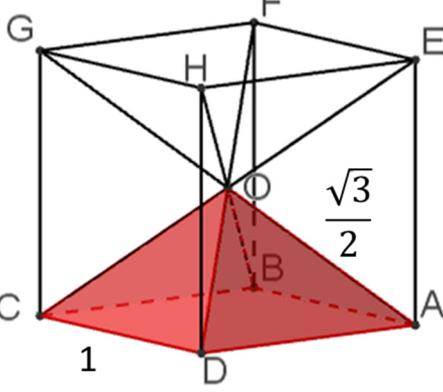
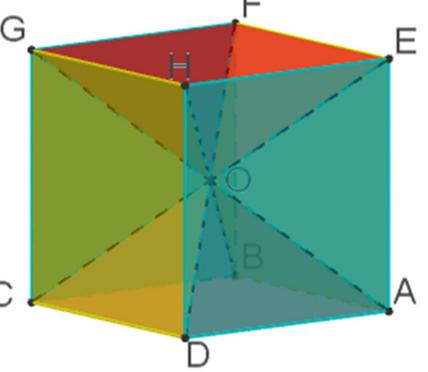
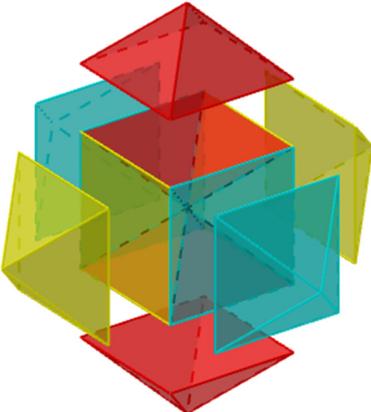
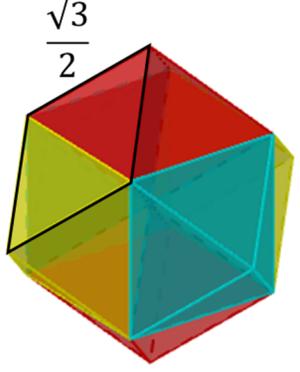
貳、認識 Tetraxis® 的幾何結構

首先從立方體說起，如圖 4，若立方體的邊長為 1，矩形 $ACGE$ 的邊 \overline{GE} 的長為 $\sqrt{2}$ ，且對角線 \overline{CE} 的長為 $\sqrt{3}$ ，可知 $\overline{AO} = \overline{GO} = \overline{CO} = \overline{EO} = \sqrt{3}/2$ ，同理圖 5 中 $\overline{BO} = \overline{HO} = \overline{DO} = \overline{FO} = \sqrt{3}/2$ ，亦即正立方體的對角線等長且互相平分。因此，圖 6 中四角錐 $O-ABCD$ 的底面為正方形，側面為 4 個等腰三角形且腰長為 $\sqrt{3}/2$ ；由圖 7 也可以看出正立方體可以分割成六個全等的四角錐。

接下來，如果再複製六個全等的四角錐如圖 8，並將正方形的面一一貼齊，則可以形成有十二個全等菱形面的多面體(如圖 9)，且菱形的邊長為 $\sqrt{3}/2$ ，這個多面體稱之為”菱形十二面體”。

如圖 10 與圖 11，觀察菱形十二面體所在及其延伸的六個正立方體的相對位置，可以看到菱形十二面體有六個頂點位於正立方體的中心，有八個頂點是正立方體的頂點。Tetraxis® 的十二塊組木，每一塊都是五面體，形狀大小都相同，並且都與菱形十二面體緊密貼合(圖 12)。如圖 13 一個貼合在菱形十二面體的菱形面上的五面體有六個頂點，其中有二個頂點 P 和 S 是紅色正立方體的中心，其餘四個頂點 Q 、 R 、 T 和 U 是紅色正立方體的頂點。由此可知，若正立方體邊長為 1，則五面體的 9 個邊的邊長分別為 $\overline{RQ} = \overline{TU} = 1$ ， $\overline{PQ} = \overline{PR} = \overline{ST} = \overline{SU} = \sqrt{3}/2$ ， $\overline{SQ} = \overline{PU} = 3\sqrt{3}/2$ 以及 $\overline{TR} = \sqrt{3}$ ，且此五面體得展開圖如圖 14。

因此，我們只要完成十二塊比例與這個五面體相同的摺紙作品，即可仿照原設計，將這些五面體貼合於內部的菱形十二面體上。

	
<p>圖 4：正立方體</p>	<p>圖 5：正立方體</p>
	
<p>圖 6：四角錐 O-ABCD</p>	<p>圖 7：六個全等的四角錐</p>
	
<p>圖 8：複製六個全等的四角錐</p>	<p>圖 9：菱形面邊長為$\sqrt{3}/2$</p>

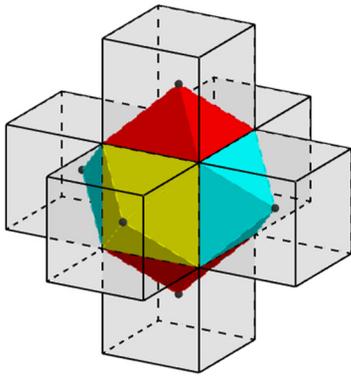


圖 10：六個頂點位於正立方體的中心

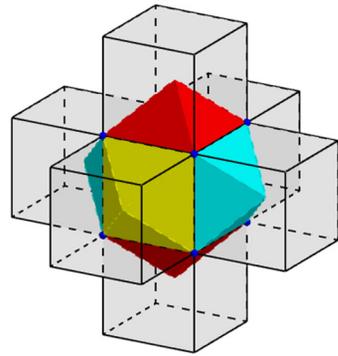


圖 11：八個頂點是正立方體的頂點

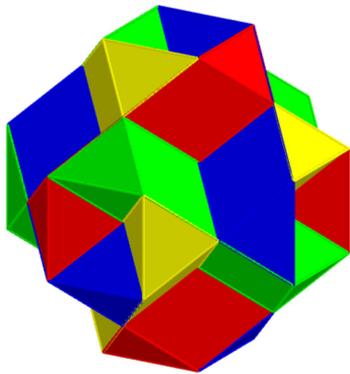


圖 12：Tetraxis®

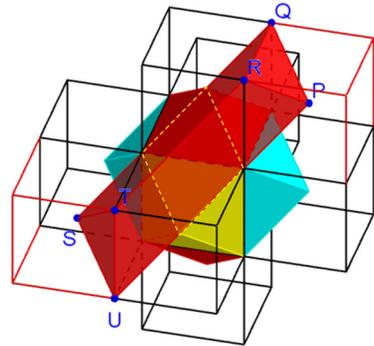


圖 13：五面體的六個頂點

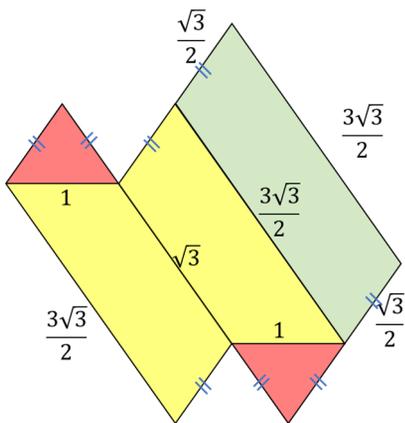


圖 14：五面體的展開圖

參、用摺紙完成 Tetraxis®五面體！⁴

知道這個五面體的結構與相關的邊長比例後，接下來我們要以日常生活中最常見的 A4 影印紙來摺製這個零件！⁵ 首先我們將每張 A4 影印紙裁切為四等份亦即 A6 尺寸，A4 影印紙與 A6 影印紙的長寬比皆為 $\sqrt{2}:1$ ，接著再按照底下的步驟逐步完成每個零件：

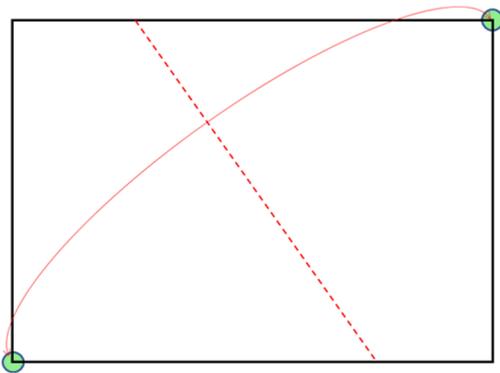


圖 15

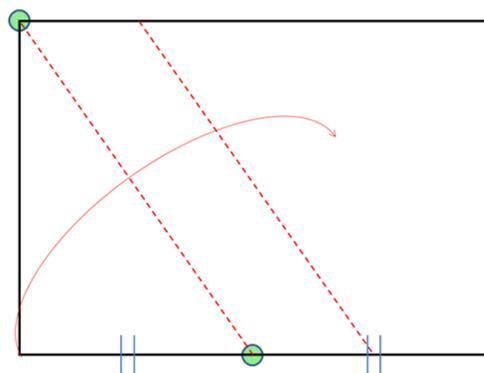


圖 16

如圖 15，將裁切後的長方形將其左下方的點與右上方的點，點對點對摺後還原，接著再連接正下方中點與左上方直角如圖 16；

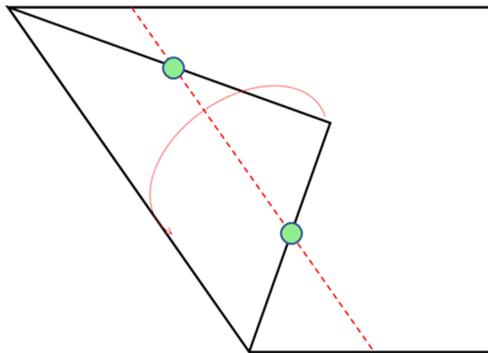


圖 17

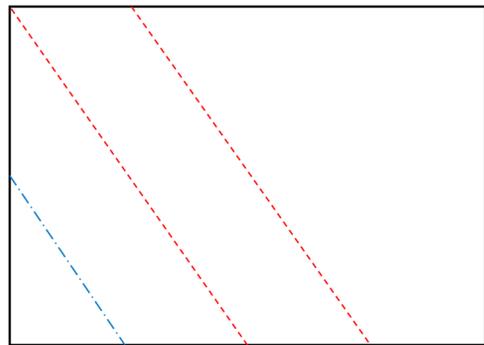


圖 18

如圖 17，將摺上來後的直角三角線沿底部的摺痕反摺後，攤開整張零件如圖 18，此時反摺後的直線恰為此直角三角形的兩股中點連線；

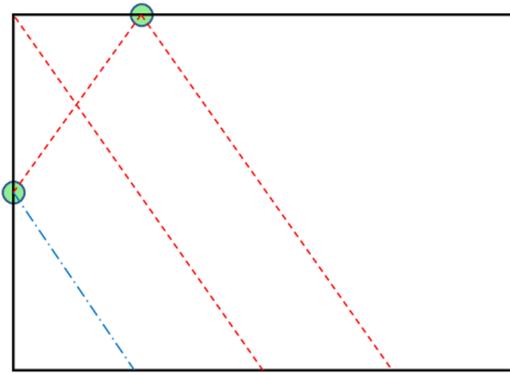


圖 19

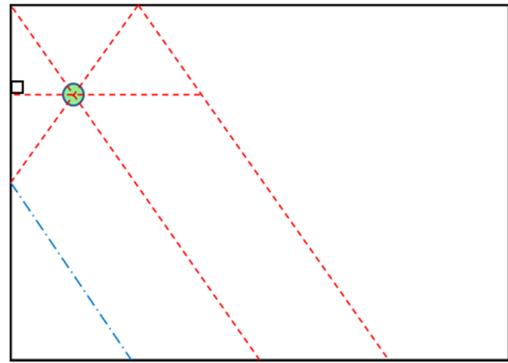


圖 20

如圖 19，摺製整張零件的左邊中點與上側摺痕交點連線後，再依新產生交點摺製水平線如圖 20，注意僅摺至第一步驟（圖 15）產生的摺痕位置即可；

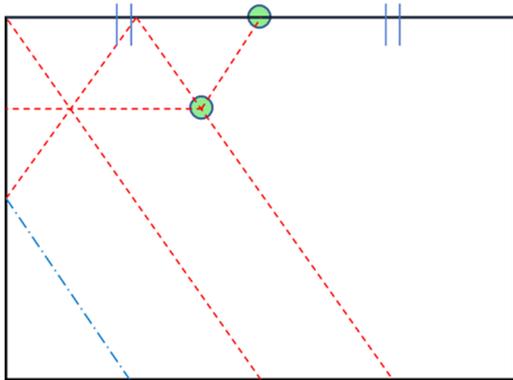


圖 21

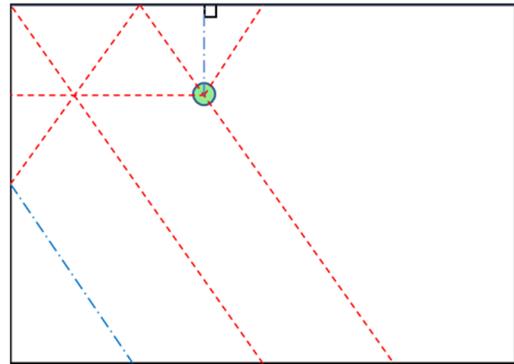


圖 22

如圖 21，連接新產生的摺痕交點與零件上方中點後，於同一點處摺製垂直線至上方邊長如圖 22；

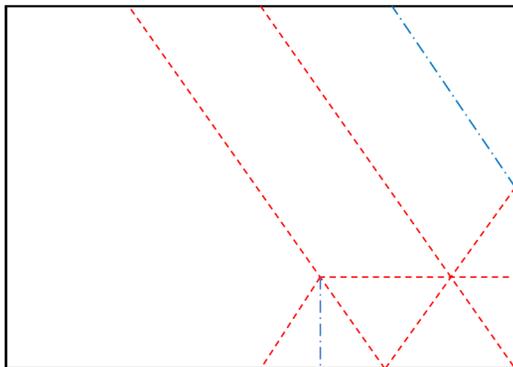


圖 23

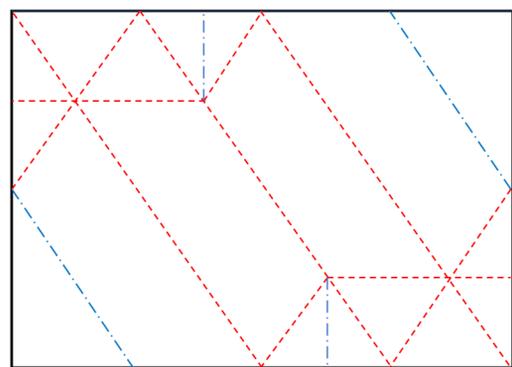


圖 24

如圖 23，將整張零件旋轉 180 度後，接著左下方再依圖 15 至圖 22 同樣方式摺製，完成零件如圖 24。

接下來，我們要按照圖 24 的所有摺痕，完成十二個零件的摺製。

首先沿上方山線與兩側谷線內摺後縮摺為圖 25，並將左上方直角三角形向內摺製，覆蓋縮摺後的直角三角形如圖 26；



圖 25



圖 26

接著下方的山線與右下方的直角三角形依圖 25 與圖 26 的處理方式，縮摺為圖 27，上方的直角三角形與梯形向下摺製後貼齊五面體底部如圖 28。



圖 27



圖 28



圖 29



圖 30

如圖 29，將下側的直角三角形與梯形上翻後貼齊五面體底部與側面，即可完成如圖 30 的斜三角柱。⁶在此我們先停一下，依照我們摺製的摺痕，討論一下其邊長的比例關係。

肆、Tetraxis®五面體摺製與邊長比例探討：

由於 A6 影印紙與 A4 影印紙的長寬比都是 $\sqrt{2}:1$ ，⁷根據我們摺製的過程，我們可得知圖 23 的長與寬分別被摺出八等分點與四等分點，因為 $\sqrt{2}:1 = 8:4\sqrt{2}$ ，又為了便於圖示，所以我們假設摺製零件紙張的長為 8，寬為 $4\sqrt{2}$ 。接著將相關的長度計算後，就可以得到如下圖 31 的所有邊長關係。由於我們最後成型時，黃色梯形與紅色三角形恰為整個零件兩側面而底面則是兩梯形所延伸產生重疊的綠色平行四邊形如圖 32，比對圖 14 計算出來的所有結果，發現其邊長恰為其兩倍關係，也就是其比例是相同的。至此我們說明了我們以影印紙 $\sqrt{2}:1$ 的比例，完成了 Tetraxis®五面體的零件摺製。

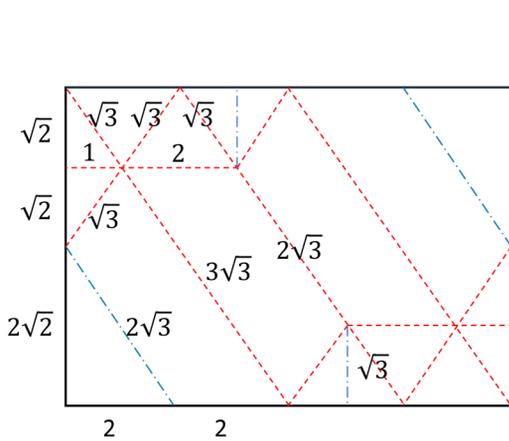


圖 31

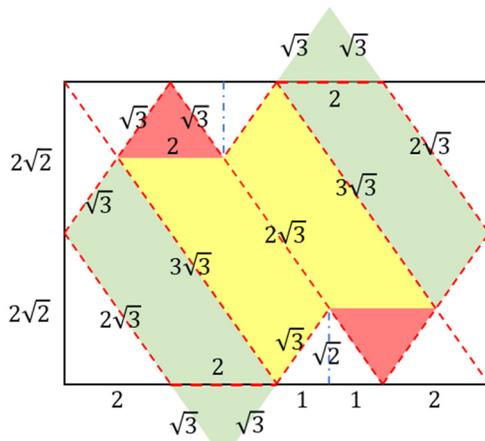


圖 32

伍、Tetraxis®組合方式說明與延伸作品：

在我們將十二個零件全數摺製完畢後，即可依照圖 12 的擺放方式，完成 Tetraxis®的整個作品組合。在此我們提供兩種組合的方式，提供各位讀者完成作品：

(一)以更小一級等比例的影印紙（如在此可以 A7 大小的影印紙摺製），依照底下網頁的摺製與連接方式，完成一個菱形十二面體後，再將十二個零件以平行四邊形為底部，直接黏貼於此菱形十二面體上：<https://folk.uib.no/nmioa/kalender/>（原設計者為 Nick Robinson）。

(二)若您有機會取得底下的材料，可用二十四個磁鐵與二十四塊墊圈（或以鐵製鈕扣代替），黏貼於每個零件內部的兩個位置（○代表磁鐵，△代表墊圈，亦可以互換位置），如下圖 33 所示，即可將扣合後依內部磁鐵與墊圈互相吸合成型如圖 34。

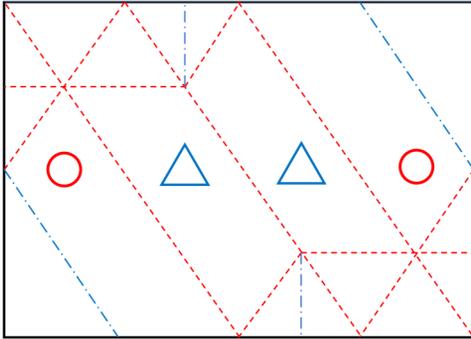


圖 33

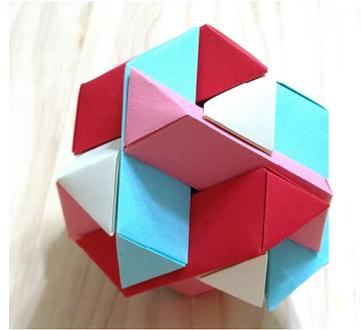


圖 34

若您是以上述的第二種方式組合完成，由於磁鐵與墊圈的吸附性，您還可以試著將每個五面體替換為平行的柱體，如底下的圖 35 與圖 36 就是將這些五面體分別替換為鉛筆與三角柱後所得的作品，是不是很酷呢？

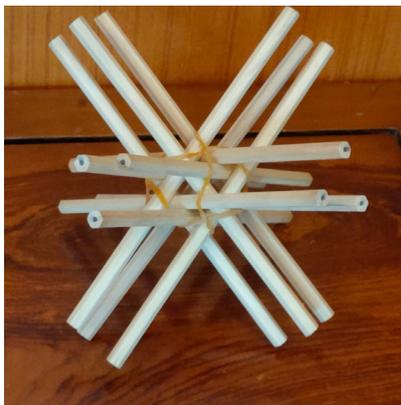


圖 35

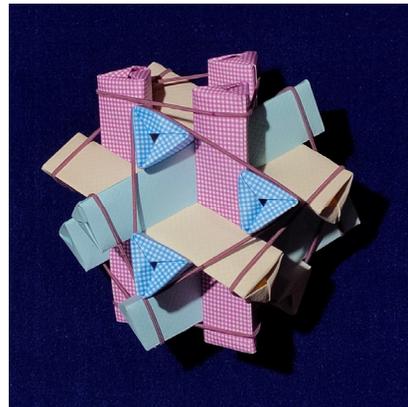


圖 36

注釋:

1. 可參考 Stewart Coffin 的網頁說明：<https://johnrausch.com/PuzzlingWorld/chap07.htm>
2. 詳見翰林出版社「摺紙學數學」活動 5「艾雪多面體」文章
3. 可參考網頁：<http://www.kosticks.com/tetraxis-toy.html>
4. 本文 Tetraxis®五面體摺法承蒙上海復旦大學常文武博士指導修正，特此致謝。
5. 為了摺製後的零件容易成型，建議用磅數 120-150P 的雲彩或丹迪紙摺製，並且以三色裁切各四張，即可完成如圖 12 的作品。
6. 圖 30 的三角形無法與梯形完全密合是正常狀態，可稍後待確定組合方式後再以白膠黏合，或先用小段的雙面膠固定，方便拆解後觀察比例或加磁鐵與鐵片組合亦可。
7. 請讀者不妨參閱底下文章說明：<https://pansci.asia/archives/172317>，或直接參考臉譜出版《藝數摺學》第十章 善用生活中的巧妙比例——從四角錐到填充八面體。
8. 以上兩種組合方式若還有問題，不妨可參考底下網頁的展示空間提示，完成最後作品的組裝：<https://www.geogebra.org/m/ph94e4sn>