

# 教育部 102 學年度中小學科學教育專案期末報告

計畫名稱：摺紙數學與動態幾何之資優生補充教材編輯與研發（二）

主持人：李政憲

E-mail：[jenshian@yahoo.com.tw](mailto:jenshian@yahoo.com.tw)

共同主持人：葉麗珠

執行單位：新北市林口國中

## 一、計畫執行摘要

1. 是否為延續性計畫？ 是 否

2. 執行重點項目：

- 環境科學教育推廣活動
- 科學課程教材、教法及評量之研究發展
- 科學資賦優異學生教育研究及輔導
- 鄉土性科學教材之研發及推廣
- 學生科學創意活動之辦理及題材研發

3. 辦理活動或研習會等名稱：

- (1) 新北市林口國中跨校「資優數學社群」暨「AMA 互動式幾何教材實作」工作坊
- (2) 「區分性教學的理論與實務」、「數學魔術」、「畢氏定理四千年」、「數學，真遊你的」、「數學科展與數學專題研究」、「數學教具」、「摺紙多角盒」、「藝數 fun 手玩」及「游藝數學」等外聘講座分享與諮詢
- (3) 新北市安溪國中「總統定理」、「時分針對調」及「費瑞和應用」分享
- (4) 新北市碧華國中「托勒密定理延伸討論」及「資優數學考題」分享
- (5) 宜蘭縣全縣教師研習「『十二年國教五堂課有效教學』—摺紙中學數學之『摺出無理數』」；中原大學師培中心「摺紙中學數學之『摺出無理數』」；建中學校中心、桃園縣武陵高中暨師大數學系「從摺紙數學談命題探索與實作評量」；新北市全縣教師研習、台北市敦化國中暨金門縣金寧國中小「摺其所好—從『摺出無理數』課程談摺紙中學數學」分享；台北市天母國中「巧拼連方塊」暨「翻滾吧！摺紙」課程、台中市大業國中「對稱摺紙」暨「翻滾吧！摺紙」課程實作。

4. 辦理活動或研習會對象：新北市林口國中、國教暨新北市數學輔導團暨台北市、新北市、桃園縣暨金門縣國中小教師

5. 參加活動或研習會人數：每次工作坊暨講座約 6 至 200 人，共舉辦六場研習，並對校內外教學、發表與分享逾十場。

6.參加執行計畫人數：7~10人（含計畫暨協同主持人、研究助理暨社群團隊）

7.辦理/執行成效：本計畫辦理跨校「資優數學社群」工作坊，並於新北市林口、安溪與碧華國中等校進行逾十五次的課程交流（圖1至圖4），陸續於師範大學、中原大學、建中學科中心及各縣市國中小進行課程分享與教學（圖5至圖10），其間更協助拍攝教育部活化教學列車影片「從動手開啟思考的學習—摺紙中學數學」（見備註1），也指導學生以延伸內容參與臺灣國際科展入選（圖11、圖12）；另外「摺其所好—摺出無理數」課程內容，已與出版社合作出版相關文宣手冊（圖13、圖14）。目前完成共十個教案，多數已於新北市、桃園縣、金門縣及台北市資優及普通班課程或營隊進行實作（圖15至圖20）。感謝今年度眾多教授的諮詢與肯定，藉由多方面的專家互動，使得所呈現的教材更多樣化（圖21至圖26）。相信摺紙應用於數學課程，藉由本計畫的規劃整理，可使更多資優班或有意延伸補充的老師便利與受益，學生多些不一樣的收穫與感動。

## 二、計畫目的

林福來等（1997）統整國內外有關數學教學的研究，認為「培養數學感」與「診斷教學」是培育數學師資的兩個主軸。其中數學感的目的著眼於數學思維的培養，要發展學生數學化及適當使用數學工具的能力，也就是建立對數學物件的感覺（Shoenfeld，1992）。而數學教學研究也顯示，欲藉由數學活動來發展教學思維，可能需要在素材和解題活動的難度上作適當的調整（鄭英豪，2000）。當今的數學教育，強調從做中學，培養學生帶的走的能力。人類天性好玩，教師如果能善用此種天性，把教學和遊戲加以結合，必能使學生更喜愛上學（饒見維，1996）。數學家已經證明尺規作圖和平面幾何問題，可以透過摺紙、剪紙來學習；而郭慶章、彭良禎老師也曾於師大辦理的「摺紙學數學」工作坊分享摺紙如何應用於生活與考題中，獲得在場數學老師的廣大迴響。可見摺紙運用於數學教學，是可行且重要的；謝怡倫（2009）曾作過研究，以動態幾何軟體（The Geometer's Sketchpad）方式進行教學的學生學習態度與成效頗彰；而李俊儀（2004）的研究更指出高數學成就水準學生，透

過動態幾何軟體的學習，除了提昇其學習意願與思考能力外，在學習成就測驗延後測的得分上也顯著較高。

本校於100年正式成立數理資優班，有鑑於八年級的數學課程，將有大量的幾何相關單元引入，為了使資優生在延伸學習的概念上，更加完整與有系統，特別要將摺紙與動態幾何課程結合，配合課程安排進度，來設計與發展此一補充教材。國中階段在Van Hiele的幾何思考層次應屬從第二階段的非型式歸納（Informal Deduction）進到第三階段的型式歸納（Formal Deduction），而其中最關鍵的時間點正是國二。因為國二上學期的乘法公式、根號引進到勾股定理，均已開始使用幾何表徵；而下學期的平面圖形、對稱圖形、尺規作圖、三角形全等與平行與四邊形等內容，更是學習幾何的重要章節，若學生能在上學期的幾何表徵就逐漸熟悉未來要學習的對稱、全等、平行與相似等概念，相信在下學期到九年級正式學習幾何相關概念時，將更容易上手，也有更充份的時間思考與研究；而透過摺紙活動與動態幾何軟體的學習與實作，正是作為這個階段幾何學習時，極為適合的工具。

本計畫於去年度實施時，得到評審教授與現場老師的高度肯定，學生於回饋時的反應也大多良好，因此於今年度除了要將去年度尚未執行完畢的教案進行施作調整外，也要另外再編寫原訂的另外四個教案並且施作。

而教材編輯與研發工作，包括教學簡報的完整製作，教學過程的流程說明，到實際教學的施作與學生回饋或評量。研發過程將由教師社群定期討論與試做後，修訂相關教學檔案，編撰成冊或製作數位光碟，並放置網路平台以供各校教師間流通使用。

### 三、研究方法

筆者在前兩年執行科教專案計畫《摺紙數學與資訊融入教學之課程研發、實作與推廣》製作了為數不少的教學檔案，然而執行時常會因為多數操作需具備基礎數學先備知識、中學數學學習易受進度暨考試壓力限制而受限，常常無法完整呈現預定教學內容。為了培養資優生主動學

習，深入探索研究的目的，去年度已配合教學進度，挑選部份已經完成的簡報，增加教學流程的說明與設計課間或課後練習與回饋，設計開發了《摺紙學乘法公式》、《摺紙學無理數》、《摺紙學勾股定理》、《摺出畢氏數》、《摺出黃金/白銀比》與《摺出有理數》等課程；今年度更挑選了去年度尚未完成的單元或課程，利用資優班學生課內加速或課外延伸學習的時間，進行完整的課程設計與討論（如下表一）。

合上課程		配合課程/進度	作業	上課地點
1	摺紙學有理數	B3C4 一元二次方程式 B5C1 相似形	學習單 I	2F 會議室
2	摺紙學無理數 I	B3C2 勾股定理	學習單 I	數學教室
3	摺紙學無理數 II	B3C2 勾股定理	學習單 II 發票摺紙作品	數學教室
4	摺紙學無理數 III	B3C2 勾股定理	學習單 III 根號 n 螺線作品	數學教室
5	摺出畢氏數	B3C2 勾股定理	延伸思考題	數學教室
6	畢氏三元數	B3C2 勾股定理	紀錄單	數學教室
7	摺出黃金/白銀比 I	B3C4 一元二次方程式	學習單	數學教室
8	GSP 初階課程 I	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	紀錄單	情境教室
9	GSP 初階課程 II	B4C3 三角形的基本性質	數位檔案	情境教室
10	摺紙學尺規作圖	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	學習單	電腦教室
外聘課程		配合課程/進度	作業	上課地點
11	GSP 進階課程 I	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	數位檔案	情境教室
12	GSP 進階課程 II	B4C3 三角形的基本性質	數位檔案	電腦教室
13	「美麗星境界」——名畫中的數學	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	學習單	理化實驗室
數學分組		配合課程/進度	作業	上課地點
14	摺出黃金/白銀比 II	B3C4 一元二次方程式	學習單	數學教室

15	對稱與正多邊形摺紙	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	紀錄單	數學教室
16	平行摺紙	B4C4 平行	學習單	數學教室
自然分組		配合課程/進度	作業	上課地點
17	簡易降落傘製作	B4C2 幾何圖形與尺規作圖	正多邊形降落傘作品	自然教室

表一：林口國中八年級數學專題課程進度一覽

摺紙課程的優點在於材料容易取得，學生可以從實作中學習，藉由比較前後步驟與結果的差異性，可以學習相關的數學課內外知識（如摺紙學乘法公式、摺紙學畢氏定理、摺紙學畢氏數、摺紙學習黃金/白銀比例等），進一步利用相關數學知識作應用（如摺紙學有理數、摺紙學無理數、摺紙學尺規作圖與對稱摺紙等），或是透過相關概念的延伸，完成富有設計感或藝術氣息的作品（如摺出貝殼螺線、一刀剪摺紙與平行摺紙等）。

而「工欲善其事，必先利其器」，為使學生在研究與學習時能有更方便討論的工具，進一步作其餘延伸的學習，特別選定了動態幾何軟體，作為教師教學呈現與學生作業研究的工具，並透過作業回饋或評量方式，讓學生從中學習預定達到之教學目標。

本年度主要選擇國中教材有直接或間接關聯性的另外四個單元，進行教材設計與實際施作，希望透過筆者的設計與分析，可使有意使用的教師方便上手，並能針對學生的學習反應進行了解，透過社群互動、專家意見以及學生回饋進行教材的修正。期待藉由此專案的實施，能給預定進行八年級資優生或主題式教學的老師們，提供一套完整而有系統的教材，並藉由網路、成果光碟或手冊的分享，也讓更多有意願使用的老師更加便利與受惠。

#### 四、研究成果

本計畫目前執行的進度如下表二，整體完成約 97%；申請的經費十六萬元，經費核銷 100%，與執行進度相去不大。

		摺紙學 有理數	畢氏三 元數	對稱 摺紙	摺紙與 尺規作圖	平行八角星 與翻轉摺紙
課前 討論	教材設計 教案製作	V	V	V	V	V
	專家諮詢 討論修正	V	V	V	V	V
課中 實施	課堂施作 攝影討論	V	V	V	V	V
	學習單 評量施作	V	V	V	V	V
課後 分享	課後回饋 分析	V	V	V	V	V
	社群分享 互動	V	V	V	V	

表二：102 學年度科教專案執行進度一覽

至於已完成施作與修正的教案，計有去年度未能進行施作的「摺紙學有理數」課程與今年度新增完成教案編寫並設計相關學習單的「畢氏三元數」、「對稱摺紙」與「摺紙與尺規作圖」課程（如附件一～三），並於本校資優班進行教學實作與學習單書寫；至於所剩「平行八角星與翻轉摺紙」課程（如附件四）則完成學習單設計、教案編寫與施作，部份課程並已與專家諮詢，將依施作情形進行社群討論與修正。

#### 五、討論及建議（含遭遇之困難與解決方法）

本計畫這兩年執行下來，曾經遭遇的困難與解決之道分別如下：

### 1. 教材信度效度不易評估：

- (1) 藉由專業社群暨專家諮詢提供意見，除了提高教材的正確性與適用性，更可增加其內容的深度與廣度。
- (2) 藉由學生施作後的回饋修正教案學習單，確認相關檔案的接受度與可行性。
- (3) 透過專題文章的發表，使得教材的可行性與能見度更高，如已發表的《「摺紙融入數學」促進學生思考的實驗心得》、《「摺紙中學數學」之紅包花花》、《「摺紙中學數學」之名片試金石》、《「摺紙中學數學」之社團指導篇》、《國中原型教材 C 冊》第一章部份內容等專文（詳見備註 2），都是透過紙本刊物或網路特刊及期刊，使得摺紙教學讓一般大眾與教學者更易上手的文章。

### 2. 多數操作需具備基礎數學先備知識：

- (1) 挑選難度適中或局部重要步驟講解：如在研習中分享的「摺紙五等份」教學簡報，即透過簡單的摺紙動作，討論了二元二次方程式，甚至可發展至三角函數的數學概念。
- (2) 利用適當的簡報發展其數學概念：如針對八年級學生進行的「摺紙學根式化簡」簡報，則是透過摺紙，學習不易了解的根式化簡概念。

### 3. 部份課程無法配合進度實施：

- (1) 選擇與課程相關性高，操作容易課程設計課程：如「摺紙學乘法公式」課程，在課內時間透過不一樣的方式學習數學概念，藉以提升學生的學習興趣，也能達到同樣的教學效果。
- (2) 切割實作與討論課程分別實施：如「摺出無理數」、「平行摺紙」等課程即針對本校普通班直接進行作品實作課程。
- (3) 利用輔導課或社團課外加課程實施：如「對稱摺紙」課程即利用九年級課後輔導課進行施作。
- (4) 透過學習單由學生回家操作，老師於課堂再行討論：如「摺紙學勾股定理」課程，可配合相關設計的學習單，搭配網路資源上傳，由學生於課前先行施作，以減少教師的授課時間，並讓學生先行思考後，造成課堂上能有更多的互動，充份達到預定達到的教學目標。

#### 4. 學生反應不如預期：

- (1) 與生活經驗作結合，引發學生討論，如「摺出黃金/白銀比」摺紙課程，透過生活中常見的名片紙與影印紙，與學生討論其長寬比，並進一步利用其比例完成摺紙多面體。
- (2) 於課堂加強討論互動，確認學生的了解程度與有意願深入研究的課題。並鼓勵有興趣深入研究同學進行發表，透過作品的發表可讓討論所得的結論更為具體，如「摺出有理數」的部份課程，在教學完畢後，進一步讓學生於本校國小科學營隊進行實作教學發表。
- (3) 結合故事暨生命教育課程實施加深印象，如「對稱摺紙」與課程一開始的引起動機課程設計，期待學生能對整個活動進行更有感覺，並能透過成果海報的發表，彙集各組學生的優良作品與個別創意。

#### 5. 部份學生無法同步操作與學習：

- (1) 搭配實物投影機、大型教具同步學習：如「摺出無理數」的大型教具製作搭配使用，可使老師更易講解說明，學生印象更為深刻。
- (2) 結合其他軟體課件對照學習：可結合 GSP 或 GGB 等動態幾何軟體讓學生對照或動手實作學習。
- (3) 透過小組合作學習模式進行：藉由討論與分組完成作業可增進學生互動，減輕學生完成指定作業的壓力。
- (4) 配合多元彈性開關，設計容易閱讀簡報：如「六角芒星互動式簡報」的設計，能因教學者的不同需求，作摺紙教學的前後對照與相關問題討論等，同一簡報適用於摺紙教學、數學討論與綜合比較。而「太陽花相框摺法」更針對中學與小學學生在同一簡報內設計不同難度題目，可依學生程度與教學進行作彈性呈現；
- (5) 發展摺紙模型步驟化操作：例如「貝殼螺線摺紙」與「摺紙一刀剪」即設計為將相關摺線印製於模型上，以便學生進行操作，並與學生討論相關摺線的繪製方式與數學原理（如圖 27、28）。

藉由上述遭遇困難的解決之道，除了讓自己更加肯定摺紙課程可以融入數學教學，更能讓學生從實作中得到啟發，從討論中發現結果，從發表中提昇成就，從作品中建立美感；自己也願意投入更多的時間與心力，致

力於發展與實作更多元的摺紙數學課程。

備註 1：【教育部活化教學列車】(第 32 部)《從動手開啟思考的學習 摺紙中學數學》：

<http://stv.moe.edu.tw/?cat=69381>

備註 2：摺紙數學發表相關文章：

1. 《「摺紙融入數學」促進學生思考的實驗心得》，99 年上學期《促進學生主動思考》工作坊成果
2. 《「摺紙中學數學」之紅包花花》，科學教育月刊 337 期（並轉載於 HPM 通訊十四卷第十一期第四版）
3. 《「摺紙中學數學」之名片試金石》，科學教育月刊 345 期
4. 《「摺紙中學數學」社群經營與專業成長》，99 學年度數學領域輔導團永續經營論文集—分享與傳承
5. 《摺紙學勾股定理》，新北市 100 年度國中數學學習領域新教案甄選第二名
6. 《「摺紙中學數學」教學心得——從「勾股定理」證明談起》，發表於 100 學年度「數學領域輔導團永續經營 II」研討會
7. 《摺出黃金/白銀比》教案，康軒出版社「財源滾滾包」教具包
8. 《「摺紙中學數學」之社團指導篇》，HPM 通訊十六卷第二、三期合刊第十版
9. 新北市教育電子報 117 期「談摺紙融入乘法公式教學」
10. 《摺出無理數》教案，康軒出版社「摺其所好」教具包
11. 教育部《國中數學原型教材》C 冊 1-1、1-3 部份內容
12. 《淺談實作評量——從摺紙中學習數學》，投稿科學教育月刊中（已獲刊登）
13. 《長方體被平面截出三角錐各面面積間的平方關係》，投稿科學教育月刊中（已獲刊登）



圖 1 資優社群期初會議



圖 2 碧華國中「區分性課程」講座



圖 3 安溪國中課程分享



圖 4 林口國中課程討論



圖 5 師大數學系課程分享



圖 6 建中學科中心課程分享



圖 7 宜蘭縣全縣教師課程分享



圖 8 金門縣全縣教師課程分享



圖 9 武陵高中課程分享



圖 10 敦化國中課程分享



圖 11 活化教學電台專訪



圖 12 國際科展摺紙作品入選



圖 13 「摺出勾股定理」於林口國中



圖 14 「摺出有理數」於林口國中



圖 15 「摺出無理數」於林中普通班



圖 16 「摺出無理數」於金寧國中



圖 17 「摺出無理數」於林中資優班



圖 18 「摺紙立方體」於林中資優班



圖 19 「摺紙立方體」於林中普通班



圖 20 「摺紙立方體」於天母國中營隊



圖 21 「黃金/白銀比」於林中資優班



圖 22 「對稱摺紙」於林中資優班



圖 23 「畢氏三元數」資優班教學



圖 24 「摺紙與尺規作圖」資優班教學



圖 25 「平行摺紙」於林中普通班



圖 26 「平行摺紙」於林中資優班



圖 27 「摺出有理數」國小營隊實作



圖 28 「翻轉摺紙」於林中資優班



圖 29 師大附中彭良禎老師摺紙諮詢



圖 30 興雅國中「魔術數學」課程諮詢



圖 31 游森棚教授資優數學課程諮詢



圖 32 台藝大李家祥教授摺紙盒實作



圖 33 許志農/陳明璋教授教材諮詢



圖 34 師大洪萬生教授「畢氏定理」講座

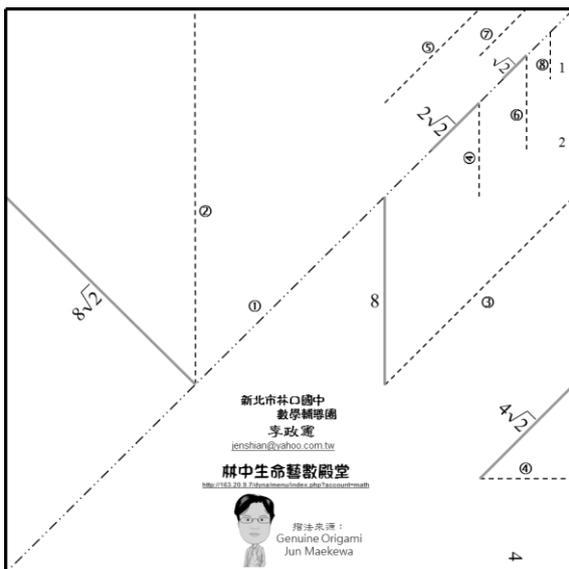


圖 35 「貝殼螺線」摺紙模型

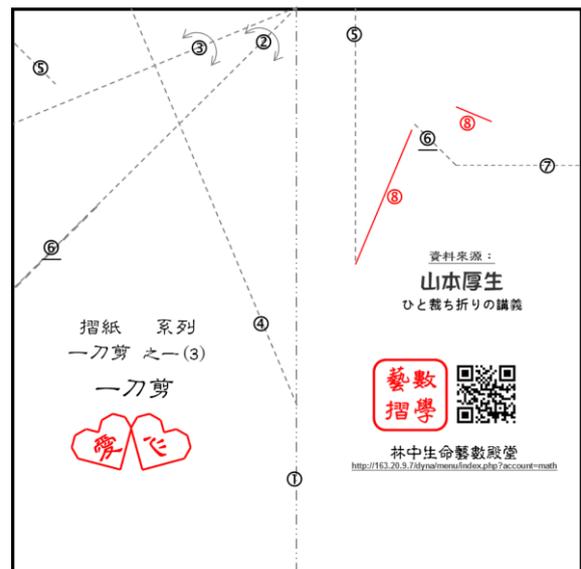


圖 36 「一刀剪愛心」摺紙模型