

教育部九十八學年度中小學科學教育專案期末報告大綱

計畫名稱：國中數學「概念啟蒙例」案例之設計與研究

主持人：台北市立興雅國中 林壽福老師

共同主持人：台北市立興雅國中 吳如皓老師

台北市立龍門國中 鄭勝鴻老師

參與人員：台北市立天母國中 柴筱筠老師

台北市立南門國中 曾明德老師

台北市立興雅國中 孫國文老師、林俊傑老師

台北市立興雅國中 張雨子老師

台北市立龍門國中 黃斌斌老師

台北縣立三和國中 洪于雅老師

執行單位：臺北市立興雅國中

一、計畫目的

提倡真實數學教育的荷蘭數學家及教育學者Freudenthal (1971)，主張在數學教學中，能將數學和真實世界相連結。因此將數學與學生生活情境連結是相當重要的。所以近幾年研究者呼應教改「生活化」、「趣味化」趨勢的熱潮，不斷設計數學步道題材和相關教案，內容豐富多樣，佈題均由淺入深、循序漸進引導，可以訓練學生觀察、分析、歸納、演繹和推理的能力，並探索得到一般化的規律，除了發展學生數學化能力之外，也能培養高階的解決問題能力。

林福來等 (1997) 統整國內外有關數學教學的研究，認為「培養數學感」與「診斷教學」是培育數學師資的兩個主軸。從這兩個教學主軸便延伸出許多重要的教學概念，例如概念心像與概念定義、概念發展層次、概念的錯誤類型、數學概念的啟蒙例、診斷與認知衝突、引導發現式教學、探究式教學等 (林福來等，1997、1998)。其中，數學概念的啟蒙例更是每堂概念教學活動課必然含有的成分，而數學教學研究也顯示，欲藉由數學活動來發展教學思維，可能需要在素材和解題活動的難度上作適當的調整 (鄭英豪，2000)。

根據Worthen (1968) 的實驗證實，採用「例子—規則」取向的教學較能鞏固學生所學知識，產生學習遷移的效果，同時對於解題策略的習得成效也比較好。這種教學方式是以一序列可以操作的例子作為新概念的學習素材，引導學生觀察這些例子中的內嵌抽象概念成分，進一步能將其共同特徵抽象化形成概念。這樣的例子可能很多，但基於教學考量，選擇最具代表性的例子作為概念啟蒙的例子，這個例子就稱為概念的啟蒙例 (generic example; Tall, 1986)。

概念啟蒙例並非只是引起動機或情境的考量而已，鄭英豪認為，一個好的啟蒙例至少要具備四種屬性：（一）樂學性——能引發學生學習動機的例子，例如荷蘭真實數學教育所主張從日常生活現象裡取材，讓學生感覺數學與生活息息相關，自然能引起主動探究和學習興趣；（二）易學性——為了銜接學生的認知層次，啟蒙活動要能接續學生的舊經驗，同時挑戰難度要適當；（三）代表性——提供的情境要能真正代表欲學的數學概念；（四）發展性——不是為了某個特定知識的孤立素材，是要具有「帶得走」和「折回參照」的概念屬性。

因此一個好的啟蒙例，不但可以讓數學與真實生活相連結，也可以幫助學生學習該啟蒙例所代表的概念，並且發展相關概念。所以教學中引入一個好的啟蒙例是相當重要的。研究者已經進行了一年的國中數學概念啟蒙例題材之研發與實作，並且完成了以下三項的工作：

1. 已完成七、八年級部分單元主題之「概念啟蒙例」。
2. 編制《國中數學科「概念啟蒙例」相關參考書籍之整理》手冊，並完成各書籍內容簡介和分類整理工作。
3. 探討教學成效，提出「概念啟蒙例」設計之省思與改進建議，進一步改良教材。

以上工作雖然已經完成，但為了更加豐富啟蒙例內容，這一年裡研究團隊將持續努力，除了補足七、八年級單元主題之「概念啟蒙例」之外，更增加九年級單元主題之「概念啟蒙例」設計，也增添《國中數學科「概念啟蒙例」相關參考書籍之整理》了手冊內容。另外，也以第一年、第二年所研發的概念啟蒙例持續進行教學實驗，並做質化分析，來確認所研發的概念啟蒙例與四種屬性——樂學性、易學性、代表性、發展性——的關連。

因此本計畫第二年有下列目的：

1. 完成九年級單元主題之「概念啟蒙例」，並豐富七、八年級單元主題之「概念啟蒙例」。
2. 增添《國中數學科「概念啟蒙例」相關參考書籍之整理》手冊內容。
3. 設計問卷來檢視啟蒙例的四種屬性，並對所研發的啟蒙例進行教學實驗與研究分析。

二、研究方法

本研究是一個科學教育教材研發與實驗分析活動。我們汲取國內外優良的科普讀物、文本與教科書精華，加以分門別類，例如遊戲、魔術、教法、應用、數學史等，從中汲取設計靈感，配合研究者實作與教學經驗分享，再按教科書主題名稱和輔以分年細目內容，研發編擬數學科「概念啟蒙例」。實驗分析部分，我們針對所設計的啟蒙例進行實驗教學，再透過質化分析來修正案例。

實施的步驟為：

1. 蒐集並閱讀國內外科普讀物、文本與教科書，豐富視野。

2. 研究團隊成員按任教年級與個人專長興趣，作分工、編組，並認養單元主題、閱讀資料及書籍簡介文稿之撰寫。
3. 邀請對「概念啟蒙例」有深入研究之專家學者，座談交流與經驗分享。
4. 選定教學對象與教學主題，進行教學觀察與討論、回饋與反思。
5. 延續第一年「概念啟蒙例」設計工作，除繼續豐富教學案例外，也同時設計問卷來檢視是否符合啟蒙例的四種屬性。
6. 研究資料之分析與詮釋。
7. 撰寫研究報告。

研究者在決定提出實驗計畫時，便跟本校校長報告，尋求支持與行政支援。研究進行的過程中，研究團隊成員每月至少進行3~4次專業對話與設計討論，並選定單元主題作教學實驗與反思討論，讓所設計案例更加周延完備。

三、研究成果

(一) 啟蒙例設計完稿

◎ 總整理

| | 魔術名稱 | 數學概念 | 學習單特色 |
|---|--------|----------|--|
| 1 | 影格預言術 | 一元一次式的運算 | 扣合著運算的情境，在變更所操弄的數字時，代數式運算後結果的不變性仍不為所動，但每一次結果都可以用不同的數字出現，可以在此操作中體會數學對變量與不變量的掌控。 |
| 2 | 長方形的秘密 | 奇偶數性質 | 在物件操作的過程中，訓練學生觀察到數量變化的奇偶性，在有趣的情境中發現偶數加偶數為偶數、偶數加奇數為奇數的實際作用。在學習單裡更引導學從特殊情境推廣到一般情境裡發現奇偶，讓學生能設計自己的題目，甚至把撲克牌的正反兩面換成骰子的六面也能成功！ |
| 3 | 雙重默契 | 機率 | 這是一個靠高機率來完成的魔術。學習單一開始就在由小數字到大數字的實驗中讓學生感受的機率的逐步增加，在練習運算的過程體驗操控機率的美好感覺。而後學習單進而突破思考限制，讓學生去設計讓它 100% 成功的方法，或練習舉反例讓它 100% 失敗。 |
| 4 | 牌點預言術 | 加法的表徵與轉換 | 用排列的規律來預言總和的魔術，在學習單中化簡為繁，把唯一的設定排列翻新到與原本不同的數十種排列方式，然後再化繁為簡成一句簡潔的的 $X_i \leq i$ 道盡一切設計。讓學生感受到數學的優雅與神奇。 |

| | | | |
|----|----------|----------|--|
| 5 | 背後觀測術 | 機率 | 這是一個靠高機率來完成的魔術。學習單裡列舉出不同的程序讓學生計算，並學會如何掌握增加的條件讓機率逐步提升，在練習運算的過程體驗操控機率的美好感覺。當機率提升至極大時，也讓學生練習如何從失敗機率來反推成功機率。 |
| 6 | 減法預言術 | 減法的表徵與轉換 | 這是利用 $(X+Y)+(X-Y)$ 來表演的魔術，學習單中設計一些情境讓學生練習把兩個以上的物件用相同的未知數表示，再以運算去簡化。 |
| 7 | 任你洗牌預言術 | 互質與最小公倍數 | 從魔術的強制性中體驗到：互質的兩數加起來不一定是質數，但加起來是質數的兩數必定互質。在學習單中便能操弄各式各樣的質數組合，並且用互質兩數的最小公倍數為兩數之積變化出各樣的魔術。 |
| 8 | 看透你的牌 | 三元一次式的運算 | 利用數字大小範圍的限制與代數式運算，使一行方程式即可解三元一次方程式。在學習單中讓學生設計出不同的代數式運算，在學習解不定方程式的過程中，創造美妙的例子。 |
| 9 | 不可思議的推測 | 座標對應 | 利用座標設計出函數對應，找出觀眾的牌。在學習單裡製造出不同的排列與不同的對應，用數學的推廣讓魔術不斷進化。而學生在這些設計中，也能體驗到什麼是好的函數對應。 |
| 10 | 7-11 總動員 | 二元一次方程式 | 絕對的量不斷改變，而相對的量永遠不變。學習單從一些數據實驗開始，然後歸納出結論後，再一次從列二元一次式著手，找到不變量的切確證明。然後再逐步一般化到 N 張牌。從發現規律使用規律到創造規律完整的經歷的一次。 |
| 11 | 邊翻邊數 | 一元一次式的運算 | 這個魔術可以很不可思議的拿出觀眾所選的牌。先假設一個未知數，其實它最後會被抵消，而抵銷後所剩的已知被表演者掌握。但這巧立的假設讓解題思維可以流暢很多。在學習單中，有一些問題讓學生練習找出關鍵來處理問題。 |
| 12 | X+1 預言術 | 一元一次式的運算 | 使用極簡單的一元一次式的運算，產生極大的魔術效果。在學習單中，把一元一次式的長數項隨意更動，讓魔術更顯變化，並拋問題讓學生思維一次項係數的改變是否能設計魔術。 |
| 13 | 買保險 | 負負得正 | 利用負負得正完成的四重預言數，在學習單裡，推廣到奇數個負號相乘結果為負、偶數個負號相乘結果為正。 |

| | | | |
|----|-----|---------|--|
| 14 | 黑與紅 | 數學歸納法 | 在設定好的排列之下，讓洗過的牌依然徹底被掌握。在學習單中，提供了三種證明方式，前兩種極其複雜，但第三種使用了數學歸納法，流暢地證明了這個神奇魔術的必然成立。 |
| 15 | 9張牌 | 9的倍數判別法 | 利用九的倍數判別法完成的魔術。在學習單裡，把此性質推廣到除以九的餘數。在之後還找出更多製造9的倍數的方法，然後利用倍數判別法在各類情境中完成魔術。 |

◎教學實驗的過程中，我們觀察到這些啟蒙例學習單幫助學生學習的幾個層面，列舉如下：

1. 從蒐集事實與例子的過程中獲得經驗
2. 能發現不懂的細節並具體提問
3. 能主動找尋解題關鍵或說出關鍵字
4. 在可能與假設間以實驗與操作的手段尋求判定
5. 增加從數據中歸納結論或臆測結論的能力
6. 增加在看到通則之後去完成證明的意願與能力
7. 能把問題情境符號化並運用數學式子表達物件之間的關係
8. 在情境與數學對應中增強比較與辨別能力（區別出相似性與相異性）
9. 能提出某些不同於老師的看法
10. 能以啟蒙例中成功經驗為基礎進展後續的學習

（二）啟蒙例屬性整理

| | 魔術名稱 | 數學概念 | 屬性 | | | |
|---|--------|----------|----|---|---|---|
| | | | 樂 | 易 | 代 | 延 |
| 1 | 影格預言術 | 一元一次式的運算 | ◎ | | | ◎ |
| 2 | 長方形的秘密 | 奇偶數性質 | ◎ | ◎ | ◎ | ◎ |
| 3 | 雙重默契 | 機率 | ◎ | | | |
| 4 | 牌點預言術 | 加法的表徵與轉換 | ◎ | ◎ | | |
| 5 | 背後觀測術 | 機率 | ◎ | ◎ | ◎ | ◎ |
| 6 | 減法預言術 | 減法的表徵與轉換 | ◎ | ◎ | | |

| | | | | | | |
|----|----------|----------|---|---|---|---|
| 7 | 任你洗牌預言術 | 互質與最小公倍數 | ◎ | ◎ | | ◎ |
| 8 | 看透你的牌 | 多項式運算 | ◎ | | | ◎ |
| 9 | 不可思議的推測 | 座標對應 | ◎ | | | ◎ |
| 10 | 7-11 總動員 | 二元一次方程式 | ◎ | | | ◎ |
| 11 | 邊翻邊數 | 一元一次式的運算 | ◎ | ◎ | | ◎ |
| 12 | X+1 預言術 | 一元一次式的運算 | ◎ | ◎ | | ◎ |
| 13 | 買保險 | 負負得正 | ◎ | ◎ | | ◎ |
| 14 | 黑與紅 | 數學歸納法 | ◎ | | | |
| 15 | 九張牌 | 9 的倍數判別法 | ◎ | ◎ | ◎ | ◎ |

截至目前為止，已經完成進度95%。

四、討論與建議

研究伙伴們執行本計畫均全力以赴，本年度共設計完成 15 個數學魔術啟蒙例，成果豐富。魔術很令學生著迷，但最重要的還是要提供學生數學思維與方法的訓練，經歷觀察、找尋、發現、應用和創造 pattern 的過程，以及促進學生主動思考和發展關係性理解的能力。本研究所提供的學習單，即是朝這樣的功能邁進，而從教學實驗和營隊教學成果顯示，也已獲得了初步的證實。

至於教學實驗的部分，研究者已經完成兩個案例的質化分析，其中第一年、第二年的案例各一個。本次實驗發現所研發的兩個啟蒙例，均具有樂學性、易學性、代表性與發展性。然而還需要較大的樣本來進行實驗教學，來再次確認這些啟蒙例是否具有樂學性、易學性、代表性與發展性。