

計畫名稱：國中數學「概念啟蒙例」題材之研發與實作
主持人：台北市立興雅國中 林壽福老師
共同主持人：台北市立興雅國中 吳如皓老師
 台北市立龍門國中 鄭勝鴻老師
參與人員：台北市立龍門國中 黃斌斌老師、孫震驥老師
 台北市立南門國中 曾明德老師
 台北市立興雅國中 孫國文老師
 台東縣立綠島國中 鄭家禎老師
 台北市立瑠公國中 莊國彰老師
 台北市立興雅國中 洪于雅老師
執行單位：臺北市立興雅國中

一、計畫目的

林福來等（1997）統整國內外有關數學教學的研究，認為「培養數學感」與「診斷教學」是培育數學師資的兩個主軸。從這兩個教學主軸便延伸出許多重要的教學概念，例如概念心像與概念定義、概念發展層次、概念的錯誤類型、數學概念的啟蒙例、診斷與認知衝突、引導發現式教學、探究式教學等（林福來等，1997、1998）。其中，數學概念的啟蒙例更是每堂概念教學活動課必然含有的成分，而數學教學研究也顯示，欲藉由數學活動來發展教學思維，可能需要在素材和解題活動的難度上作適當的調整（鄭英豪，2000）。

根據Worthen（1968）的實驗證實，採用「例子—規則」取向的教學較能鞏固學生所學知識，產生學習遷移的效果，同時對於解題策略的習得成效也比較好。這種教學方式是以一序列可以操作的例子作為新概念的學習素材，引導學生觀察這些例子中的內嵌抽象概念成分，進一步能將其共同特徵抽象化形成概念。這樣的例子可能很多，但基於教學考量，選擇最具代表性的例子作為概念啟蒙的例子，這個例子就稱為概念的啟蒙例（generic example；Tall，1986）。

概念啟蒙例並非只是引起動機或情境的考量而已，鄭英豪認為，一個好的啟蒙例至少要具備四種屬性：（一）樂學性——能引發學生學習動機的例子，例如荷蘭真實數學教育所主張從日常生活現象裡取材，讓學生感覺數學與生活息息相關，自然能引起主動探究和學習興趣；（二）易學性——為了銜接學生的認知層次，啟蒙活動要能接續學生的舊經驗，同時挑戰難度要適當；（三）代表性——提供的情境要能真正代表欲學的數學概念；（四）發展性——不是為了某個特定知識的孤立素材，是要具有「帶得走」和「折回參照」的概念屬性。

台灣的學生近幾年來，在國際評量成就測驗的表現上均相當亮眼，2003年

TIMSS 及 2006 年 PISA 分別獲得數學能力第四名和第一名成績。但與前者測驗有關的研究調查顯示，對於是否喜歡數學的看法，台灣學生有偏向負面的趨勢。台灣學生對於數學學習相當缺乏自信心——高自信人數百分比（26%）遠小於國際平均（40%），排名倒數第二；低自信人數百分比（44%）卻遠高於國際平均（22%），排名高居第二。台灣學生對於數學的評價與國際平均的差異甚大，其高、中、低評價分別為 25%、50%、24% 和 55%、35%、10%。顯然成績好並不與「喜歡學數學」成正比。（曹博盛，2005）這是很值得我們深思的警訊！

究其原因，雖然目前教科書多數非常重視選用生活情境來進行數學概念的引入，但可能受限於篇幅和體例的關係，還留有很大的進步空間。它們仍然以公式的推導與套用為主軸，接著透過反覆強化不同類型例題的練習，來達到所謂「精熟學習」的目的。因為有考試和進度的壓力，老師大多使用「題海戰術」來加強學生實戰的操練，造成了多數學生對於數學學習的刻板印象——數學＝「考試」＋「解題」——，因此，如果學生沒有真心投入，他們會越來越覺得數學學習的『苦』與『煩』，提不起學習興致，甚且會對數學學習產生極端的厭惡感。我們認為改善之道為，多開發具備易學性、樂學性、代表性和發展性的教學啟蒙例，這是一條可行的有效的途徑。鄭英豪指出，啟蒙例為學生構築了一個學習抽象數學知識的具體媒介，讓學生能順利建立概念心物（mental object），以作為學習新概念的參照對象；也是引動瞭解、形成直觀的主要依據；它同時扮演引導教師在其教學脈絡中反思、探究教學問題並持續發展教學思維的重要角色（鄭英豪，2000）。若再輔以優良的教學方法，將可以改變學生對於數學課的看法，以及提升數學教師受歡迎的程度。

總之，生活情境與數學之間的關係，並非只是單向的應用數學解決生活問題，恰當的選用可以促進學生思維的發展，引動其學習興趣與動機；數學學習成就不應只看重成績的表現，至少還包括數學學習信心、態度與價值觀的建立等。因此設計切合教學目標與評量目標的生活情境應用活動，會讓學生覺得數學很有用並能維持其學習動機，同時提高成績；而引導學生嘗試應用數學來解決生活問題或察覺數學的存在，會讓學生覺得數學很有威力具有學習價值，同時也是立足社會的一種利器。

本計畫有下列目的：

- （一）收集國內外優良科普讀物與教科書，建立每本書籍之身份與簡介資料，分類建檔，提供編擬「概念啟蒙例」參考之用。
- （二）透過生活情境、遊戲、魔術、故事、數學史等數學素材之收集，配合教師們的實作經驗分享，編擬各主題單元之「概念啟蒙例」。
- （三）「概念啟蒙例」會結合分年細目與重要數學學習內容，讓教師們能放心使用，並適度解除其對進度與成績的壓力。
- （四）藉由分析基測中具有生活情境的試題與學習國際評量 PISA 命題內容，作為設計「概念啟蒙例」之參照，精緻教師教學的視野。

二、執行單位對計畫支持(援)情形與參與計畫人員

本學年校長、教務處，以及總務處都給予我們充分的支援和協助。我們多數利用週六早上開研討會，需要借用教師休息室、導師辦公室，以及電腦設備，行政及保全人員均能給予充分配合與支援。另外，設備組長幫忙處理預算核銷手續，呈報簽呈和處理公文，相當盡責，對我們研究案的執行助益很大。

我們的計畫全體成員積極參與討論，互相腦力激盪，經常能迸出智慧的火花，尤其在挑選的啟蒙例進入教案設計，以及實驗教學階段時，伙伴們都能充分發揮所長，貢獻個人才識，提供相當寶貴的見解與建議，所以本研究案進行順暢。

三、研究方法

本研究是一個科學教育教材研發與實作活動。我們汲取國內外優良的科普讀物、文本與教科書精華，按主題分類研發「概念啟蒙例」。實作部分，我們挑選「數列魔法」啟蒙例設計成完整教案，進行實驗教學，再透過反思來修正案例。很榮幸！這篇主題教案榮獲教育部主辦「97年度中等學校數學科典範教學」國中數學組第一名。

預定實施的步驟為：

1. 邀請對於本研究計畫、目的有共識與願景的教師，共同組成研究團隊。
2. 蒐集並閱讀國內外科普讀物、文本與教科書，豐富視野。
3. 進行文獻內容之研析，討論與確認文獻資料內容之分類標準，並加以分門別類，建立初步之資料庫。
4. 研究團隊成員按任教年級與個人專長興趣，作分工、編組，並認養單元主題、閱讀資料及書籍簡介文稿之撰寫。
5. 研究團隊成員閱讀有關「概念啟蒙例」之研究資料，瞭解其真正意涵。
6. 邀請對「概念啟蒙例」有深入研究之專家學者，座談交流與經驗分享。
7. 選定教學錄影對象與教學主題，進行教學觀察與討論、回饋與反思。
8. 完成第一年「概念啟蒙例」設計工作，涵蓋：七上、七下、八上、八下、九上、九下等課程主題範圍，共十個案例。
9. 研究資料之分析與詮釋。
10. 撰寫研究報告。

研究者在決定提出實驗計畫時，便跟本校校長報告、徵求同意，並尋求行政支援和經費協助。研究進行的過程中，為求詳實，研究團隊成員平均每月進行兩次專業對話與設計討論，未來計畫將作每單元主題之教學錄影與反思討論，讓設計更為完備，對教學之助益提升至最大。

四、目前完成程度

(一) 已完成啟蒙例

1. 數字神跡. (代表數符號引入) 【魔術】 (七上)
2. 神秘水晶球 (9的倍數應用原理) 【魔術】 (七上)
3. 射門較佳位置 (圓周角概念) 【生活應用】 (九下)
4. 畫蛇添足的主任 (最小公倍數應用) 【生活應用】 (七上)
5. 直角三角形洩罪行 (三角形性質) 【生活應用】 (八下)
6. 完美13點 (多項式加減法) 【魔術】 (八上)
7. 洞識牌點 (二元一次方程式) 【魔術】 (七下)
8. 神奇占卜術 (一元一次方程式) 【魔術】 (七上)
9. 請問芳「姓」? (直角座標) 【魔術】 (七下)
10. 數列魔法 (等差數列) 【魔術】 【遊戲】 (八下)

(二) 完整教案

1. 數列魔法 【魔術】 【遊戲】

截至目前為止，已完成整體進度 100%。

(三) 進行中啟蒙例設計初稿 (第二年計畫完成)

1. 因數與倍數：爬樓梯競賽 (因數、倍數判別) 【遊戲】；找數字間諜、九宮蓋數、鼓勵、簡單的把 MM 術、牌歸原主、瞭若指掌 (舉一反三、舉一反三)、蓋住一張牌 (9 的倍數判別法) 【魔術】。
2. 一元一次不等式：心想事成 (妙用不等式) 【魔術】。
3. 相似形：神奇黑桃 A (放大縮小術、紙張的學問) 【魔術】。
4. 多項式加減法 (或代數式運算)：神奇估牌術 (我懂你 (妳) 的心)、明察秋毫、時鐘預言 【魔術】；巧問電話號碼 【遊戲】。
5. 等量公理：神奇分牌術 (暗夜分牌、等量公理妙處多) 【魔術】。
6. 一元一次方程：賽過天平 (手秤撲克牌) 【魔術】。
7. 找 pattern：信封預言 (乘積早知道、神奇數字妙體驗)、物以類聚 【魔術】。
8. 鏡反數：數卡接龍 (從已知推未知) 【遊戲】。
9. 逼近法：直指核心 (21 張)、猜中你 (妳) 的生肖 (二分逼近法) 【魔術】。
10. 四則運算：唯一的工作天 (挑戰你 (妳) 的智商)、畫中有數 (神童的隱喻、湊 100) 【遊戲】。

11. 分類與推理：巧猜藏物【魔術】。
12. 奇偶數原理：消失的牌、摸牌術【魔術】。
13. 函數：指示變換【魔術】。
14. 窮舉法：三選一【魔術】。
15. 負負得正：命運交會點（翻倒牌兩次）【魔術】。
16. 線對稱：捉摸不定的方向【魔術】。

五、預期成果

（一）本年度完成之工作項目

◎研發

1. 設計完成部分七、八、九年級單元主題之「概念啟蒙例」。（第一年計畫）
2. 編制《國中數學科「概念啟蒙例」相關參考書籍之整理》手冊，共計100本，並完成各書籍內容簡介和分類整理工作。
3. 探討教學成效，提出「概念啟蒙例」設計之省思與改進建議，進一步改良教材。

◎實作

1. 完成「數列魔法」單元主題「概念啟蒙例」之教學重點錄影。
2. 針對影帶及案例設計內容，進行教學觀察與反思討論。
3. 完成「概念啟蒙例」之修改與回饋。

◎推廣

1. 主持人與協同主持人本年度到過十多各縣市擔任研習講座，分享設計啟蒙例與數學魔術之教學點子，廣受老師們歡迎，叫好又叫座！
2. 擔任教育部資深輔導員培育課程講師，分享設計「數列魔法」主題經驗給全國25縣市輔導員，廣受好評！

（二）具體成果及效益

1. 藉由「概念啟蒙例」之研發，預期能協助數學教師作有效的數學教學，並激發學生強烈之學習動機，締造一個「數學有用、有趣」的學習環境。
2. 能有效提升學生們的數學能力和解決問題能力，陶冶其正向之數學態度，激發學習潛能。
3. 數學的意義在於應用，讓學生領會到學習數學的價值，無疑對於推動數學的學習會起很大的作用。預期這些教材能幫助學生，樹立起正確的數學學習的價值觀。
4. 輔助解決目前教科書舉例，其樂學性和發展性兩個屬性不足的問題，活化教學現場。

5. 透過一系列的研究教師專業對話討論活動，能建立數學教師專業社群，活絡校內領域教學研討會之運作功能。
6. 有助豐富教師們的教學內涵，提昇其教學品質，讓教學更多元化、趣味化，並提升參與研究教師的教學活動設計與教學專業能力。
7. 透過教師同儕的分享機制能激發教師反思課堂教學與教師專業需求。
8. 透過案例的研發與提供激發教師於教學實務現場進行教學實驗，建構以培養「數學素養」為目標的教與學。

六、檢 討

啟蒙例不是很容易開發，因為要創造或找尋完全符合四個屬性的例子，其挑戰難度很高。主持人原先收集的文獻資料是經過長期（將近10年）累積的結果，也因為平時教學時經常在使用，同時覺得這些資料內容很豐富、多元，並且對教學活動設計幫助很大，因而升起了想加以分享、推廣的念頭，期待讓更多老師和學生受益。主持人原先規劃讓每位參與成員，能比照已有資料，個別再行建立新的資料庫與案例，然後加以彙整，如此內容將更行豐富、多元和紮實。不過，一起研究的伙伴們多數是第一次接觸這些資料，欠缺熟悉度與詮釋經驗，所以要加以轉化、複製並不容易；另外主持人原有這些資料已經不少，部分伙伴在教學和處理個人事物之餘，留下的時間其實不多，要他們傾全力付出則有實際的困難。而且要再建立新的資料庫，也需要花費比較多時間，短時間不易達成，加上我們分佈在各校，每個月約1~2次的聚會，能討論的內容也實在有限。

因此，我們決定先集中火力將原有資料作一些消化解讀，讓成員對文獻資料比較能全面掌握和有感覺後，期盼進一步激盪出一些新的想法自然會水到渠成。至於新資料庫與案例的建立，則留待在未來接續的兩年計畫，再陸續增添，這樣伙伴們的壓力也會比較小。

我們這次整理完成的啟蒙例，每個案例多添加了【過程寫真】和【破解版寫真】兩段落，透過模擬實際情境的照片檔作說明，期待閱讀的老師們更容易掌握相關數學魔術的內容精髓，進一步落實在個人的課堂教學上，讓更多學童們受益，以達到我們原先所設定作教育推廣的初衷。