教育部九十一年度中小學科學計畫專案

多元學習對中學生數學能力提升之研究

台北市立建國高級中學編印

中華民國九十一年十二月

教育部九十一年度中小學科學計畫專案

多元學習對中學生數學能力提升之研究

計畫主持人：游森棚

計畫共同主持人：建國中學數學科全體教師

專案助理：黃郁惠 、簡晏妤

台北市立建國高級中學

目錄

教育部九十一年度中小學科學計畫專案
多元學習對中學生數學能力提升之研究

壹、計劃緣由

基礎科學實為科學發展的源頭，而數學為科學之母，數學基礎能力為各科學所重視已是不爭的事實。數學能力為科學能力的指標、數學天賦需要及早發掘並培養，都是熟知的理論。現階段中學數學教材大幅簡化與授課時數減少，對數學具有潛力及特別有興趣的學生，若沒有其它適當的輔導管道，很容易淹沒在制式的義務教育中。另一方面，在單一面向和制式化的學習之下，在日後教材的銜接上或學習上，極有可能產生一些困境。

建國中學於八十九，九十年連續兩年承辦教育部科學教育專案「通訊解題培養中學生數學能力之研究(一)(二)」徵答的學生遍及全國，許多當時參與徵答的中學生均已慢慢展露頭角。例如連續參與此專案的黃紹倫於今年也榮穫北市能力競賽數學一等獎。在可期待的未來這一群學生在數學上必將有極優異的表現。這樣的成果不僅僅展現了當初即預期之成效，也說明了透過公開徵答這樣不同於學校制式學習的另一種多元學習方式對於數理性向較強的學生的幫助和開發。

多元學習和主動學習為現今教育改革的潮流。在多元學習有助於提昇數學能力的假設之下，提出此計畫。期能在此計畫之下，先經由通訊解題提早發掘對數學有興趣和天賦的中學生，並藉由讀書會，數學步道加強輔導答題優良的學生。期能儘早點燃學生對於數學學習、研究的熱誠。以達到提昇中學生的數學能力、激發對數學研究的興趣，發掘儲備數學乃至基礎科學人才的多重目標。

貳、研究方法：

計畫之執行按以下之方式：

一、研究現有中學課程，擬出主要概念，由研究人員設計適當題目，逐月發布在台師大科教月刊及建中網站上徵答，限期內寄回徵答題答案，比照奧林匹克七分制給分法逐題批改，並將優良答題名單與方法於次二月刊登在台師大科教月刊及建中網站上。

二、挑選前兩期參與公開徵答題之學生編為實驗組(A)，未參與者編為實驗組(B)各約 30 人。並作前測。

三、對實驗組(A)同學進行多元學習之教學。包括演講，讀書會，小報告，獨立研究等。

四、設計評鑑後測並分析資料。

參、進行步驟：

一、收集並研究數學競賽文獻，

(一)、收集研究近年來區域性中學數學競賽試題分析研究報告等資料。

(二)、收集研究近年來全國性中學數學競賽試題分析研究報告等資料。

(三)、收集研究世界主要國家中學數學競賽試題。

(四)、研究 The Mathematical Gazetle , The Mathematical Monthly, School Science and Mathematics, Journal of Recreational Mathematics 等數學雜誌中之徵答題。

(五)、析出中學數學所應具備之重要數學概念及技巧，以為下一階段研擬設計數學挑戰徵試答題之參考。

二、研擬設計數學挑戰徵試答題約四十題；研究分析學生答題資料

(一)、設計徵答題實驗要點並函電台北區各公私立中學及設有數

理資優班學校數學科教師有關本計劃實施要點。

(二)、分類設計適合國內中學(包含國中及高中生)數學之挑戰徵答題(包括測試修訂)。

(三)、按月於台師大科學教育月刊或建中電腦網路發布徵答題。

(四)、批閱學生答題資料，影印寄回較優答題之原答者。

(五)、研究回答公開徵答題或相關問題。

(六)、研究學生答題之特色或缺失。逐題解析，在台師大科學教育月刊或建中電腦網路發布優良答題名單及參考解答。

三、多元學習

(一)、對答題表現優良現就讀學生進行追蹤。挑選參與公開徵答題之學生編為實驗組(A)，及未參與者編為實驗組(B)各約 30 人。

(二)、選定中學生能消化之課外讀物指定研讀，安排讀書會，安排實驗組(A)之同學參加。

(三)、安排實驗組(A)之同學參加舉行專題演講活動。

(四)、安排實驗組(A)之同學參加獨立解題。發給較困難之數學問題，鼓勵實驗組(A)之同學解決並討論。

(五)、鼓勵實驗組(A)進行小論文之研究。

四、實驗設計

(一)、收集參與公開徵答學生學習綜合資料.建檔。

(二)、挑選參與公開徵答題之建中學生編為實驗組(A)，未參與者編為實驗組(B)各約 30 人，統計他們表現的差異。

五、整理研究成果、撰寫期末報告

肆、可能遭遇的困難及解決途徑：

一、請台師大科教中心協助，能將資訊定期刊在科教月刊中發布。

二、請台師大科教中心能給予必要的協助與指導。

伍、預計成果：

一、完成實驗組(A)與實驗組(B)在數學學習上的差異(預計實驗組(A)優於實驗組(B))。佐證多元學習對學生的數學能力上確有相當程度之提升。預計參加徵答題、數學步道、讀書會的學生，在數學推理思考及解題表達能力上，會有顯著的成效。

二、繼續完成中學數學挑戰題約四十題之設計(含解答及分析)，提供中學數學教師作為輔導對數學有趣的中學生的補充教材。

三、培養研究人員，參與有關數學擬題技能之研究。

四、預期能有效提昇中學生數學能力，引起對數學的興趣，激發學習潛能。

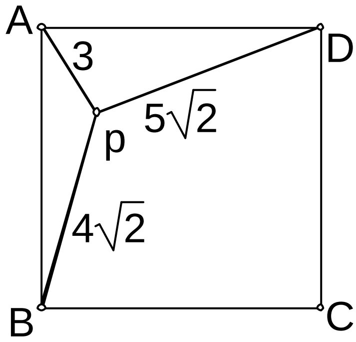
五、提早發掘對數學有興趣的學生，使其能提早有計畫的培訓，儲備參與國際數學競賽人才。

附件一：中學生通訊解題第十七期至二十三期題目及解答

中學生通訊解題第十七期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901701



如圖，設正方形 ABCD **內部有一點** P

滿足 $\overline{AP}=3$，$\overline{BP}=4\sqrt{2}$，$\overline{DP}=5\sqrt{2}$，

試求正方形 ABCD **的面積。**

問題編號
901702

若 $a_1,a_2,\ldots,a_{2001}$ **為** 2001,2002,2003,….4000,4001 **的任意一種重新排列，試求證**

(1)$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\ldots\times(4001-a_{2001})$**為偶數** 。

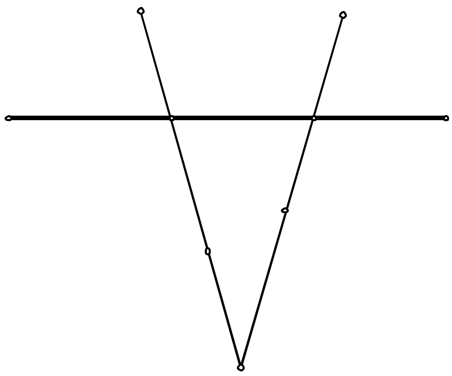
(2)$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\ldots\times(2001-a_{2001})$**亦為偶數。**

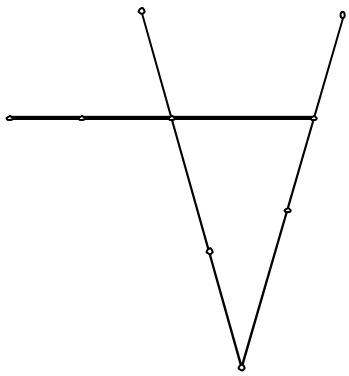
問題編號
901703

平面上有 9 **個點，現在要將它們排成三行，要求每行恰好有** 4 **個點，如圖所示，就是兩種不同的排列方法。**

(1)**請儘量舉出不同的的排列方法。**

(2)**在你舉例的過程中，你是否發現什麼規律？而能將此問題解決。**

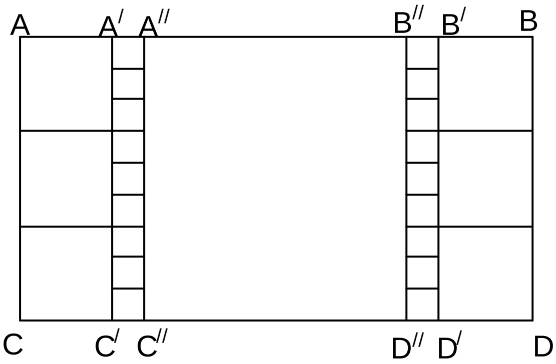




問題編號
901704

有一長方形 ABDC，已知$\overline{AB}$長度為 x，$\overline{AC}$長度為 y，如圖所示

今在長方形兩邊分別取兩個長方形 $ACC'A'$、$BDD'B'$，使$\overline{AC}=3\overline{AA'}$，$\overline{BD}=3\overline{BB'}$，如此可將長方形 $ACC'A'$、$BDD'B'$，各分為 3 個正方形，再將長方形 $A'C'D'B'$兩邊分別取兩個長方形 $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$，使$\overline{A'C'}=9\overline{A'A''}$、$\overline{B'D'}=9\overline{B'B''}$，如此可將長方形 $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$各分為 9 個正方形，照此規則分割下去，試問 $x:y$ 為多少時，恰能將長方形 ABDC 分為 6558 個大小不同的正方形。



問題編號
901705

已知 $a_1,a_2,a_3,\ldots.a_n$ 均為正數，若

$$M=\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2}+\ldots..+\sqrt{a_{n-2}^2+a_{n-1}^2}+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2}+\sqrt{a_n^2+a_1^2}$$

$$N=\sqrt{2}(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)$$

則 M 與 N 的大小關係為何？證明你的結果。

中學生通訊解題第十八期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901801

已知一線段，其長為a**，請完成下列步驟：**

a

(1) **試作線段，使其長** x **滿足** $\frac{1}{x}-\frac{2}{a}+\frac{3}{x+a}=0$。

(2) **再作另一線段，使其長為** $\sqrt{ax}$ 。

問題編號
901802

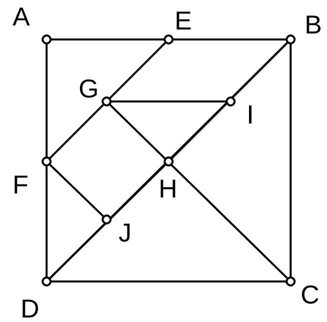
有 n+1 **顆小球，球面上分別標有** $1, 5, 5^2, 5^3, \cdots, 5^n$ **等數字，現在把這** n+1 **顆球分別放入** A,B,C 三**個箱子中，試證：任意** 2 **個箱子中，小球上的數字和不相等**。

問題編號
901803

右圖是一組七巧板，其中 E、F、G、H、I、J **分別為** $\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{EF}$、$\overline{BD}$、$\overline{BH}$、$\overline{DH}$ **的中點，且**ΔDFJ **的面積為** 1。**今任取幾個區塊塗黑，假設黑色部分的面積為**a**，白色部分的面積為**b**，問：**

若要使 (1) $a=b$
(2) $a=b+1$
(3) $a=b+2$

各有幾種塗法？

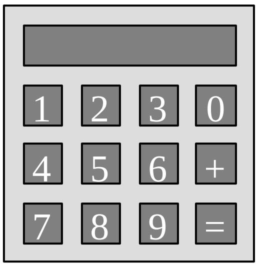


問題編號
901804

某校舉辦演講及作文兩項國語文競賽，一人可同時參加兩項。如果參加演講比賽的學生中，有 75%**是女生，參加作文比賽的有** 60%**是女生。**
(1)**試證：參加比賽的全體學生中，女生人數不少於男生人數。**
(2)**試說明：在什麼情況下，參加比賽的男生人數和女生人數會相等？**

問題編號
901805

阿駿設計了一個功能簡易的計算機如右圖，將每個數字鍵恰按一次，能夠得出運算結果是 100 **嗎？如果可以，請舉例說明；如果不行，請說明你的理由。**



中學生通訊解題第十九期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901901

100 個同學圍坐成一圓圈，遊戲開始，每人先各由 1、2、3 三數中依”相鄰之人不得選擇相同數字”之條件，任意選定一數作為自己的幸運數字。選定之後各人與鄰座依序兩兩一組，共分 50 組，各組二人幸運數字之和若為 3、4、5 者各有 a、b、c 個組，則 a、b、c 三數中最大之各組有獎。

小希與左鄰同組，統計結果數字和為 5 的 c 個組獲獎。
小希說：若我與右座同組，獲獎的未必共有 c 個組吧。
小聰說：一樣啦！不論你與左鄰或右座同組，a、b、c 之值不會變的。

你以為呢？

問題編號
901902

若 p 為質數，且 $\dfrac{q}{10p}=0.1\overline{23xyzw}=0.123xyzw23xyzw23xyzw\cdots$，$q$ 為自然數，x、y、z、w 為阿拉伯數字，求 p 之值。

問題編號
901903

(1)設 n 是形如 $4k+1$ 的正整數（例如：$1,5,9,\cdots$），是否可以找到 n 個正奇數，a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n，使得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$？
(2)若有 n 個正奇數 a_1、a_2、a_3、$\cdots$、a_n，滿足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$，證明 n 必為形如 $4k+1$ 的正整數。

問題編號
901904

某天蛋頭正在寫數學作業，調皮搗蛋的弟弟把他的作業本搶了去，在幾個數字上亂塗鴉，結果只見題目如下：

“**若**(x^4+★x^2+▲)**可被**(x^2+★$x+$▲)**整除，** ……………”

蛋頭只記得兩個★處是相同數字，兩個▲處也是相同數字，請幫幫忙解救他，找出★和▲的數字吧！

問題編號
901905

在平面直角座標系中，A 點座標為(1,1)，B 點與 C 點都在座標軸上（可能同在 x 軸或 y 軸上，也可能各在一個座標軸上），A、B、C 三點形成一個等腰三角形。

(1)請找出 5 個滿足以上條件的三角形。

(2)設以 A 為頂點，令 $\overline{AB}=\overline{AC}=d$**，試用 d 的值來討論此類等腰三角形**$\Delta ABC$ **的個數。**

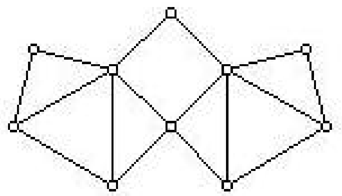
(3)若以 B、C 為頂點，請討論這類的等腰三角形的個數。

中學生通訊解題第二十期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912001

下圖一為一個七面體的展開圖：含一個正方形（邊長 1），4 個等腰三角形（斜邊$\sqrt{2}$）與 2 個正三角形（邊長$\sqrt{2}$），試求此七面體之體積？



（圖一）

問題編號
912002

凡是可以表示成$\dfrac{q}{p}$形式的數，稱為有理數（ p,q 是整數, $p\neq 0$ ），凡是不能表示成$\dfrac{q}{p}$形式的數，稱為無理數。設 $a<b$，且 a,b 均為無理數，請問 a,b 之間是否存在著無理數？若有，請找出一個介於 a,b 之間的無理數。

問題編號
912003

CK 先生到處做生意，因此為了方便，他便在常做生意的地方買了房子，現在知道他在台北、台中、高雄、香港、上海、北京皆有房子，而且目前他住在台北，有一天他跟秘書說，他準備做一次五天的生意旅行，每天要到另一處據點，且住宿該處，但第二天一定要前進到別處，問：

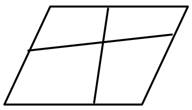
(1) 若每天住的地方都不重複，有__________種行程安排。

(2) 若只規定隔天要去另一據點，則又有幾種行程可安排？

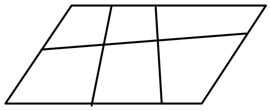
（注意：第五天他要回到台北）

問題編號
912004

小華喜歡畫畫，常常把哥哥的作業亂塗顏色，哥哥心生一計，便畫了圖形（如下圖二），告訴小華說”如果有紅綠黃藍黑五色讓你去著色，但規定任二格擁有相同線段的不可以著同一種顏色，則可以怎麼著色？”小華很快的塗了一種方式，但哥哥又說”你必須把所有可能的圖案都畫出來，以後才可以亂塗我的東西”，試問：小華應該畫出多少種？又若改成如下圖三所示，則有多少種著色方法？



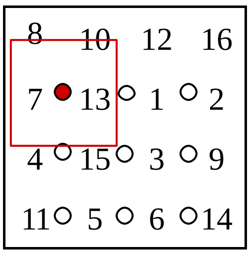
（圖二）



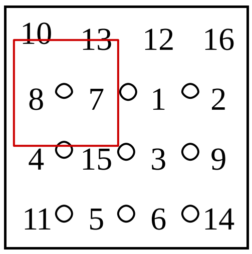
（圖三）

問題編號
912005

這是一個數字盤，現有紅白兩個神奇按鈕，每按一次，可令其周圍的四個數字逆時針旋轉一格，（如圖四，按下紅色鈕，四周的四個數字 8,10,13,7 逆時針轉一格，將數字的排列方式變為圖五所示）

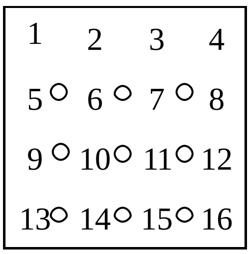


（圖四）



(圖五）

依照上述的遊戲規則，是否可經過若干次操作，將圖四中的數字盤變成下圖六之數字排列？如果可以，請告訴我，你是怎麼做到的？如果不行，請說明原因。



（圖六）

中學生通訊解題第二十一期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912101

對於自然數n，令$f(n)$表示n的數碼和。例如$f(2307)=2+3+0+7=12$。

(1)若n是二位數，問$\dfrac{n}{f(n)}$的最大值是多少？最小值是多少？

(2)若n是四位數，問$\dfrac{n}{f(n)}$的最大值是多少？最小值是多少？

問題編號
912102

分子為1的真分數稱為單位分數或埃及分數。試將$\dfrac{1}{6}$寫成兩個埃及分數的和。(請證明你已經列出所有可能的答案)。

問題編號
912103

用一個平面去截邊長為1的正立方體，結果得到截面是一個菱形。問這個菱形的面積是多少？

問題編號
912104

已知三角形中有一角為$180°-n°$，而且這個三角形最大角和最小角的角度差為$24°$。試求出n的範圍。

問題編號

912105

今有 n 個一元硬幣疊成一疊，我們稱這疊硬幣高度為 n 。小明和小華玩以下的遊戲：小明先將這疊硬幣分成高度較小的兩疊(兩疊高度可以不相同)；小華接著任選一疊高度 ≥ 2 個硬幣，再將之分為兩疊(兩疊高度可以不相同)。如此兩人輪流下去，每一次都是選一疊高度 ≥ 2 的硬幣，將之分成兩疊(分成的兩疊高度可以不相同)。第一個將所有硬幣分成高度只有 1 或 2 的人獲勝。

(1)**當 $n=7$ 時，誰有必勝策略？為什麼？**

(2)**當 $n=2002$ 時，誰有必勝策略？為什麼？**

中學生通訊解題第二十二期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912201

從正三角形 ABC **內部一點** M **向三邊做垂線** MH,MK,MP，**垂足為** H,K,P，**請證明：**

(1) $AH^2+BK^2+CP^2=HB^2+KC^2+PA^2$

(2) AH+BK+CP=HB+KC+PA

問題編號
912202

正八面體之各面中點連成一多面體 Ω_1，**此多面體之各邊中點連成一多面體** Ω_2，**求** Ω_2 **之內切球。**

問題編號
912203

已知 W_1、W_2、W_3 **都是整數且** $W_1>W_2>W_3$。

今有重量各為 W_1、W_2、W_3 **單位之** A、B、C **三種金幣各** N **個，分贈甲、乙、丙三人，每人** N **個。若甲、乙都有拿到** A；**乙、丙都有拿到** B，**甲、丙都有拿到** C，**且甲、乙、丙所的金幣總重各為** 82、35、21 **單位，求** N **之值，並問** A、B、C **三種金幣之重各是多少？**

問題編號
912204

X_1、X_2、X_3⋯、X_{n-1}、X_n **均為**-1 **或** 0 **或** 1 **或** 2，n **為正整數，且滿足下列兩個等式：**

$X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{n-2}+X_{n-1}+X_n=91$

$X_1^2+X_2^2+X_3^2+\cdots+X_{n-2}^2+X_{n-1}^2+X_n^2=2002$

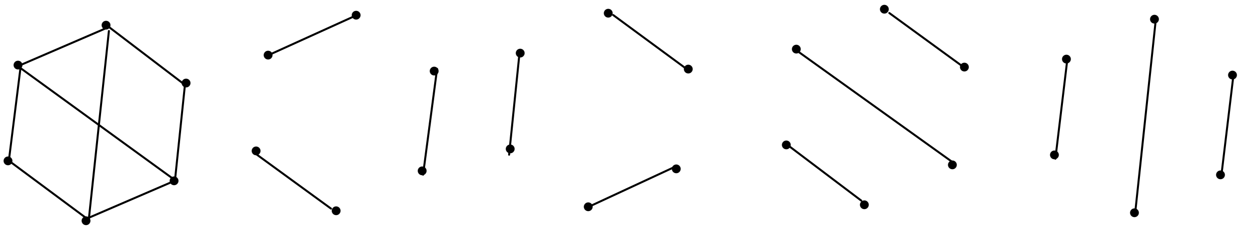
求 $X_1^3+X_2^3+\cdots+X_{n-1}^3+X_n^3$ **之最大值、最小值。**

(1)**若無解，請說明原因；若有解，請求出其最大值與最小值。**

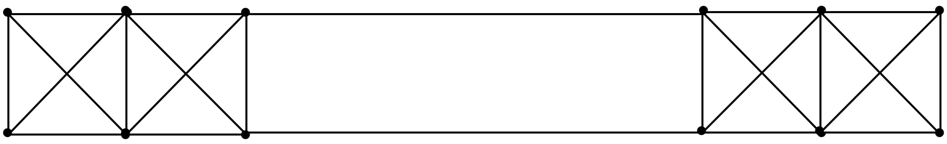
(2)**若將題目改成** $X_1+X_2+X_3+\cdots+X_{n-2}+X_{n-1}+X_n=92$，**是否有解？若無解，請說明原因；若有解，請求出其最大值與最小值。**

問題編號
912205

一個偶數個頂點的圖上的完美配對是指將這些頂點兩個成一組，且同組的兩個點有邊直接相連。下例左圖(有六個頂點，注意中間對角線的交點不算頂點)的完美配對有四個，配對法分別如右以實線表示。



試問下圖有幾個完美配對？(一共有 n 個正方形並列，對角線的交點不算頂點)



中學生通訊解題第二十三期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912301

正方形 ABCD **的** $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ **邊上各有一點** M，N，**若**∠MAN=45^0，

試證：$\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\sqrt{\dfrac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AC}+\overline{CN}}}$

問題編號
912302

△ABC **中**，E，F **分別為**$\overline{AC}$，$\overline{AB}$**上的點**，**且** $\overline{AF}$=m$\overline{AB}$，$\overline{AE}$=n$\overline{AC}$，**若過** F **垂直**$\overline{AB}$**的直線交過** E **垂直**$\overline{AC}$**的直線於** P **點**，**過** P **作**$\overline{BC}$**的垂線**，**垂足為** D，**若** $\overline{BD}$= r$\overline{BC}$，**試以** m、n、a、b、c **表示** r 。(**其中**$\overline{BC}$= a，$\overline{AC}$= b，$\overline{AB}$= c)

問題編號
912303

(1)a、b、c、d、e∈R，**若** a+b＜c+d ， b+c＜d+e ， c+d＜e+a ， d+e＜a+b ，**則** a、b、c、d、e **的大小順序有幾種**。

(2)a、b、c、d、e、f、g∈R，**若** a+b＜c+d ， b+c＜d+e ， c+d＜e+f ， d+e＜f+g ， e+f＜g+a ， f+g＜a+b ，**則** a、b、c、d、e、f、g **的大小順序有幾種**。

問題編號
912304

若$a\ge b>c>0,a<b+c$，**試解方程式**$b\sqrt{x^2-c^2}+c\sqrt{x^2-b^2}=ax$。

問題編號
912305

(1)**在下列幾個由小方格組合而成的圖形中，分別有一些圓圈，試用下列的規則，將這些圓圈連在一起。**

【規則】

1. 可以從任何一個圓圈開始
2. 只能往水平方向或垂直方向走，不可往斜角方向走
3. 在任何圓圈皆可垂直轉彎但不可在空白處轉彎
4. 不可以在剛走過的路逕就馬上又回頭走

【舉例說明】

範例：

	○				
	○	○			
	○	○	○		
	○	○	○	○	

正確走法

	①				
	②	③			
	⑧	④	⑦		
	⑨	⑤	⑥	⑩	

錯誤走法

	①				
	⑨	⑩			
	②	③	④		
	⑧	⑦	⑤	⑥	

【第 1 題】

		○	○			
	○		○		○	
			○			○
○	○	○	○	○	○	○
○			○			
	○		○		○	
			○	○		

【第 2 題】

○									○
○	○							○	○
○	○	○					○	○	○
○	○	○	○			○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	

		○	○	○	○	○	○		
			○	○	○	○			
				○	○				

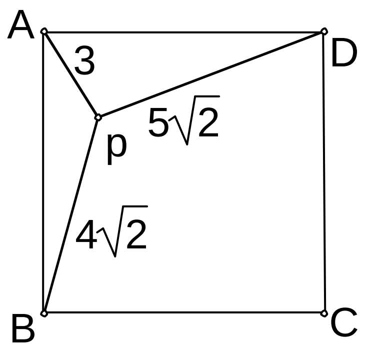
(2)**依此規則，在一個** 2╳N **的方格中，圓圈應如何排列則一定可以走完？試討論之。**(N **為正整數**)

附件二：中學生通訊解題第十七期至二十一期解答

中學生通訊解題第十七期參考解答

台北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901701

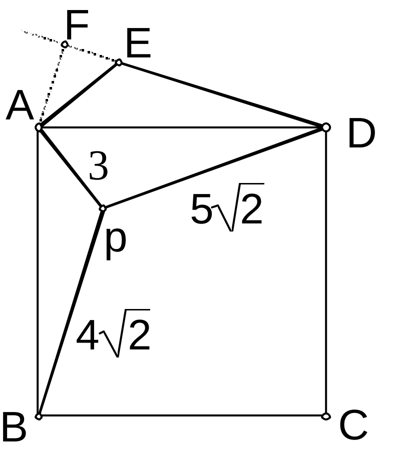


如圖，設正方形 ABCD **內部有一點** P

滿足 $\overline{AP}=3$，$\overline{BP}=4\sqrt{2}$ ，$\overline{DP}=5\sqrt{2}$ ，

試求正方形 ABCD **的面積。**

參考解答：



如圖，作$\triangle AED\cong APB$ **所以**$\angle EAP=90^\circ$?

且$\triangle AEP$ **為等腰直角三角形**

可得 $\overline{EP}=3\sqrt{2}$ **且**$\angle AEP=45^\circ$，

又在$\triangle DEP$ **中，**$\angle E=90^\circ$?，

所以$\angle AED=135^\circ$?

可得 $\overline{AF}=\overline{EF}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，$\overline{DF}=\frac{11}{2}\sqrt{2}$

所以 $\overline{AD}=\overline{AF}^2+\overline{DF}^2=\sqrt{65}$

面積 $\overline{AD}^2=65$

解題重點：本題的解法有以下幾種類型：

(1) **直接用代數法，取未知數，但要用到四次式，所以有點辛苦。**

(2) **利用"旋轉"的概念（高中幾何學），但是在解邊長時，大部分同學使用了餘弦定理（最好會證明），亦可利用等腰或延長線取高之國中作法。**

(3) **利用"旋轉"，並求出"正方形的面積＝4 個三角形之面積或 3 個三角形之面積"，但** E、C、F **三點共線未證者則無法獲得滿分。**

評析：(1)答題優良者：本題答題優良者眾多，得到滿分者一共有 33 人，詳細答題情況已公布上網，可直接上網查詢。

(2)本題答題人數共 50 人，平均得分為 5.94 分，得分率為 85%。

問題編號
901702

若 $a_1,a_2,\ldots,a_{2001}$ 為 2001,2002,2003,….4000,4001 的任意一種重新排列，試求證

(1)$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\ldots\times(4001-a_{2001})$為偶數 。

(2)$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\ldots\times(2001-a_{2001})$亦為偶數。

參考解答：

(1)假設$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\ldots\times(4001-a_{2001})$為奇數

則$(2001-a_1)$、$(2002-a_2)$、$(2003-a_3)$、….. $(4001-a_{2001})$皆為奇數

但奇數個(共有 2001 個)奇數其和亦為奇數

然而$(2001-a_1)+(2002-a_2)+(2003-a_3)+\ldots+(4001-a_{2001})$

$=(2001+2002+\ldots+4001)-(a_1+a_2+\ldots+a_{2001})=0$ 與其和為奇數產生矛盾

故假設錯誤

所以$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\ldots\times(4001-a_{2001})$為偶數

(2)假設$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\ldots\times(2001-a_{2001})$為奇數,

則$(1-a_1)$、$(2-a_2)$、$(3-a_3)$、….. $(2001-a_{2001})$為 2001 個奇數,

但$(1-a_1)+(2-a_2)+(3-a_3)+\ldots+(2001-a_{2001})$

$=(1+2+3+\ldots+2001)-(a_1+a_2+\ldots+a_{2001})$

$=(1+2+3+\ldots+2001)-(2001+2002+\ldots+4001)$

$=\frac{2002\times2001}{2}-\frac{6002\times2001}{2}=2001\times(1001-3001)=-1000\times2001$ 與奇數產生矛盾

故假設錯誤

所以，$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\ldots\times(2001-a_{2001})$為偶數。

解題重點：瞭解奇數和偶數的性質，並利用反證法及鴿籠原理作證明。

評析：(1)大部分的同學都知道用反證法及鴿籠原理，但能清楚地寫出證法者並不多。

(2)答題優良者：台北市民生國中呂信儀同學、台北市民生國中邱莉婷同學、台北縣新莊國中吳之堯同學、高雄縣鳳西國中葉仲恆同學。

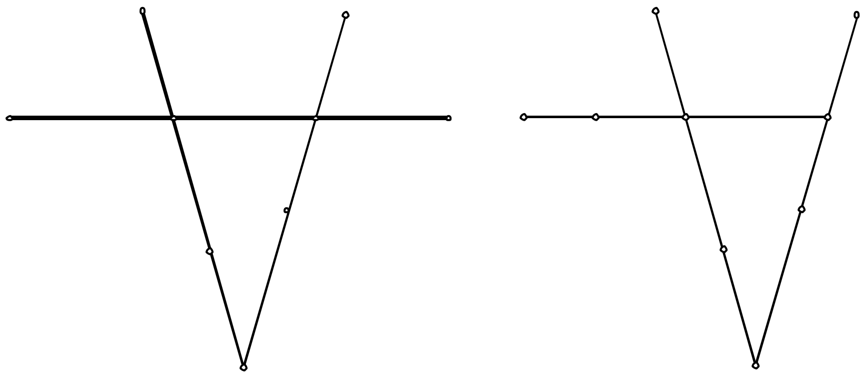
(3)本題答題人數共 55 人，平均得分為 5.04 分，得分率為 72%。

問題編號
901703

平面上有 9 **個點，現在要將它們排成三行，要求每行恰好有** 4 **個點，如圖所示，就是兩種不同的排列方法。**

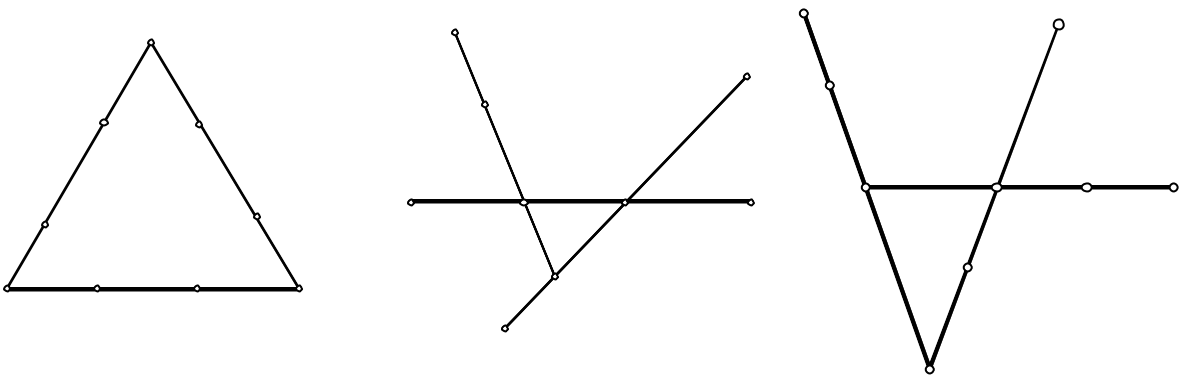
(1)**請儘量舉出不同的的排列方法。**

(2)**在你舉例的過程中，你是否發現什麼規律？**
而能將所有的排列方式找出來。



參考解答：

(1)**可再舉出一些排列的方式，如下圖：**

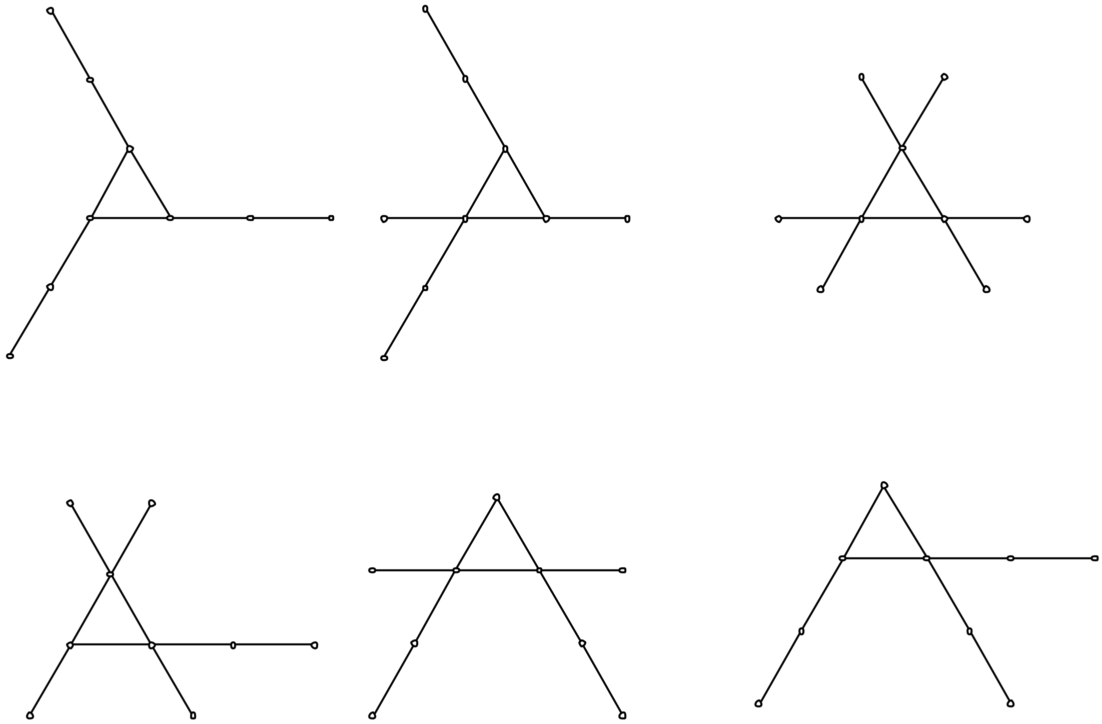


(2)**觀察上面的圖形，可以發現上面每一個圖形都存在一個三角形，其中這些三角形的邊上都各有一些點**(**頂點一定算一點**)，**因此我們將這樣的三角形稱為基本三角形，假設基本三角形各邊上分別有** a,b,c **個點，其中**($a \le b \le c$)，**因為只有** 9 **個點，因此** $2 \le a,b,c \le 4$，**現在用**(a,b,c)**表示基本三角形的型式：我們可以找出** 10 **種如下所示：**

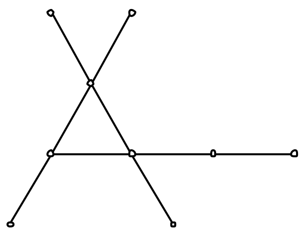
(2,2,2),(2,2,3),(2,2,4),(2,3,3),(2,3,4)(2,4,4),(3,3,3),(3,3,4),(3,4,4)(4,4,4)。

因為在不同的基本三角形上得出的排列方式必定是不同的，因此只要確定這10種形式可能產生的排列方式，就可以得出所有排列的方式。

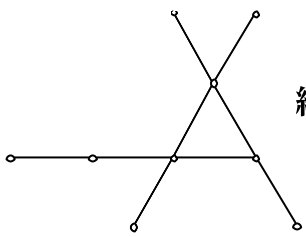
例：(2,2,2)的基本三角形有如下6種



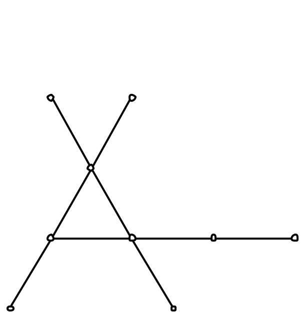
注意：其中



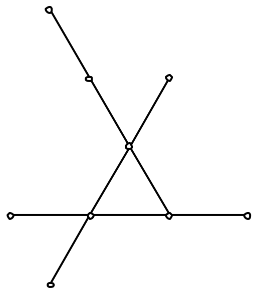
和



經水平翻轉為同一種



和



經旋轉為同一種

(3)下表是各種基本三角形所產生的排列方式;

基本三角形	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,3,4)	(2,4,4)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,4)	(4,4,4)
排列方式個數	6	9	6	7	6	2	2	3	1	1

共有 43 **種排列方式。**

解題重點：瞭解點和直線的關係，並能從觀察中發現滿足題目所設條件的排列之規律性，　進而利用分類找出排列方式的個數。

評析：(1)**幾乎所有答題的同學均能畫出幾種不同的排列方式，並找到其中的規律性，但是能夠懂得利用分類來找出所有排列方式者極少。**

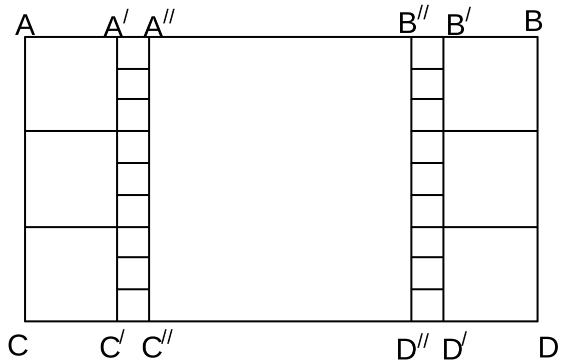
(2)**答題優良者：台北縣江翠國中<u>黃明山</u>同學、<u>莊智涵</u>同學、台北縣秀峰高中<u>陳郁涵</u>同學、台北縣新莊國中<u>潘遠信</u>同學。**

(3)**本題答題人數共** 73 **人，平均得分為** 4.33 **分，得分率為** 62%。

問題編號
901704

有一長方形 ABDC**，已知** $\overline{AB}$ **長度為** x**，**$\overline{AC}$ **長度為** y**，如圖所示**

今在長方形兩邊分別取兩個長方形 $ACC'A'$、$BDD'B'$**，使** $\overline{AC}=3\overline{AA'}$**，** $\overline{BD}=3\overline{BB'}$**，如此可將長方形** $ACC'A$、$BDD'B'$**，各分為** 3 **個正方形，再將長方形** $A'C'D'B'$ **兩邊分別取兩個長方形** $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$**，使** $\overline{A'C'}=9\overline{A'A''}$、$\overline{B'D'}=9\overline{B'B''}$**，如此可將長方形** $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$ **各分為** 9 **個正方形，照此規則分割下去，試問** x**：**y **為多少時，恰能將長方形** ABDC **分為** 6558 **個大小不同的正方形。**



參考解答：

正方形個數$=2\times(3+3^2+3^3+\ldots+3^n)=6558$

$2\times\dfrac{3\times(3^n-1)}{3-1}=6558$　$3^n-1=2186$　**所以** $3^n=2187$ **即** $n=7$

而　$x=2\times[\frac{1}{3}y+(\frac{1}{3})^2y+(\frac{1}{3})^3y+\ldots\ldots+(\frac{1}{3})^7y]$

$x=[1-(\frac{1}{3})^7]\times y$，**所以** $\dfrac{x}{y}=1-(\frac{1}{3})^7=\dfrac{2186}{2187}$

解題重點：本題是以等比級數公式來解題。

評析：(1)**以等比級數公式來作答者即可得到高分，許多同學均能掌握到此要領。**

(2)**答題優良者：板橋海山國中<u>張源平</u>同學、台北縣江翠國中<u>莊智涵</u>同學、台北縣福和國中<u>楊智寰</u>同學。**

(3)**本題作答人數** 45 **人，平均得分為** 4.95 **分，得分率為** 71%。

問題編號
901705

已知 $a_1,a_2,a_3,\ldots.a_n$ **均為正數，若**

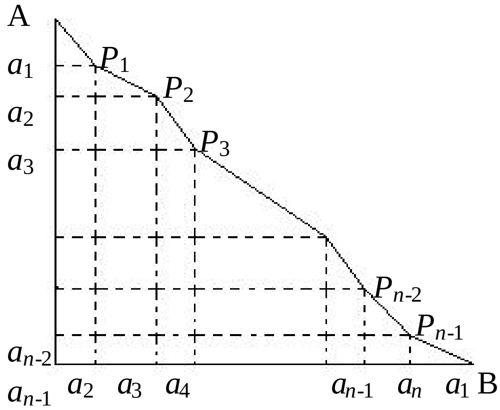
$M=\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2}+\ldots..+\sqrt{a_{n-2}^2+a_{n-1}^2}+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2}+\sqrt{a_n^2+a_1^2}$

$N=\sqrt{2}(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)$

則 M **與** N **的大小關係為何？證明你的結果。**

參考解答：

(方法一)



$N=\dfrac{\sqrt{2}}{2}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\ldots\ldots+(a_n+a_1)]$

但 $\sqrt{a_i^2+a_j^2}\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a_i+a_j)$

$\Leftrightarrow a_i^2+a_j^2\geq\dfrac{1}{2}(a_i+a_j)^2$

$\Leftrightarrow 2(a_i^2+a_j^2)\geq(a_i^2+2a_ia_j+a_j^2)$

$\Leftrightarrow(a_i-a_j)^2\geq0$ **但最後一式必然成立，故** $M\geq N$，**且當** $a_1=a_2=\ldots.=a_n$ **時，** $M=N$。

(方法二)

令 $\overline{OA}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$\overline{OB}=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1$

則 $\overline{OA}=\overline{OB}$**，** ΔOAB **為等腰直角三角形。**

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=N$

$\because \overline{AP_1}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$，$\overline{P_1P_2}=\sqrt{a_2{}^2+a_3{}^2}$，$\cdots$，

$\overline{P_{n-2}P_{n-1}}=\sqrt{a_{n-1}{}^2+a_n{}^2}$，$\overline{P_{n-1}B}=\sqrt{a_n{}^2+a_1{}^2}$

$\Rightarrow M=\overline{AP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots+\overline{P_{n-2}P_{n-1}}+\overline{P_{n-1}B}$ **(折線段長之和)**

由圖可知， M=N

解題重點：本題作答可由代數及幾何互相驗證。

評析：(1)**答題優良者：以（方法一）作答較詳盡者包括北縣福和國中吳霽庭同學、北縣海山國中張源平同學、北市明德國中王琨傑同學、北市大直高中陳俊曄同學；以（方法二）作答較完整者包括高雄縣鳳西國中葉仲恆同學、台南市建興國中黃信溢同學、北縣江翠國中黃明山同學、北市民生國中張哲瑞同學。**

(2)**本題答題人數共** 19 **人，平均得分為** 5.53 **分，得分率為** 79%。

中學生通訊解題第十八期參考解答

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901801

已知一線段，其長為 a **，請完成下列步驟：**

a

(3) **試作線段，使其長** x **滿足** $\frac{1}{x}-\frac{2}{a}+\frac{3}{x+a}=0$ 。

(4) **再作另一線段，使其長為** $\sqrt{ax}$ 。

參考解答：

[計算]

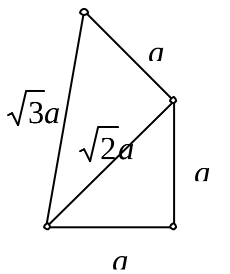
已知 $\frac{1}{x}-\frac{2}{a}+\frac{3}{x+a}=0$

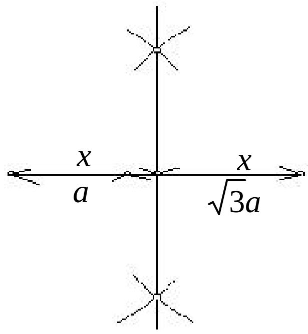
兩邊同乘以 $ax(x+a)$ **，得** $a(x+a)-2x(x+a)+3ax=0$

整理後得 $2x^2-2ax-a^2=0$

兩邊同除以 a^2 **，得** $2(\frac{x}{a})^2-2(\frac{x}{a})-(\frac{x}{a})^2=0$

可解得 $\frac{x}{a}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ **(負不合)**





[作圖]

已知**：線段**

a

作法**：**(1)**如圖，先作** $\sqrt{3}a$,

再作 $a+\sqrt{3}a$,

最後平分 $a+\sqrt{3}a$,

此線段長即為 x 。

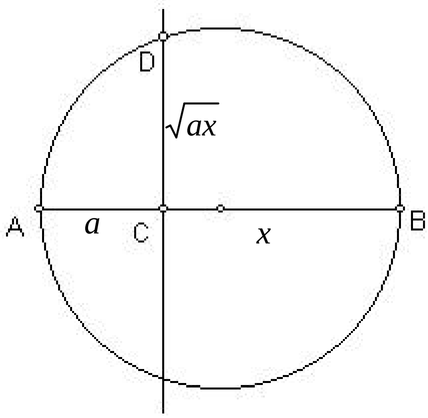
(2)**作一線段** $\overline{AB}=a+x$,

於 $\overline{AB}$ **上取一點** C **，使** $\overline{AC}=a$ **，** $\overline{CB}=x$,

以 $\overline{AB}$ **為直徑作一圓** O ,

過 C **作直線** l **交圓** O **於** D ,

則 $\overline{CD}=\sqrt{ax}$ **即為所求。**



證明**：(略)**

問題編號
901802

有 n+1 顆小球，球面上分別標有 $1,5,5^2,5^3,\cdots,5^n$ 等數字，現在把這 n+1 顆球分別放入 A,B,C 三個箱子中，試證：任意 2 個箱子中，小球上的數字和不相等。

參考解答：

假設取到 A,B 兩箱，欲檢驗此兩箱中小球的數字和是否相等，只要觀察兩箱中小球的數字和相減後是否為 0，而未取到的 C 箱中之小球數字和則不予計算。

假設 A,B 兩箱中小球的數字和相等，且標為 5^n 的小球在 A 箱

可列出方程式 $5^n+a_1\cdot 5^{n-1}+a_2\cdot 5^{n-2}+\cdots+a_{n-1}\cdot 5+a_n=0$

其中，在 A 箱的係數為 1，在 B 箱的係數為-1，在 C 箱的係數為 0

則 $5^n=-a_1\cdot 5^{n-1}-\cdots-a_{n-1}\cdot 5-a_n$

$\le |a_1|\cdot 5^{n-1}+\cdots|a_{n-1}|\cdot 5+|a_n|$

$\le 5^{n-1}+\cdots+5+1$

$=\dfrac{5^n-1}{5-1}$

$<\dfrac{5^n}{5-1}$

得 $\dfrac{5^n(5-2)}{5-1}<0$，矛盾

所以 A,B 兩箱中小球的數字和不相等

同理可知，任意 2 個箱子中，小球上的數字和不相等。

問題編號
901803

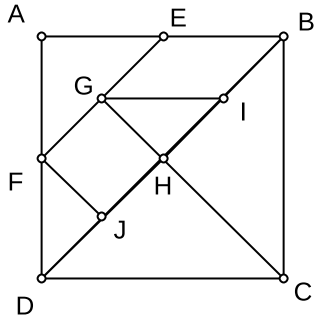
右圖是一組七巧板，其中 E、F、G、H、I、J 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{EF}$、$\overline{BD}$、$\overline{BH}$、$\overline{DH}$ 的中點，且 ΔDFJ 的面積為 1。今任取幾個區塊塗黑，假設黑色部分的面積為 a，白色部分的面積為 b，問：

若要使 (1) $a=b$

(2) $a=b+1$

(3) $a=b+2$

各有幾種塗法？



參考解答：

七巧板各區塊面積如右圖

可知正方形 ABCD 的面積為 16

(1) $a=b$：

此時 $a=8\ (b=8)$，其組成方法有：

(a)8=1+1+2+2+2：有 1 種塗法
(b)8=1+1+2+4：有 $3\times 2=6$ 種塗法
(c)8=2+2+4：有 $3\times 2=6$ 種塗法
(d)8=4+4：有 1 種塗法
由上述知，此情況共有 $1+6+6+1=14$ 種塗法

(2) $a=b+1$：
此時 $a+b=(b+1)+b=2b+1=16$，矛盾
所以此情況共有 0 種塗法

(3) $a=b+2$：
此時 $b=7\,(a=9)$，其組成方法有：
(a)7=1+2+2+2：有 2 種塗法
(b)7=1+2+4：有 $2\times 3\times 2=12$ 種塗法
由上述知，此情況共有 $2+12=14$ 種塗法

問題編號
901804

某校舉辦演講及作文兩項國語文競賽，一人可同時參加兩項。如果參加演講比賽的學生中，有 75%是女生，參加作文比賽的有 60%是女生。
(1)試證：參加比賽的全體學生中，女生人數不少於男生人數。
(2)試說明：在什麼情況下，參加比賽的男生人數和女生人數會相等？

參考解答：
女生的英文是" *girl* "，男生的英文是" *boy* "，那麼我們就作如下的假設吧！
假設 g_1 是只參加演講比賽的女生人數
g_2 是只參加作文比賽的女生人數
g_{12} 是參加兩項比賽的女生人數
b_1 是只參加演講比賽的男生人數
b_2 是只參加作文比賽的男生人數
b_{12} 是參加兩項比賽的男生人數

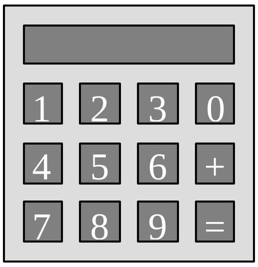
由題目知 $(g_1+g_{12}):(b_1+b_{12})=0.75:0.25$
$(g_2+g_{12}):(b_2+b_{12})=0.6:0.4$

可得 $g_1+g_{12}=3(b_1+b_{12})$
$2(g_2+g_{12})=3(b_2+b_{12})$

相加可得
$$\begin{aligned}3(g_1+g_{12}+g_2) &\geq g_1+3g_{12}+2g_2\\ &=3b_1+6b_{12}+3b_2\\ &\geq 3(b_1+b_{12}+b_2)\end{aligned}$$
由此得出，參加比賽的全體學生中，女生人數不少於男生人數
並且可看出當 $g_1=g_2=b_{12}=0$ 時，參加比賽的男生人數和女生人數會相等。

問題編號
901805

阿駿設計了一個功能簡易的計算機如右圖，將每個數字鍵恰按一次，能夠得出運算結果是 100 **嗎？如果可以，請舉例說明；如果不行，請說明你的理由。**



參考解答：

不行，證明如下：

(1)**先證明一個小性質：**

設 $\overline{P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1} = P_n \times 10^{n-1} + P_{n-1} \times 10^{n-2} + \cdots + P_2 \times 10 + P_1$

則 $\overline{P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1}$ **除以** 9 **的餘數等於** $(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_2 + P_1)$ **除以** 9 **的餘數。**

$\because \overline{P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1} = P_n \times (10^{n-1} - 1) + P_{n-1} \times (10^{n-2} - 1) + \cdots + P_2 \times (10 - 1)$

$\qquad + P_n + P_{n-1} + \cdots + P_2 + P_1$

又$(10^{n-1}$-1),$(10^{n-2}$-1),$\cdots$,(10-1)**皆為** 9 **的倍數**

故 $\overline{P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1}$ **除以** 9 **的餘數等於** $(P_n + P_{n-1} + \cdots + P_2 + P_1)$ **除以** 9 **的餘數。**

(2)**若每一個數字鍵恰按一次，則無論你如何搭配組成，所按出的幾個正整數的和除以** 9 **的餘數都會等於** 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 **除以** 9 **的餘數，也就是** 0**。而** 100 **除以** 9 **的餘數等於** 1**，故沒有辦法得出運算結果為** 100。

中學生通訊解題第十九期參考解答

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901901

100 個同學圍坐成一圓圈，遊戲開始，每人先各由 1、2、3 三數中依”相鄰之人不得選擇相同數字”之條件，任意選定一數作為自己的幸運數字。選定之後各人與鄰座依序兩兩一組，共分 50 組，各組二人幸運數字之和若為 3、4、5 者各有 a、b、c 個組，則 a、b、c 三數中最大之各組有獎。

小希與左鄰同組，統計結果數字和為 5 的 c 個組獲獎。
小希說：若我與右座同組，獲獎的未必是 c 組吧。
小聰說：一樣啦！不論你與左鄰或右座同組，a、b、c 之值不會變的。

你以為呢？

參考解答：
設 100 人中，以 1,2,3 為幸運數字者各有 x,y,z 人，即 $x+y+z=100$。
小希與左鄰同組時，二人幸運數字和為 3,4,5 者各有 a,b,c 組
小希與右座同組時，二人幸運數字和為 3,4,5 者各有 a',b',c'組

則 $\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ b+c=z \end{cases}$ $\quad a+b+c=50$ $\qquad$ $\begin{cases} a'+b'=x \\ a'+c'=y \\ b'+c'=z \end{cases}$ $\quad a'+b'+c'=50$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+z=50=a'+z \\ b+y=50=b'+y \\ c+x=50=c'+x \end{cases}$$

即 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

小聰說的對！

解題重點：分析題意，依分組規則列出方程組，再作比較。
評析：本題難度較高，答題狀況普遍不佳，部分同學僅舉出一個特例，或發生觀念錯誤、算式不清的情形，顯示國中生對於題目的分析仍有進步空間。本題答題人數共 9 人，平均得分 2 分，答題優良者為新莊國中吳之堯同學。

問題編號
901902

若 p **為質數，且** $\frac{q}{10p} = 0.1\overline{23xyzw} = 0.123xyzw23xyzw23xyzw\cdots$**，**$q$ **為自然數，** x**、** y**、**z**、**w**為阿拉伯數字，求** p **之值。**

參考解答：

$\frac{q}{10p} = \frac{123xyzw - 1}{9999990} \Rightarrow 10p(123xyzw-1)=q\times9999990$

$\Rightarrow p(123xyzw-1)=q\times3^3\times7\times11\times13\times37$

逐一檢驗得　　p=13，q=16

解題重點：先把先將循環小數化成分數的形式，從而觀察出 p **是** 999999 **之質因數**

，再經試驗得到 p=13 **的結論。**

評析：本題答題情況尚佳，部分同學能推得 p=13 **的結論，但未能清楚說明理由，甚是可惜。本題答題人數共** 12 **人，平均分數為** 4.5 **分，答題優良者有銘傳國中邱柏凱同學、福和國中胡明原同學、大直國中陳俊曄同學及新莊國中吳之堯同學等。**

問題編號
901903

(3)**設** n **是形如** $4k+1$ **的正整數（例如：1,5,9,⋯），是否可以找到 n 個正奇數，** a_1、a_2、a_3、⋯、a_n**，使得** $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$**？**

(4)**若有** n **個正奇數** a_1、a_2、a_3、⋯、a_n**，滿足** $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$**，證明** n **必為形如** $4k+1$ **的正整數。**

參考解答：

(1)**取** $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=1$，$a_{n-1}=3$，$a_n=2k+1$

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=6k+3$，$a_1.\ a_2\cdots a_{n-1}.\ a_n=3(2k+1)=6k+3$

∴可找到 n **個正奇數** $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$**，使得** $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$

(2) $\because a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$

而 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 為正奇數

$\therefore a_1$．$a_2\cdots a_{n-1}$．a_n 為奇數

$\Rightarrow n$ 為奇數

假設 $n=4k+3$，k 為大於等於 0 的整數

考慮 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 中，被 4 除餘 1 的有 x 個，則被四除餘 3 者有$(n-x)$個

$N=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\equiv 3n-2x\equiv 2x+1(mod\ 4)$

$M=a_1$．$a_2\cdots a_{n-1}$．$a_n\equiv(-1)^{n-x}\equiv(-1)^{x+1}(mod\ 4)$

(a) 若 x 為奇數，$N\equiv 3(mod\ 4)$但 $M\equiv 1(mod\ 4)$……….不合

(b) 若 x 為偶數，$M\equiv 1(mod\ 4)$但 $M\equiv 3(mod\ 4)$……….不合

由(a),(b)可知假設不成立。

$\therefore n$ 必為形如 $4k+1$ 的正整數。

解題重點：第一小題主要是構造出滿足條件的情況；而第二小題則由除法原理出發，利用餘數相同的概念，得到結果。

評析：本題對國中生而言偏難，因此答題人數僅有 4 人，平均得分為 4.75 分，答題優良者為福和國中胡明原同學。

問題編號
901904

某天蛋頭正在寫數學作業，調皮搗蛋的弟弟把他的作業本搶了去，在幾個數字上亂塗鴉，結果只見題目如下：

"若(x^4+★x^2+▲)可被(x^2+★$x+$▲)整除，……………"

蛋頭只記得兩個★處是相同數字，兩個▲處也是相同數字，請幫幫忙解救他，找出★和▲的數字吧！

參考解答：

假設★$=a$ 且▲$=b$

則由長除法的計算可得右式：

$$\begin{array}{r|l} & 1-a \\ \hline 1+a+b & 1+0+a+0+b \\ & 1+a+b \\ \hline & \quad -a+(a-b)+0 \\ & \quad -a-a^2-ab \end{array}$$

但當 $a=0$ 時，上式不正確

$\therefore$ 必須討論 a 是否為 0，同理 b 亦然

(1) $a=0$ 且 $b=0$ ：滿足條件，得 $(a,b)=(0,0)$

(2) $a=0$ 但 $b\neq 0$：則 $x^4+b=(x^2+b)Q(x)$

(A)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0-b \\
\hline
1+0+b & 1+0+0+0+b \\
 & 1+0+b \\
\hline
 & -b+0+b \\
 & -b+0-b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore b+b^2=0$

$b(1+b)=0$

$b=0$ 或 -1 (0 不合)

得 $(a,b)=(0,-1)$

(B)取 $x^2=-b$ (降次)

$\therefore x^4+b=(x^2)^2+b=(-b)^2+b=b^2+b=0$ 亦然

(3) $a\neq 0$ 但 $b=0$：則 $x^4+ax^2=(x^2+ax)Q(x)$

$x^3+ax=(x+a)Q(x)$

$\therefore (-a)^3+a(-a)=-a^2(a+1)=0$

$\therefore a=0$ 或 -1 (0 不合)

得 $(a,b)=(-1,0)$

(4) $a\neq 0$ 且 $b\neq 0$：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-a+1 \\
\hline
1+a+b & 1+0+a+0+b \\
 & 1+a+b \\
\hline
 & -a+(a-b)+0 \\
 & -a-a^2-ab \\
\hline
 & (a^2+a-b)+ab+b \\
 & 1+a+b \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore a^2+a-b-1=0$

$ab-a=0$

$a(b-1)=0$

$\therefore a=0$ (不合)或 $b=1$

$\therefore a^2+a-2=(a-1)(a+1)=0$

$\therefore a=2$ 或 -1

得 $(a,b)=(2,1)$ 或 $(-1,1)$

由上述(1)(2)(3)(4)情況可知 $(a,b)=(0,0)$ 或 $(0,-1)$ 或 $(-1,0)$ 或 $(2,1)$ 或 $(-1,1)$

解題重點：熟悉多項式的除法運算，以及因式分解的應用，並分析 a、b 的各種情

況。

評析：本題需就 a、b 的值分類討論，容易遺漏 $(a,b)=(0,0)$ 的情況，造成得分率不高的情形。本題答題人數為 23 人，平均得分為 1.83 分。

問題編號
901905

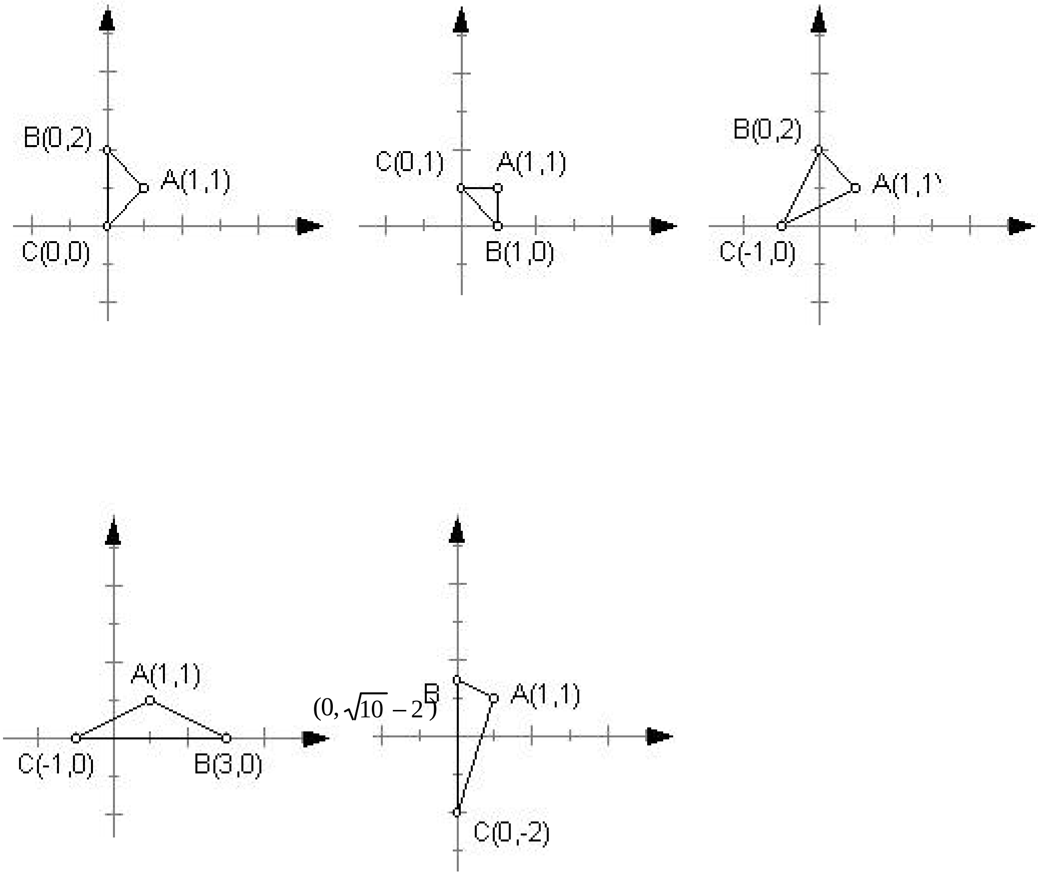
在平面直角座標系中，A 點座標為(1,1)，B 點與 C 點都在座標軸上（可能同在 x 軸或 y 軸上，也可能各在一個座標軸上），A、B、C 三點形成一個等腰三角形。
(3)請找出 5 個滿足以上條件的三角形。

(4)設以 A 為頂點，令 $\overline{AB}=\overline{AC}=d$，試用 d 的值來討論此類等腰三角形ΔABC 的個數。

(3)若以 B、C 為頂點，請討論這類的等腰三角形的個數。

參考解答：

(1)



(2)$\because$ $\triangle ABC$ **是以** A **為頂點，** $\overline{AB}=\overline{AC}$ **的等腰**$\triangle$

$\therefore B,C$ 分別落在以 A 為圓心，d 為半徑的圓上，

又 $\because B,C$ 須在座標軸上，故可用圓與 x,y 軸的相交情形，討論等腰 $\triangle ABC$ 的個數。

(a) $d=1$ 時，一解

(b) $1<d<\sqrt{2}$ 時，六解

(c) $d=\sqrt{2}$ 時，兩解

(d) $d>\sqrt{2}$ 時，六解

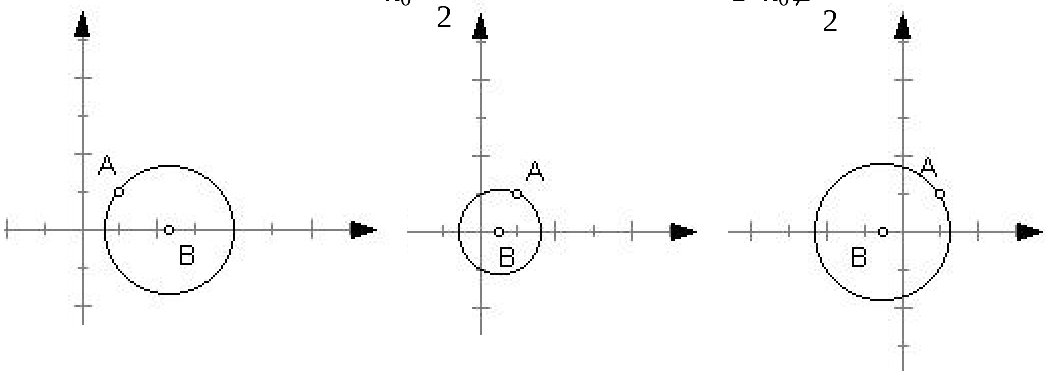
(3)設以 B 當頂點，取 $B(x_0,0)$

$\because \overline{BA}=\overline{BC}$

$\therefore A,C$ 均在以 B 為圓心，$\overline{BA}$ 為半徑的圓上

因此就 x_0 討論 $\triangle ABC$ 的個數。

$x_0 \geq 1$　　$x_0=\dfrac{1}{2}$　　$1>x_0\neq\dfrac{1}{2}$



$\triangle ABC$ 有兩種　　$\triangle ABC$ 有三種　　$\triangle ABC$ 有四種

解題重點：掌握等腰三角形的性質，能將距離相等的條件轉化為圓上各點，並懂得分就不同情況討論。

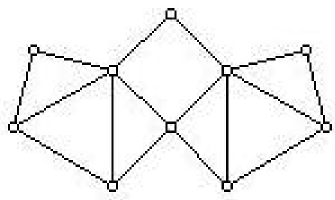
評析：大部分同學能做出第一小題，少數同學能夠將第二小題作完整的討論。本題答題人數共 12 人，平均得分為 2.916 分，答題優良者為福和國中胡明原同學。

中學生通訊解題第二十期參考解答

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912001

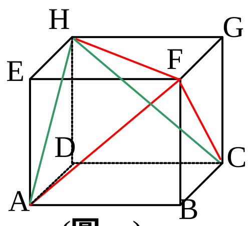
下圖一為一個七面體的展開圖：含一個正方形（邊長 1），4 個等腰三角形（斜邊 $\sqrt{2}$）與 2 個正三角形（邊長 $\sqrt{2}$），試求此七面體之體積？



(圖一)

參考解答一：

此七面體的體積為正方體 ABCDEFGH(**圖一**)**的體積扣掉** E-AFH **及** G-CFH **的體積**



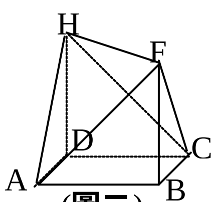
(圖一)

$1\cdot1\cdot1-(1\cdot1\cdot\frac{1}{2}\ \cdot1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot1\cdot\frac{1}{2}\ \cdot1\cdot\frac{1}{3})$

$=1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{6})=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，**體積為 $\frac{2}{3}$ 立方單位。**

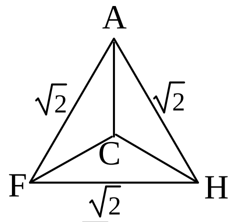
參考解答二：

依題意可得如圖二的七面體：



(圖二)

(1) **考慮正三角錐** A-CFH **的體積(如圖三)**



(圖三)

$\because \Delta$CFH **的高為** $\sqrt{2}\ \text{x}\ \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

且重心到邊的距離為 $\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{x}\ \frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{6}$

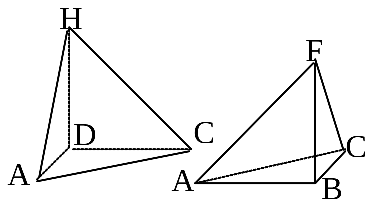
$\therefore \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2-(\frac{\sqrt{6}}{6})^2}=\sqrt{\frac{6}{4}-\frac{6}{36}}$

$=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ **(此為正三角錐** A-CFH **的高)**

=>**正三角錐** A-CFH **的體積：**$\sqrt{2}\ \text{x}\ \frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{x}\ \frac{1}{2}\ \text{x}\ \frac{2\sqrt{3}}{3}\ \text{x}\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(2) 考慮 F-ABC 及 H-ADC 兩直角三角錐的體積(如圖四)

其體積為：$2 \times (1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$



(圖四)

將正三角錐 A-CFH 的體積及 F-ABC 及 H-ADC 兩直角三角錐的體積加起來

$\Rightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$，所以此七面體的體積為 $\mathbf{\frac{2}{3}}$ 立方單位。

解題重點：掌握空間的能力。

評析：本題徵答人數共有 20 人，其中全對者共 19 人，包含建國高中黃彥豪；中山國中許朝雄；金華國中張皓鈞；江翠國中林鈺傑、侯天崎、莊智涵、許碩彥、陳建宏、黃俊嘉、簡農軒；福和國中李志軒、李冠霆、沈彥汝、周志遠、周育正、林昇誼、梁守辰、梅振群、黃彥銘等同學。本題平均得分為 6.65 分。其中，答題優良、解法富參考價值者有建國高中黃彥豪同學、福和國中林昇誼同學、福和國中黃彥銘同學等。

問題編號
912002

凡是可以表示成 $\frac{q}{p}$ 形式的數，稱為有理數（p,q 是整數, $p \neq 0$），凡是不能表示成 $\frac{q}{p}$ 形式的數，稱為無理數。設 $a < b$，且 a,b 均為無理數，請問 a,b 之間是否存在著無理數？若有，請找出一個介於 a,b 之間的無理數。

參考解答：

$\because a < \frac{a+b}{2} < b$

⇨ (1) 若 $\frac{a+b}{2}$ 為無理數，則 $\frac{a+b}{2}$ 即為所求。

⇨ (2) 若 $\frac{a+b}{2}$ 為有理數，則繼續取 $\frac{a+b}{2}$ 與 a 的中間數，即 $\frac{3a+b}{4}$

又 $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < b$，且 $\frac{3a+b}{4}$ 為一有理數與無理數之和,

$\therefore \frac{3a+b}{4}$ 為無理數，即為所求。

解題重點：兩邊夾的證明方法。

評析：本題徵答人數共有 19 人，其中全對者共 6 人，包含福和國中吳霽庭、李志軒、周志遠、林佑蓉、林佑蒔、梁守辰等同學。本題平均得分為 3.21 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有福和國中周育正同學。

問題編號
912003

CK 先生到處做生意，因此為了方便，他便在常做生意的地方買了房子，現在知道他在台北、台中、高雄、香港、上海、北京皆有房子，而且目前他住在台北，有一天他跟秘書說，他準備做一次五天的生意旅行，每天要到另一處據點，且住宿該處，但第二天一定要前進到別處，問：

(1) 若每天住的地方都不重複，有____________種行程安排。

(2) 若只規定隔天要去另一據點，則又有幾種行程可安排？

（注意：第五天他要回到台北）

參考解答一：

(1) **共有** 6 **天的行程要安排：題目明示第** 6 **天要在台北→只有** 1 **種選擇**

第 2 **天可去除了台北之外的其他** 5 **個地方→有** 5 **種選擇**

第 3 **天除了台北之外，且不可與第** 2 **天重複→有** 4 **種選擇**

依此類推→5x4x3x2x1x1=120，**共有 120 種安排。**

(2) A.**將台北除去：**

第 1 **天可去** 5 **地→**5 **種**

第 2 **天可去** 4 **地**(**不與前** 1 **天重複**)→4 **種**

第 3 **天可去** 2 **地**(**不與前** 1 **天，即第** 2 **天重複**)→4 **種**

依此類推 => 5x4x4x4x4x1=320

B.**考慮台北：**

由於相鄰兩天不可在同一地方→台北可出現在旅行中的第 2 **天與第** 3 **天**

台北若排在第 2 **天→**5x1x5x4x1=100

台北若排在第 3 **天→**5x4x1x5x1=100

=>320+100+100=520，**共有 520 種安排。**

參考解答二：

(1) **共有** 5 **天，**5x4x3x2x1=120，**共有 120 種安排。**

(2) **台北不可排在第** 4 **天→所有情形扣去第** 4 **天在台北的安排**

5^4-5x1x5x1-5x4x4x1=625-25-80=520，**共有 520 種安排。**

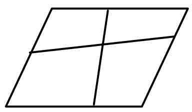
解題重點：排列組合的計數。要注意細緻的分類，不能重複算。

評析：本題徵答人數共有 25 **人，其中全對者共** 18 **人，包含江翠國中<u>林鈺傑</u>、<u>侯</u>**

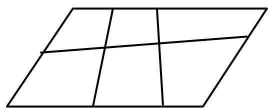
天崎、莊智涵、許碩彥、黃俊嘉、簡農軒；福和國中田雅汶、李志軒、李冠霆、沈彥汝、周志遠、周育正、林佑蓉、林佑蒔、林瑋詩、梁守辰、梅振群、黃彥銘等同學。本題平均得分為 5.64 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中許碩彥同學、福和國中梁守辰同學等。

問題編號
912004

小華喜歡畫畫，常常把哥哥的作業亂塗顏色，哥哥心生一計，便畫了圖形（如下圖二），告訴小華說” 如果有紅綠黃藍黑五色讓你去著色，但規定任二格擁有相同線段的不可以著同一種顏色，則可以怎麼著色？” 小華很快的塗了一種方式，但哥哥又說” 你必須把所有可能的圖案都畫出來，以後才可以亂塗我的東西”，試問：小華應該畫出多少種？又若改成如下圖三所示，則有多少種著色方法？



（圖二）



（圖三）

參考解答：

(1) 設左上為 A、右上為 B、左下為 C、右下為 D，如圖五

依題意，A 與 D 可同色，也可不同色

=>A=D， ADBC→5x1x4x4=80

=>A≠D， ADBC→5x4x3x3=180

80+180=260，所以小華應畫出 260 種。

A	B
C	D

(圖五)

(2) 設左上為 A、中上為 B、右上為 C、左下為 D、中下為 E、右下為 F，如圖六

(先考慮 ABED 的塗色方法，再加進 C 與 F)

由(1)可知 ABED 的塗色方法共有 260 種，

依題意，B 與 F 可同色，也可不同色

(或也可考慮 C 與 E 之間同色與不同色的情形)

=>B=F，FC→1x4=4

=>B≠F，FC→3x3=9

260x(4+9)=3380，所以小華應畫出 3380 種。

A	B	C
D	E	F

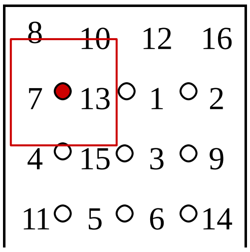
(圖六)

解題重點：加法原理和乘法原理的合併運用。

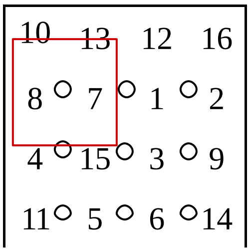
評析：本題徵答人數共有 22 人，其中全對者共 12 人，包含建國高中黃彥豪；江翠國中李育丞、莊智涵；福和國中吳霽庭、李志軒、沈彥汝、周志遠、周育正、林佑蒔、林瑋詩、梁守辰、梅振群等同學。本題平均得分為 4.68 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有建國高中黃彥豪同學、福和國中李志軒同學、福和國中沈彥汝同學等。

問題編號
912005

這是一個數字盤，現有紅白兩個神奇按鈕，每按一次，可令其周圍的四個數字逆時針旋轉一格，(如圖四，按下紅色鈕，四周的四個數字 8,10,13,7 逆時針轉一格，將數字的排列方式變為圖五所示)

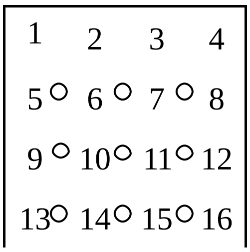


(圖四)



(圖五)

依照上述的遊戲規則，是否可經過若干次操作，將圖四中的數字盤變成下圖六之數字排列？如果可以，請告訴我，你是怎麼做到的？如果不行，請說明原因。



(圖六)

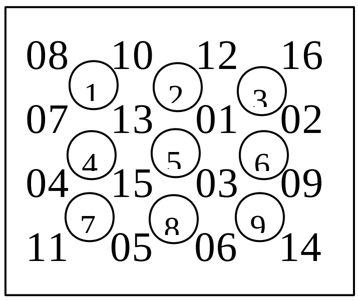
參考解答：

先將按鈕做編號，上至下、左至右從 A 編號到 I，

一次步驟是按一次按鈕(即周圍四個數字旋轉一格)

可採取下列步驟：

方式 1 是將數字較小的往上放、大的往下擺，然後調整位置



1. AAACCFFHHDDAAHHHIIIEECBFFFABC

DDDCCEEECCHEEEGGGDEHGHGGHHH
EEEFFFBFBBBGHEEEGGGFFFBFBBB→done

方式 2 **是先固定出第** 1 **行、再固定第** 2 **行，最後調整** 3、4 **行**

2. BBCCABDECCFFC
GDHDEEGHGIHIFFIIFFF
IGIHHHIIHGIHHGGGIHIIHHGGG→done

方式 3 **是先選定一些數字(如** 1、2)**將其轉至欲放的位置，再調整其他**

3. BBACCB FFCDEFFC GDHHDGHIIF HHGHGIHHIIHHHIH→done

解題重點：以同學作答的情況來看，本題是困難的題目。本題需要強的分析和構造能力。

評析：本題徵答人數共有 5 **人，其中全對者共** 3 **人，包含福和國中李志軒、周志遠、林昇誼等同學。本題平均得分為** 4.2 **分**。

中學生通訊解題第二十一期參考解答

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912101

對於自然數 n，**令** $f(n)$ **表示** n **的數碼和。例如** $f(2307)=2+3+0+7=12$。

(1)**若** n **是二位數 ，問** $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最大值是多少？最小值是多少？**

(2)**若** n **是四位數 ，問** $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最大值是多少？最小值是多少？**

參考解答：

(1)**令此二位數為** n=10x+y，**且** x≠0，x **為** 1~9 **的任意正整數、**y **為** 0~9 **的任意正整數，**

則 $\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{10x+y}{x+y}=10-\dfrac{9y}{x+y}$

欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最大值，即求** $\dfrac{9y}{x+y}$ **的最小值** ⇨ y = 0、x **為** 1~9 **的任意正整數，**

$\dfrac{9y}{x+y}=0$

⇨**此時** $\dfrac{n}{f(n)}=10-0=10$ **為最大值**

同理，欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最小值，即求** $\dfrac{9y}{x+y}$ **的最大值** ⇨ x = 1、y = 9，$\dfrac{9y}{x+y}=\dfrac{81}{10}$

⇨**此時** $\dfrac{n}{f(n)}=10-\dfrac{81}{10}=\dfrac{19}{10}$ **為最小值**

(2)**令此四位數為** n=1000x + 100y + 10z + w，**且** x≠0，
x **為** 1~9 **的任意正整數，**y、z、w **為** 0~9 **的任意正整數，**

則 $\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{1000x+100y+10z+w}{x+y+z+w}=1000-\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$

欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最大值，即求** $\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$ **的最小值**

⇨ y = z = w = 0、x **為** 1~9 **的任意正整數，**$\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}=0$

⇨**此時** $\dfrac{n}{f(n)}=1000-0=1000$ **為最大值**

同理，欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ **的最小值，即求** $\dfrac{900y + 990z + 999w}{x+y+z+w}$ **的最大值**

$$\Rightarrow \frac{900y + 990z + 999w}{x+y+z+w} = 900 + \frac{90z + 99w - 900x}{x+y+z+w}$$ **，所以取** $x = 1$，$y = 0$

$$= 900 + \frac{90z + 99w - 900}{1+z+w}$$

$$= 900 + 90 + \frac{9w - 990}{1+z+w}$$ **，所以取** $z = 9$

$$= 900 + 90 + 9 - \frac{1080}{10+w}$$ **，所以取** $w = 9$

$$= 999 - \frac{1080}{19} = \frac{17901}{19}$$

$\Rightarrow$ **此時** $\dfrac{n}{f(n)} = 1000 - \dfrac{17901}{19} = \dfrac{1099}{19}$ **為最小值**

解題重點：先將式子列出可觀察出變化的部分再予以討論，在多變數的情形下，以依序提出倍數的方法逐次減少變數個數來決定該變數適當的值。

評析：本題徵答人數共有 26 人，其中全對者共 4 人，包含江翠國中林志嘉；永和國中吳建澄；福和國中林昇誼；銘傳國中楊昀琪等同學。本題平均得分為 3.31 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中林志嘉同學、永和國中吳建澄同學、福和國中林昇誼同學、銘傳國中楊昀琪同學等。

問題編號

912102

分子為1的真分數稱為單位分數或埃及分數。試將 $\dfrac{1}{6}$ **寫成兩個埃及分數的和。(請證明你已經列出所有可能的答案)。**

參考解答：

令 a、b **為兩非零整數，且** $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow ab = 6a+6b \Rightarrow (a-6)\times(b-6)=36$

因此考慮 36 **的所有因數情形可得出以下幾種** ab **的組合方式(正配正，負配負)**

a.$(\pm1)\times(\pm36) \Rightarrow (6 \pm 1,\ 6 \pm 36) \Rightarrow (7 , 42)$ 、 $(5 , -30)$

b.$(\pm2)\times(\pm18) \Rightarrow (6 \pm 2,\ 6 \pm 18) \Rightarrow (8 , 24)$ 、 $(4 , -12)$

c.$(\pm3)\times(\pm12) \Rightarrow (6 \pm 3,\ 6 \pm 12) \Rightarrow (9 , 18)$ 、 $(3 , -6)$

d.$(\pm4)\times(\pm9) \Rightarrow (6 \pm 4,\ 6 \pm 9) \Rightarrow (10 , 15)$ 、 $(2 , -3)$

e.$(\pm6)\times(\pm6) \Rightarrow (6 \pm 6,\ 6 \pm 6) \Rightarrow (12,12) \Rightarrow$ **因為** a、b **為兩非零整數，所以**(0,0)**不可**

取
⇨共有 9 組解

討論 ab 之間的關係看看是否還有其他的可能組合：

$a=\frac{6b}{b-6}$ **，** $b=\frac{6a}{a-6}$ **因為 ab 兩者情形相同，所以只要討論其中之一即可。**

取 $a=\frac{6b}{b-6}$ **討論 ⇨** $a=\frac{6b}{b-6}=\frac{6b-36}{b-6}+\frac{36}{b-6}=6+\frac{36}{b-6}$

❶當 b > 6 時，a > 6 且 若 b 愈大，則 $\frac{36}{b-6}$ **會愈小**

由前面得到的 9 組解之中，b 的最大值為 42 ⇨ b > 42，則 6 < a < 7 ⇨此時 a 無整數解

❷當 1 < b < 6 時，由前面得到的 9 組解中可知有解

❸當 b < 0 時，a < 6 且 若 b 愈小，則 $\frac{36}{b-6}$ **會愈大**

由前面得到的 9 組解之中，b 的最小值為-30 ⇨ b < -30，則 5 < a < 6 ⇨此時 a 無整數解

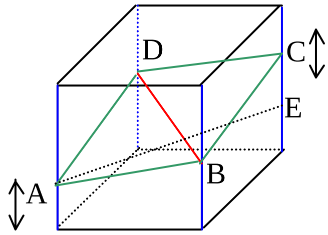
由❶❷❸可知，前面得到的 9 組解為所有的情形。

解題重點：找出 a、b 與 6 之間的關係後討論之(運用因倍數概念，並注意可以有負的情形)，對照討論出的結果再去擴大 a、b 的範圍嘗試還有無其他可能的組合。

評析：本題徵答人數共有 47 人，其中全對者共 42 人，包含民權國中練彥呈；民生國中曾懷德；介壽國中陳慧穎；興雅國中林昭平；敦化國中張雅棠；南門國中高嘉甫、張祺沅、蔡明茜、張鈞傑、林彥羽；蘭雅國中林婉茹、王筑萱、游捷名、傅偉哲；景興國中顏友信；中正國中周允中、潘柏翰；江翠國中林謙盈、李威霆、陳建宏、陳建彰、林易徵、簡志達、丁羚、李宛軒、林怡嫺、呂亞軒、李侑桂、黃子誠、林志嘉；海山國中江俊緯；永和國中吳建澄、吳俊諭；時雨國中吳俊廷；福和國中林昇誼、周志遠、沈彥汝；漳和國中陳信儒；銘傳國中楊昀達、鄭宇宏；光華國中范祐維；鳳西國中葉仲恆等同學。本題平均得分為 6.45 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有銘傳國中楊昀達同學、鳳西國中葉仲恆同學、永和國中吳建澄同學、永和國中吳俊諭同學、福和國中沈彥汝同學、銘傳國中鄭宇宏同學、光華國中范祐維同學等。

問題編號
912103

用一個平面去截邊長為1的正立方體，結果得到截面是一個菱形。問這個菱形的面積是多少？



(圖一)

參考解答：

令所得的菱形截面為 ABCD，如圖一，

AC 落在此正方體的一組平行對邊上，

BD 則落在此正方體的另一組同向平行對邊上，且 B、C 為中點，

以 $\overline{BD}$ 為固定不動的軸去作轉動，使 A、C 上下滑動，所出現的截面皆為菱形，

設 C 與 A 高度差 x，$0\leqq x\leqq 1$，且 $\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

由直角△ACE 可得到 $\overline{AC}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+x^2}=\sqrt{2+x^2}$

⇨菱形 ABCD 面積 $=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2+x^2}}{2}$，$0\leqq x\leqq 1$

⇨因此可得 $1\leqq$ 菱形 ABCD 面積 $\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解題重點：觀察平面如何在正立方體中截出菱形，可發現在正立方體中互相平行的邊可分為四邊一組，共三組相異的平行線，若選擇一組去截便可得出菱形，且所截出的高度會影響其面積，再嘗試菱形面積何時最大或最小得出所求範圍。多數同學僅看出面積最大與最小的菱形，無發現其動態的變化。

評析：本題徵答人數共有 27 人，其中全對者共 3 人，包含江翠國中陳建宏、陳建彰；蘭雅國中蔡明亨等同學。本題平均得分為 2.07 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建宏同學、江翠國中陳建彰同學、蘭雅國中蔡明亨同學等。

問題編號
912104

已知三角形中有一角為$180°-n°$，而且這個三角形最大角和最小角的角度差為$24°$。試求出n的範圍。

參考解答：

令此三角形中的最大角為 x^o，則最小角為 x^o-24^o，

①$180^o-x^o-(x^o-24^o)\leqq x^o$ ⇨ $68^o\leqq x^o$ ⇨ $44^o\leqq x^o-24^o$

②$180^o-x^o-(x^o-24^o)\geqq x^o-24^o$ ⇨ $52^o\geqq x^o-24^o$ ⇨ $76^o\geqq x^o$

⇨ $68^o\leqq x^o\leqq 76^o$ ， $44^o\leqq x^o-24^o\leqq 52^o$

所以此三角形的任一內角 A 皆為 $44^o\leqq A\leqq 76^o$，即 $44^o\leqq 180°-n°\leqq 76^o$

⇨$104^o\leqq n^o\leqq 136^o$

解題重點：運用角度“最大”與“最小”來取得 x 的範圍，然後用此範圍來找出 n。等號成立是多數同學疏忽的地方。

評析：本題徵答人數共有 26 人，其中全對者共 9 人，包含江翠國中陳建彰、李宛軒、黃子誠、林志嘉；海山國中江俊緯；福和國中沈彥汝；積穗國中蕭屹宏；銘傳國中楊昀達；興雅國中林昭平等同學。本題平均得分為 3.96 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、江翠國中林志嘉同學等。

問題編號
912105

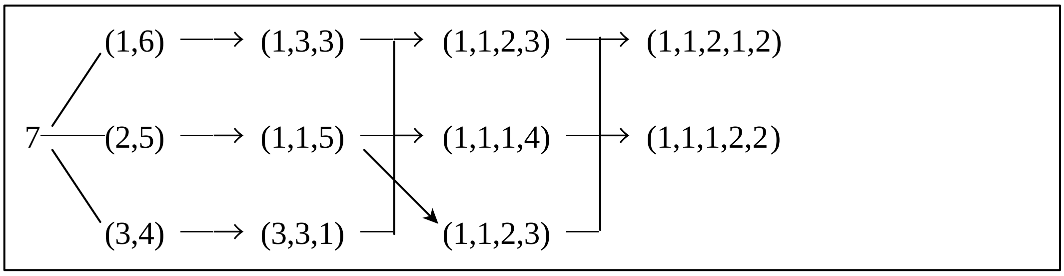
今有 n 個一元硬幣疊成一疊，我們稱這疊硬幣高度為 n。小明和小華玩以下的遊戲：小明先將這疊硬幣分成高度較小的兩疊(兩疊高度可以不相同)；小華接著任選一疊高度 ≥ 2 個硬幣，再將之分為兩疊(兩疊高度可以不相同)。如此兩人輪流下去，每一次都是選一疊高度 ≥ 2 的硬幣，將之分成兩疊(分成的兩疊高度可以不相同)。第一個將所有硬幣分成高度只有 1 或 2 的人獲勝。

(1)當 $n=7$ 時，誰有必勝策略？為什麼？

(2)當 $n=2002$ 時，誰有必勝策略？為什麼？

參考解答：

(1)後手(小華)勝：



(2)先手(小明)勝：

共有 2002 個硬幣，先手只要將其硬幣平分成(1001,1001)，接著後手怎麼分，先手就模仿其分法一直進行。

推廣：若將硬幣個數考慮成 n 個，此時我們可以將 n 分成奇偶兩種情形

① n 為偶數→先手必勝：

先手可將 n 分為相同的兩份(平分)，接著後手怎麼分，先手就模仿其分法一直進行。

② n **為奇數→後手必勝：**

❶**先手將** n **分為一堆奇(稱** O_1)**一堆偶(稱** E_1)**，其中** $O_1>3$**，則後手將** E_1 **平分成兩份** E_2、E_3

→**若先手分** E_2(**或** E_3)**，則後手模仿先手去分另一偶數堆** E_3(**或** E_2)。

→**若先手分** O_1 **成一堆奇(稱** O_2)**一堆偶(稱** E_2')**，其中** $O_2>3$**，則回到** O_1、E_1 **的情形；其中** $O_2=3$**，則可參照❷的方法進行。**

❷**先手將** n **分為一堆奇(稱** O_1)**一堆偶(稱** E_1)**，其中** $O_1=3$**，則後手將** E_1 **分為** $3+O_2$(O_2 **為奇數)，維持** O_2 **為奇數的狀況，即維持偶數堆** 3 **及一堆奇數。**

解題重點：考慮硬幣個數為奇或偶的情形予以討論，注意出現 3 **的情形。**

評析：本題徵答人數共有 15 **人，其中全對者共** 3 **人，包含江翠國中陳建宏；光華國中范祐維；南門國中高嘉甫等同學。本題平均得分為** 3.20 **分。**

後測試題

1. **圓內接四邊形**$ABCD$**，其對角線交於**E**。令**F,G**分別為線段**AB,CD**的中點。過**E,F,G**分別作直線**AD,BD,CA**的垂線。證明這三條垂線共點。**

2. **已知**$w=\cos\dfrac{2p}{n}+i\sin\dfrac{2p}{n}$**，**$n$**是自然數。**

   (1) **若**$n=2^6$**，求**$(1+w)(1+w^2)(1+w^4)(1+w^8)(1+w^{16})(1+w^{32})$**值。**

   (2) **若**$n=3^k$**，**k**是自然數，求下式之值：**

   $$(1+w+w^2)(1+w^3+w^6)(1+w^9+w^{18})\cdots(1+w^{3^{k-1}}+w^{2\cdot 3^{k-1}})$$

3. **對於自然數**n**，令**$f(n)$**表示**n**的最大奇因數。例如**$f(5)=5, f(6)=3$**。證明**

   $$f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\geq\frac{n^2+2}{3}。$$

   並問等號何時成立(要有證明)。

4. **設**$a_1,a_2,\cdots,a_n$**為**n**個兩兩不連續的相異正整數。證明**

   $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k{}^2}\leq\frac{3}{2}$$

5. **圓周上有**n**個點，兩兩連線，每條線塗上紅色或綠色。一個三角形如果三邊顏色都相同，且以這**n**個點的其中三點為頂點，就稱為一個同色三角形。(兩同色三角形可以有部分頂點重複，顏色也可以不一樣)。**

   (1)**若**$n=6$**，證明至少可以找到兩個同色三角形。**

   (2)**若**$n=7$**，證明至少可以找到三個同色三角形。**

附件二：前測結果及後測結果

A 組

編號	姓名	前測分數	後測分數
1	歐陽奕	95	98
2	王琨傑	60	98
4	林瀚亼	60	49
5	莫立平	60	49
6	鄭宇翔	25	77
7	楊宗諭	55	42
8	羅子皓	0	91
11	賴俊儒	25	56
15	林辰修	25	49
16	張晏溥	25	49
17	陳朕疆	25	49
18	劉胤廷	25	49
19	李駿廷	25	49
20	周及人	0	70
21	黃明山	5	63
27	何雨帆	5	49
29	鄭彥彤	0	49
31	陳欣銳	25	21
37	胡明原	25	14
38	郭迺中	35	0
42	林育生	20	7
44	王子威	25	0
45	張貽能	25	0
46	游昱翰	25	0
51	陳代樾	0	14
52	吳哲榕	0	14
53	許銘麟	0	14
54	潘子融	0	14
55	鞏建榮	0	14
60	張淳皓	0	0
61	劉昱承	0	0
平均		22.41935	37.03226
標準差		23.03122	30.02632
變異係數		102%	81%
相關係數			0.404312

B 組

編號	姓名	前測分數	後測分數
3	陳昱翬	60	49
9	邱之擎	0	84
10	林俊緯	60	21
12	陳俊曄	0	77
13	詹宗諭	25	49
14	劉旺達	25	49
22	蔡淯楷	25	42
23	黃俊達	0	63
24	蔡淳晟	25	35
25	廖鴻仁	10	49
26	桂其安	35	21
28	楊子德	0	49
30	陳建甫	0	49
32	田曜誠	25	14
33	吳冠德	25	14
34	鄭皓中	25	14
35	趙子傑	25	14
36	黃昱嘉	25	14
39	梁育誠	5	28
40	張顯之	25	7
41	王偉任	0	28
43	莊凱壹	25	0
47	林承瑩	0	21
48	江駿宏	0	21
49	蕭懋翔	5	14
50	宋家橙	0	14
56	曾德晨	0	7
57	楊漢清	0	7
58	周晏陞	5	0
59	王皓銳	0	0
平均		15.16667	28.46667
標準差		16.90578	22.27814
變異係數		111%	78%
相關係數			-0.09004

資料分析及判讀：

	A 組(實驗組) 31 人	B 組(對照組) 30 人
前測平均	22.42	15.17
前測標準差	23.03	16.91
前測變異係數	102%	111%
後側平均	37.03	28.47
後測標準差	30.03	22.28
後測變異係數	81%	78%
前後測之相關係數	0.40	-0.09

1. (1) A 組(實驗組，採多元學習)前後測之相關係數為 0.4，屬中度正相關。

   (2) B 組(對照組)前後測之相關係數為 –0.09，幾乎可視為無關。
2. 以相關係數觀之，足證多元學習對提升數學能力有正面的影響。
3. A 組前測之變異係數為 102%，後測之變異係數為 81%
4. A 組前測之變異係數為 102%，後測之變異係數為 81%

可能之誤差來源：

1. A 組(實驗組)之同學，其學習特質本來就比較主動積極。
2. A 組(實驗組)之同學，其起點數學能力平均較高(參考分數表)。
3. 實驗之時程跨度太長，變因增加。
4. 以上之誤差難以避免，值得作更細緻的分析與探討。

附件四：活動內容：讀書會資料

導讀：游森棚老師

作者哈雷爾(David Harel) 自序

電腦真是神乎其技，它無疑是二十世紀最重要的發明之一，電腦深入我們生活的各個層面，我們的生命、財產以及生活品質，都與這機器脫不了關係。然而，就在我們持續享受電腦科技帶來的福祉之際，也該是檢討一下電腦的底限的時候了。電腦真的是萬能的嗎？

全球知名電腦科學家哈雷爾在本書中闡釋一個最根本卻也最為人忽略的一面：電腦與生俱來的限制。即便是把所有最棒的硬體、軟體以及電腦工程師全部聚集起來，我們還是得面對一個現實存在的問題：電腦也有搞不定的時候！

就在二十一世紀剛開始時，且聽聽哈雷爾告訴我們電腦這個上個世紀的偉大智慧產品，遺留下哪些惱人、卻又引人深思的疑難雜症待處理。

(以下摘錄自《電腦也搞不定》 作者哈雷爾(David Harel) 自序)

前言

1984 年《時代》雜誌某次封面故事以電腦軟體為主題，在這篇精彩的文章裡，引用了一位軟體雜誌主編的話：「只要把恰當的軟體放進電腦裡，它就會做任何你想叫它做的事。機器本身的性能也許有一定的極限，但是能用軟體做的事卻沒有極限。」

錯了，而且大錯特錯！我這本書一言以蔽之，就是要來描述與解釋一些事實，以駁斥甚至粉碎上面那種說法。

當然，電腦是很了不起的東西。它無庸置疑是二十世紀最重要的發明，巨大而不可逆轉地改變了我們的生活方式，並且多半是往好處改變。不過這只是消息中好的一面，大部分談電腦的書都在表揚好的這一面。我這本書要傳播的卻是壞

消息，檢討一下事情負面的真相。

電腦挺貴的，這已經是壞消息了。此外它還讓我們飽受挫折：替它寫程式很費勁，用起來有時又很困難；它又很能吸引人，讓我們忽略更重要的事；它會出錯；它會當機；它會感染病毒；等等，等等。然而這本書裡關心的壞消息倒不是這類掃興的事。這本書的目的是要解釋與闡明電腦世界裡最重要、最基本的事實之一：電腦在先天上是有限制的。

當人們沒辦法讓電腦順著自己的意思運作時，通常會找到三種藉口：錢不夠、時間不夠、腦筋不夠。如果錢多一些，就可以買更大更精良的電腦，用更好的軟體來支援；如果年紀輕點，或者壽命長點，就有時間等待極度耗費時間的程式跑完；如果腦筋更聰明點，就可以找到一般人想不到的解決辦法。這些都是有力與正確的論點，我們並不想辯駁：這三種資源如果能有更充沛的供給，確實可以有效助我們一臂之力。然而大致上來說，我這本書並不在討論這一類的匱乏。我們所討論的壞消息均屬經過證實、恆久不變、顛撲不破，都涉及電腦根本無法解決的問題，與硬體、軟體、聰明才智或耐心毅力都沒關係。當我們說「經過證實」，指的是真正經過數學的證明，而不光是泛泛的經驗談。

我們為什麼會對壞消息感興趣呢？計算機科學家不是應該花時間把東西做得更小、更快、更簡單、更好用、功能更強嗎？不錯，他們是應該這麼做，大多數的計算機科學家也確實在這麼做。不過即使如此，自 1930 年代開始，愈來愈多研究者非常努力嘗試想了解錢幣的另一面，也就是了解電腦天生的弱點。

這類研究的動機來自四個方面：

滿足知識上的好奇心。就像物理學家想判定宇宙的終極大小，或是物理定律的基本限制一樣，計算機科學家想發現什麼能計算、什麼不能計算，而如果能計算時又要花多少成本。1

避免徒勞無功。許多人，甚至包括專精的電腦專家，都嘗試解決一些計算問題，而這些問題剛好都會帶來慘透了的壞消息。我們愈理解這些問題的本性，就愈不需要浪費時間與氣力了。

促進發展新的典範。如果沒有壞消息的刺激，像平行算法、隨機化、探索法、量子與分子計算等有潛力又令人振奮的計算科學新研究領域，就不會發展起來。

讓不可能的成為可能。讓不可能的成為可能？！這不是有點太矛盾了嗎？我們如何能從壞消息裡獲得利益呢？謎底要到第六章才揭曉，我們此刻只能說這是我們故事裡比較令人感覺始料未及，且令人驚喜的有益的一面。

動機講得夠多了，至於我們所謂壞消息的本質，可以從那些嘗試強化電腦能力，使它達到人類智能的大量精彩研究中找到。在這些研究的發展過程中，就產生電腦計算能力侷限的問題，像是電腦能不能經營公司？能不能進行醫療診斷？能不能創作音樂？能不能談情說愛？雖然已經達成一些前景樂觀、令人稱奇的進

展（不過，最後一項的進步最為遲緩），但是這些問題的問法都太不精確且籠統含糊。除了本書最後一章外，我們不去談這類問題。反之，我們將集中注意力在精確定義的計算問題上，它們都天生具有明確的目標。因此就可以精確地說明白，這些問題能夠、還是不能夠圓滿解決。

我們所討論的問題並不是可辯論的，也不涉及哲學性、擬科學性的論證。我們專注於可嚴密敘述、可用數學證明的鐵的事實。你不會花功夫去找內角和是 150 度或 200 度的三角形（雖然從來沒有人度量過所有的三角形），只因為早已證明這種三角形不可能存在。同樣的，當一些我們將會討論的計算問題被證明是無解時，再想去尋找答案就是毫無意義的了。類似的情形也可以推演到某些有解答的問題上，它們通常被證明需要用到超乎常理的巨大電腦（譬如，體積比已知宇宙還大得多），或者需用掉極不合理漫長的計算時間（譬如，要花比從大霹靂至今更長的時間）。我們也會討論很多這類的問題。

絕大部分的人都不曾覺察到本書所探討的問題。就像《時代》雜誌引言所顯示，連計算行業裡的專業人員，也毫無警覺，這實在是很不幸且讓人吃驚的狀況。假如壞消息是新近發現的現象，因此沒有太多人認識它，或許還可以理解。但是事實上我們要講的故事，有些已經有 60 幾年之久，早在電腦問世之前就已存在。而其他的則在近 30 年中逐步顯現。

坦白說，我們這些作計算機科學研究的人也應該受到責備，我們太沒有花功夫向大眾解釋、舉例、描繪這個學門的基本知識，以及強調其負面的事實。導致大眾幸福安詳，充滿崇敬的隨著軟、硬體的技術精進，而沈醉於嶄新應用功能的亢奮中，憧憬著由即時通訊、多媒體、虛擬實境、人工智能、全球網路革命等等所帶來的未來世界。

雖然盛會不必就此散席，而且我們本就該致力發展更大更好的事物。但是，適度的謙虛是有必要的：電腦不是萬能的——它還差得遠呢！而且這些問題真的存在，永遠不會消失，想躲也躲不掉。

注釋：

1 如果想對科學家感興趣的限制性結果有較通盤的了解的話，請參閱 Barrow, J. D. (1998). Impossibility: The Limits of Science and the Science of Limits. Oxford University Press, Oxford.

2 我們指的當然是平面的三角形。在球面或近乎球面的曲面上，例如地球的表面，三角形三內角和會略大於 180 度。

(撰文者為《電腦也搞不定》一書作者)

附件五：活動內容：傅承德教授演講資料

財務統計淺談

中央研究院統計科學研究所
傅承德　研究員

在金融市場上的理論探討與實務操作中，我們經常會碰到下列的問題：

—**金融市場在不確定**(uncertain)**的情況下，是如何運作？**
—**資產**(asset)**的價格是如何訂定，以及它隨著時間的走勢又是如何？**
—**資產未來的價格是否為可預測的**(predictable)**？**

基本的概念與理論

在描述某一種資產價格的走勢及其衍生性金融商品(derivatives)**的定價時，我們採用"市場無套利(no arbitrage)"的觀點。**

從統計的角度來說，此一經濟假設是表示"存在一無風險機率測度(risk neutral probability measure)，並且其經折現的價格走勢(discounted prices)**相對此一測度為一平賭過程(martingale)"。**

大綱

1.**介紹市場價格報酬率**(return)**的隨機漫步**(random walk)**假說，並舉台積電股價為例。**
2.**介紹效率市場**(efficient market)**的基本概念，及其統計模型。**
3.**介紹歐式選擇權**(European option)**及其定價公式，並與大一微積分做一簡單的類比。**
4.**結論及介紹一些較深入的課題。**

附件七：活動內容：獨立解題資料

1. **求出所有的銳角**a **使得**

$$\cos a\cos 2a\cos 4a=\frac{1}{8}。$$

2. (1)**求出所有的正整數**m**滿足「若正整數**x**使得**$g.c.d.(x,m)=1$**，則**$x^2\equiv 1(\bmod m)$**成立」。**
   (2)**如果**$n+1$**是**m**的倍數，且正整數**m**滿足「若正整數**x**使得**$g.c.d.(x,m)=1$**，則**$x^2\equiv 1(\bmod m)$**成立」，證明**n**的正因數和是**m**的倍數。**
   (3)**舉個例子說明小題**(2)**中的"如果**$n+1$**是**m**的倍數"不可省略。**

3. **非等腰直角三角形**ΔABC**，**$\angle CAB=90°$**。內切圓**I**切**AB, AC**於**U,V**。外接圓**O**在**A**的切線交**$\overleftrightarrow{UV}$**於**S**。**
   (1)**證明**SI**和**BC**平行。**
   (2)**證明**S**到直線**AB, AC**距離差的絕對值等於內切圓**I**的半徑。**

4. **正方形**$ABCD$**，內切圓**O**。**l**是圓**O**的切線，**A', B', C', D'**是**l**上的點，使得**AA', BB', CC', DD'**和**l**垂直。證明**

$$AA'\cdot CC'=BB'\cdot DD'$$

5. **費波那契數列**$\{f_n\}$**定義為**$f_1=f_2=1$**；**$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$**，**$n=0,\pm1,\pm2,\cdots$**。又令實數**f**是方程**$x^2=x+1$**的正根。**
   (1)**證明對所有正整數**n**，都有**$f_{-n}=(-1)^{n+1}f_n$
   (2)**證明對所有整數**n**，都有**$f^n=f_nf+f_{n-1}$
   (3)**令**$G_n=f_{n+u}f_{n+v}$**，其中**u,v**是整數，證明**

$$G_{n+3}+G_n=2(G_{n+2}+G_{n+1})$$

6. $0<a<b$。n**為正整數。證明不等式**

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt[n]{\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{(b-a)(n+1)}}\le\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{2}}.$$

7. **將自然數**m**寫為**2**的乘冪與奇數的乘積，即**$m=2^t\cdot k$**，其中**t**為非負整數，**k**為正奇數。令**$f(m)=t$**，且令**$S_n=\sum_{m=1}^{n}f(m)$**。**

(1)求 S_{50}

(2)設 $n=2^p$ (p 為非負整數)，請求出 S_n (用 n 表示)

(3)證明：$\frac{n-1}{2} \le S_n \le n$

8. 設 $a,b,c,\cdots,j$ 是不同的自然數，他們寫成右圖的形狀：已知在圖中，被兩個箭頭指向的每一個數，等於這兩個箭頭起點自然數的和（例如 $f=e+h$）。問當 d 取怎樣的最小值時，可能會有這樣的寫法?

$$\begin{array}{ccccccc}
a & \rightarrow & b & \rightarrow & c & \rightarrow & d \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & e & \rightarrow & f & \rightarrow & g \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & h & \rightarrow & i \\
 & & & & & & \uparrow \\
 & & & & & & j
\end{array}$$

9. 已知銳角 ΔABC 的面積為 S，且外接圓之半徑為 R，點 D,E,F 分別在 BC,CA,AB 邊上。試證：AD,BE,CF 為 ΔABC 的三高的充要條件是

$$2S = R(EF+FD+DE)$$

10. 令 $f(x)=x^3+ax^2+bx+b$。求出所有整數數對 (a,b) 使得 $f(x)$ 可分解為三個整係數一次因式的乘積。

11. (1) ΔABC 是任意三角形。以 AB,BC,CA 為等腰三角形之底邊，向外做等腰三角形 $\Delta FAB,\Delta DBC,\Delta EAC$ 使得 $\angle D=\angle E=\angle F$。證明 AD,BE,CF 三線共點。
(2) ΔABC 是任意三角形。以 AB,BC,CA 為邊，向外做正方形 $ABFG,BCED,ACKH$。AD,BK 交於 P，AE,CF 交於 Q，BK,CF 交於 R。證明 $AR\perp PQ$。

12. (1) $1\le m\le n$，m,n 都是整數。證明

$$\sum_{i=1}^{n} i(i-1)(i-2)\cdots(i-m+1) = \frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m+1}.$$

(2) $1\le r\le n$，考慮所有 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的 r 個元素的子集（稱為 r 元子

集），並將每個r元子集中的元素由小到大排列。對於$1 \le i \le r$，令t_i表示r元子集中的第i小的元素。又令$T(n,r,i)$為所有這些t_i的算術平均數。求出$T(n,r,i)$。