從裁縫師問題說開去

常文武 [1] 張惟淳 [2*]

[1] 中國上海市現代教育技術中心
[2] 台南市立後甲國民中學

在精打細算的媽媽手裡，各種花花綠綠的破布頭都是寶。它們可以被縫成孩子們丟來丟去的沙包，或是被拼接成孩子上學背的書包甚至縫製出具有鑲嵌對稱美的椅墊。

問題來了：可否把下圖中四塊形狀各異的「破布頭」不浪費地拼接成一個正方形椅墊呢？

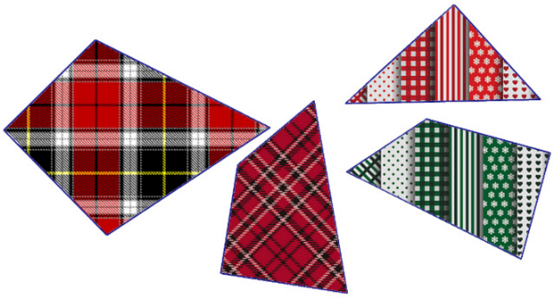


圖 1

這個問題來歷非凡，它源自英國大名鼎鼎的謎題大師亨利杜登尼。早在 1902 年亨利杜登尼先生在他的謎題專欄中提出一個與上面問題相關的問題，並給出一個奇妙的解答。根據他提供的答案，上面的四塊破布頭不但可拼出正方形椅墊，甚至還可以拼成一個正三角形掛毯。答案如下圖：

圖 2

杜登尼原本的問題正是：如何將一個正三角形切割為四塊，使得它們可以拼出一個正方形？

*為本文通訊作者

從公佈的答案來看，這四塊破布頭並不是隨意找來的，它們之間的邊角有內在的關聯。也許細心的讀者比照答案中四塊破布頭的位置和重合點，可發現那些內在關聯的端倪。的確，透過深入的分析，近 120 年來人們非但認識了從正方形（或正三角形）裁切出 4 塊變正三角形（正方形）的正確辦法，還對這一問題作了更多演繹和拓廣。

演繹和拓廣的一個嘗試是將破布頭改為硬質的板材，並在拼好的圖形（無論正方形還是正三角形）外輪廓的 4 點選取 3 個位置安裝鉸鏈，使得變換更加流暢和不那麼令人煞費苦心。

另一個演進方向是將被切割的材料從正方形推廣至任意的四邊形，如平行四邊形，梯形等。或者乾脆將拼出的靶心圖表形（正三角形）也改為任意的三角形。

第三種思考來自作者之一的張惟淳老師。他受到艾雪著名的畫作啟發，將切割正方形的切痕改變為曲線，這樣可使拼出的圖案不再是三角形，而是一隻可愛的貓咪的輪廓。

本文介紹原始的杜登尼問題的解法由來和演進的幾種情況，順便看出百年多來該問題熱度不減的奧秘所在。

壹、原始問題的近似解

首先為了便於觀察和記錄，隱去花布的圖案並用 A～O 的 15 個字母標記圖 2 中的每塊圖形的頂點如下：

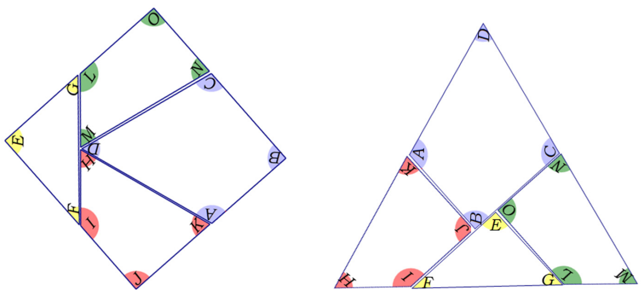


圖 3

對照圖 3 中左右兩圖，仔細比對就已經能發現諸多的端倪了！

根據「能拼合即相等」的道理，從圖 3 左可得： (i) $\overline{GF}=\overline{IH}+\overline{ML}$，(ii) $\overline{MN}=\overline{CD}$，(iii) $\overline{AD}=\overline{HK}$。從圖 3 右可得： (iv) $\overline{AB}=\overline{JK}$，(v) $\overline{LO}=\overline{EG}$，(vi) $\overline{IJ}+\overline{BC}=\overline{NO}+\overline{EF}$。

再加上正方形和正三角形的形狀要求，這些便是這個切割所有的基本特徵了。理論上說，只要滿足這六條要求就應該能變這個戲法了。

讓我們省去繁瑣冗長的分析，直接向讀者介紹一個便於實現的正方形到正三角形切割的近似方法。讀者只要照圖 4 所示的過程找來一張 15cm 見方的正方形雙色紙來操作，就完成一個滿足以上幾乎全部條件（除了正三角形）的近似裁切！

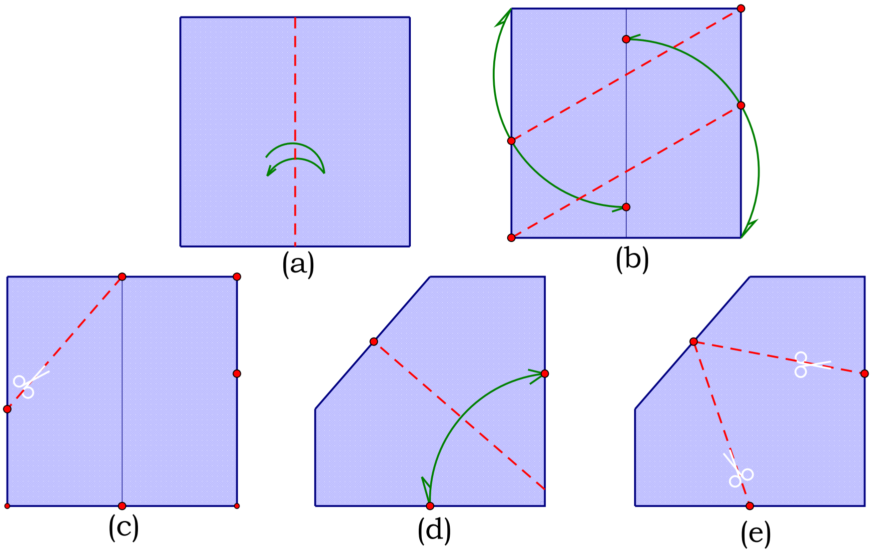


圖 4

為了方便不諳摺紙記號的讀者理解，這裡稍加解釋圖中 5 個摺剪步驟的涵義：

（a） 正方形紙左右對摺。

（b） 在摺痕過右上角的前提下，將左上角摺至前步摺痕線上，產生摺痕後打開。同理操作右下角。

（c） 沿著正方形上邊緣和左邊緣的已有摺痕端點聯線剪下一角。

（d） 將正方形右邊緣和下邊緣的已有摺痕端點對合摺疊，產生摺痕與前步切痕邊的交點後打開。

（e） 沿著前步交點與右邊緣以及下邊緣的聯線剪開，使得該五邊形變為三塊四邊形。

裁切完成後按照圖 3 標注一下字母，就可來試試看，可否用 4 塊多邊形紙片拼出圖 2 中的三角形呢？

這裡要提醒讀者的是，從單位正方形出發的第一道切痕長，經計算其長度是$\sqrt{\frac{7}{12}}$，第二、三道切痕長則均為$\frac{1}{4}\sqrt{\frac{193}{21}}$，於是用餘弦定理可算得拼出的等腰三角形的頂角餘弦為$\frac{95}{193}$，它與 1/2 非常接近。所以拼出的只是一個頂角高度接近 60°的等腰三角形，並非正三角形，只不過誤差微乎其微。文末附切痕符合切拼正三角形的精確摺法。

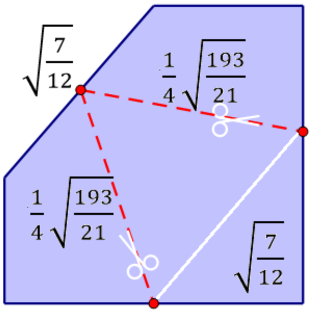


圖 5

貳、加裝一個簡易的鉸鏈

由於零散的四片小紙片容易混淆不易操作，下面介紹一種方便的加裝鉸鏈的方法來改進操作的不便。

- 材料與工具：棉紗線、透明膠帶、剪刀

柔軟堅韌的棉紗線材料到處都有，選取長度約 10 公分的一小截棉紗線就夠了。另外取寬度 1.5cm 的強力膠帶備用。

方法於步驟：

1、取 10 公分左右的膠帶一段。

2、將棉紗線貼於膠帶的膠面一側的中心線位置。

3、用剪刀將貼有棉紗線的膠帶截成等長的三段。

4、在拼好的正方形圖形的四周任意選取三處，用上述膠帶緊貼邊緣包裹，確保棉紗線與邊緣重疊後壓平。

沿著包裹的三處切縫小心地將膠帶剪開至紙的邊緣附近，但需注意千萬注意不要剪斷棉紗線。

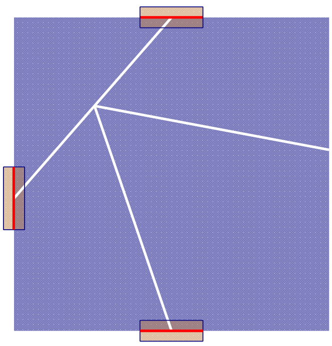


圖 6

完成後試著將放置在桌面上的連體紙片從唯一的開口處拉開，再反方向拼合成正三角形。

是否發現從正方形到正三角形的變化變得便捷了許多呢？

一個有趣的問題：如果將最後一個口子也粘上，形成一個閉合的環，那麼這樣的一種結構還能變化出兩種狀態嗎？

答案是 yes。

實現切換的方法有兩種：

1、讓紙片環從中心向外側（空中）翻轉，使它們像水開時翻騰的水花那樣運動。再次變到同一平面時外輪廓就切換好了。

2、從相對的一組鉸接位置拉伸（或擠壓），使兩塊板從另外兩塊板的下面鑽過去，忽略紙的厚度的話，整個過程可以認為是在同一平面內完成的。

這種鉸接變換的切割方法在國際上通常稱為是 hinged dissection puzzle。

參、平行四邊形到三角形的切割

從鉸鏈的操作過程可見，無論拼出的是正方形還是正三角形，鉸接的四個端點（一組對邊中點和另一組對邊的中心對稱點）始終構成一個平行四邊形，不難證明這塊平行四邊形的面積占了總面積的一半。兩種圖形能夠互相切換的關鍵正在於此。

如果僅保留這個限制，從任意平行四邊形四邊找到這樣的四點作一個類似 K 字形的切割，會否也能拼一個完整的三角形呢？

的確如此！

請讀者按照下面的圖示來試試。

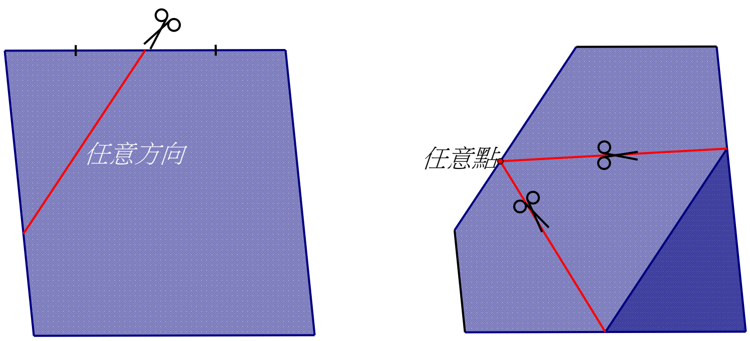


圖 7

圖 7 相應的操作步驟如次：

1、從平行四邊形任意一邊的中點向鄰邊任意方向剪一刀。

2、將剪下的三角形旋轉 180°放置到對角所在的角落。

3、從五邊形的切痕上採任意點向角落的三角形最近的兩頂點剪出第二、第三刀。

請讀者們實際操作看看，可以發現拼好後的三角形是一般三角形而非等邊或等腰三角形。

既然平行四邊形到某個一般的三角形的切拼變換可以如此輕易實現，那如果進而要求切拼完成的三角形的三個角各等於規定的已知角，K 形切割能辦到嗎？

這個問題的答案難以一言以蔽之，因為在某些情況下甚至可能無解。例如從長寬 2：1 的矩形中 K 字切拼出正三角形是不可能的，而允許切拼正三角形的最狹長的矩形是$\sqrt{3}:1$。下圖顯示 K 字切痕快要變為「箭頭」形切痕了。

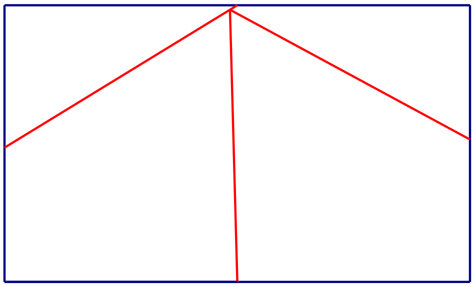


圖 8

而對於有解的情況，答案也可能有多個，這裡也請讀者們自己嘗試看看。

肆、向曲邊切痕推廣

荷蘭數學版畫大師艾雪的傑作《騎士》（horseman，1946）反映了鑲嵌藝術中的某種「反射+平移」對稱性：從一個完整的騎士圖案上可以分離出 4 個關鍵點構成一個箏形（如圖 9 中所示）。將它所框的圖形左右翻轉再平移至上下左右就可拼出所有畫面中的部分。

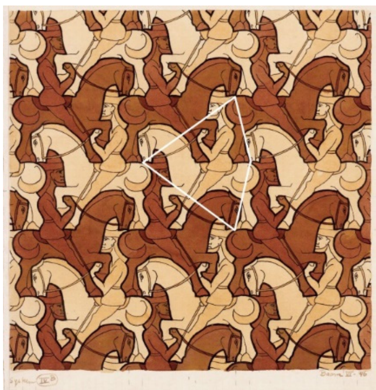


圖 9

受此啟發，我們在 K 字切割重新拼圖過程中已知各塊之間是旋轉平移的關係，所以或許也可以出現輪廓的巧妙安排實現艾雪的版畫幻境。

的確如此，我們試著刻畫一隻藏在破碎玻璃下面的貓的側影輪廓。在圖 10 中左邊是一塊打碎了的正方形玻璃，右邊是重新安排 4 塊碎片後形成的一隻貓咪。瞧它！頑皮的爪子向前伸出，昂首凝視著什麼。也許是伺機捕食一隻飛過的蝴蝶，或是棲息樹上的小鳥呢！

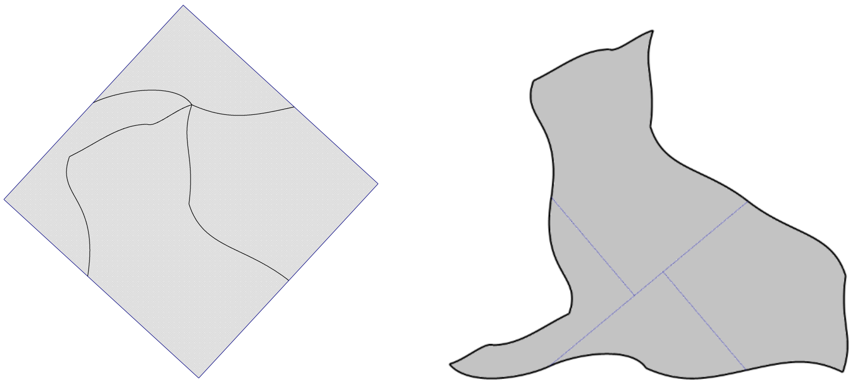


圖 10

這個作品中玻璃的碎紋並不能任意產生，而是分段符合旋轉對稱的關係。貓咪的嘴部和脖子部分的輪廓與貓前腳的上部輪廓中心對稱；貓伸出的腳下方輪廓前後兩段中心對稱；貓的後背上下兩段中心對稱；貓的身體下方按照前後兩段對稱。這些對稱的曲線分界點或對稱中心正好是正方形到三角形 K 形切割的 5 個關鍵點。

不過要刻畫出一隻惟妙惟肖的小貓咪側影並且符合關鍵點之間分段對稱的限制條件絕非易事，需要有想像力和妙筆偶得。讀者不妨試試能否再來創作一個不同的造型。

此外，除了正方形可以切割成曲線圖形之外，將曲線圖形切割成另外一個曲線圖形也是可能的，同樣需要使用點對稱的技巧。更多進階的圖形與理論，有興趣的讀者可以閱讀本文所附的參考書籍。

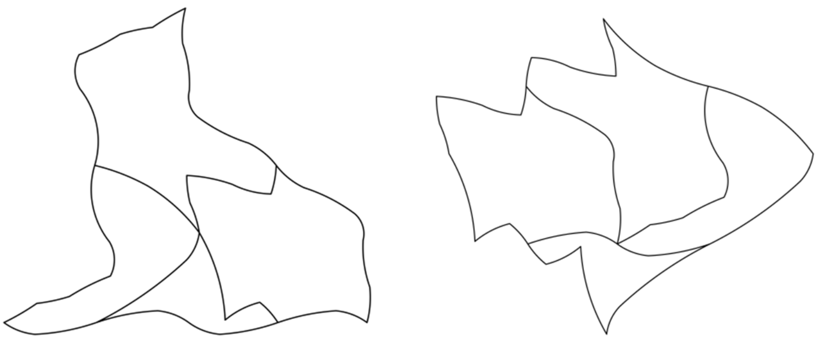


圖 11

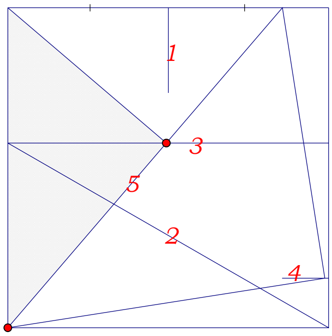
伍、K 字切割的精確摺紙法

行文至此，我們提供喜歡尋根刨底的讀者一個從正方形到正三角形的精確的摺紙方法。但這裡僅介紹如何製作第一刀長度的精確摺法。

先來介紹一下思路的由來。

正如在第壹部分所提及到的，我們不能讓第一刀的切痕再是$\sqrt{\frac{7}{12}}$這麼長，而應該是切拼成的正三角形邊長之半，即$\sqrt{1/\sqrt{3}}$.這裡有意不簡化該根式，因為這樣就暗示了應該先摺$1/\sqrt{3}$，再對此長度開平方根的思路。

具體操作如下圖 12 所示（數字編號是產生摺痕的順序）:



說明：

1、摺痕線 1 是對摺頂邊產生的一小段中垂線。

2、摺痕線 2 來自將正方形左下角摺至線 1 上某處，同時確保經過正方形右下角。

3、摺痕線 3 經過摺痕線 2 的左上端點，且與上下邊緣平行。

4、標記線 4 是上部邊緣靠近右上頂點的部分關於線 3 摺疊後記錄的位置。

5、摺痕線 5 來自將正方形左上頂點摺至標注線 4 上某處，同時確保經過正方形左下角。

6、圖中兩標注點之間距離即為所求$\sqrt{1/\sqrt{3}}$。

證明這個結論不難。

事實上，圖 11 中存在一個以線 5 為對角線的箏形。不難看出線 3 與線 5 的交點（標注點之一）也是箏形對角線的交點。箏形對角線彼此垂直，所以陰影三角形是一個直角三角形。其斜邊（即正方形左邊緣）為 1，標注點之間線段在斜邊上投影長為 $\tan 30°$，即$1/\sqrt{3}$。因此根據射影定理，標注點之間線段長為$\sqrt{1/\sqrt{3}}$。

陸、結語

實際操作對於求知欲旺盛的孩子們而言是探索與發現的必經之路，也是他們創造力發展的優質土壤。數學本身的抽象性讓許多孩子失去了親近數學的熱情，但本文對古老的裁縫師問題刻意做了降低操作難度的改善，使得該問題煥發出青春。設計有一定梯度的任務能讓孩子們漸入佳境地探索發現問題中的奧秘。相信教育同行們在 12 年國教教綱的引領下，一定會設計適合自己所教授年齡段的課堂實際操作活動。

參考資料:

Frederickson, Greg N. (2002). Hinged Dissections: Swinging and Twisting. Cambridge University Press. ISBN 978-0521811927. Retrieved 19 December 2013.