中學生通訊解題第 148 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
14801

試證：對於所有的自然數 n 而言，$10n+1$ 與 $15n+2$ 這兩個數必互質。

【證明】 設 $d=(10n+1,15n+2)\ \Rightarrow\ 10n+1=ad,\ 15n+2=bd,(a,b)=1$

$$\Rightarrow\ d(2b-3a)=1$$

$$\Rightarrow\ d=1$$

故 $10n+1$ 與 $15n+2$ 這兩個數必互質。

問題編號
14802

若 x 和 y 皆為任意實數，試問 $|3x-y-1|+|x+y|+|y|$ 之最小值為何？

【簡答】 $\dfrac{1}{4}$

【詳解】

先將 x 視為常數，令 $3x-1$ 、 $-x$ 、 0 三個數字中最小的為 x_1 、最大的為 x_3 、中位數為 x_2 ，則

$$|3x-y-1|+|x+y|+|y|=|y-(3x-1)|+|y-(-x)|+|y-0|$$
$$=|y-x_1|+|y-x_2|+|y-x_3|$$

由於當 y 為 x_1 、 x_2 、 x_3 三個數字的中位數 x_2 時，$|y-x_1|+|y-x_2|+|y-x_3|$ 有最小值 $|x_1-x_3|$ ，所以分成 $x_2=3x-1$ 、 $x_2=-x$ 、 $x_2=0$ 三種情形討論：

Case1. $x_2 = 3x - 1$

此時 $-x \le 3x - 1 \le 0$ 或 $0 \le 3x - 1 \le -x$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 當 $(x, \mathrm{y}) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ 時，$|y - x_1| + |y - x_2| + |y - x_3|$ 有最小值

$|x_1 - x_3| = |-x - 0| = |x| = \frac{1}{4}$

Case2. $x_2 = -x$

此時 $0 \le -x \le 3x - 1$ 或 $3x - 1 \le -x \le 0$

$\Rightarrow 0 \le x \le \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ 當 $(x, y) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ 時，$|y - x_1| + |y - x_2| + |y - x_3|$ 有最小值

$|x_1 - x_3| = |3x - 1 - 0| = |3x - 1| = \frac{1}{4}$

Case3. $x_2 = 0$

此時 $3x - 1 \le 0 \le -x$ 或 $-x \le 0 \le 3x - 1$

$\Rightarrow x \le 0$ 或 $x \ge \frac{1}{3}$

$\Rightarrow$ 當 $(x, y) = (\frac{1}{3}, 0)$ 時，$|y - x_1| + |y - x_2| + |y - x_3|$ 有最小值

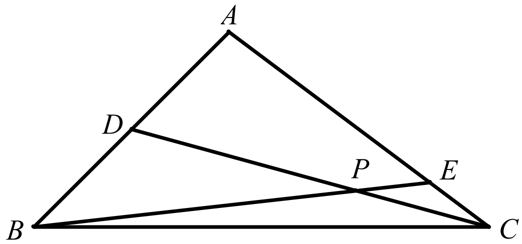
$|x_1 - x_3| = |3x - 1 - (-x)| \ = |4x - 1| = \frac{1}{3}$

綜合以上 Case1, 2, 3 可知：當 $(x, y) = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ 時，

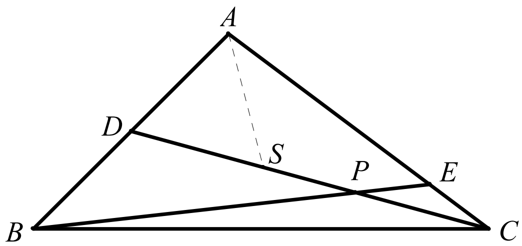
$|3x - y - 1| + |x + y| + |y|$ 有最小值 $\frac{1}{4}$

問題編號
14803

ΔABC中，D、E分別在$\overline{AB}$、$\overline{AC}$上，$\overline{BE}$與$\overline{CD}$相交於P點，$\overline{AD}=\overline{DB}=\overline{PC}$，$\angle ADC=60^\circ$，證明$\overline{PE}=\overline{EC}$。



【證明】



作$\overline{CD}$上一點 S 使得$\overline{DS}=\overline{PC}$，連$\overline{AS}$，
因為$\overline{DS}=\overline{DA}$且$\angle ADC=60^\circ$，所以$\Delta ADS$為正三角形，
得$\overline{AS}=\overline{AD}=\overline{DB}$，$\angle ASC=180^\circ-\angle ASD=120^\circ=\angle BDP$，
又$\overline{DP}=\overline{CD}-\overline{PC}=\overline{CD}-\overline{DS}=\overline{SC}$，所以$\Delta BDP\cong\Delta ASC$，
得$\angle DPB=\angle ACS$，所以$\angle EPC=\angle ECP$，得$\overline{PE}=\overline{EC}$。

問題編號
14804

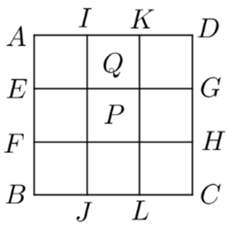
在一張無限方格紙的某些方格上塗上紅色，其餘方格都塗上藍色，使得每一個2×3的六個方格內恰好有兩個紅方格。試問：一個9×11的 99 方格內有多少個紅方格？

【簡答】 33 個

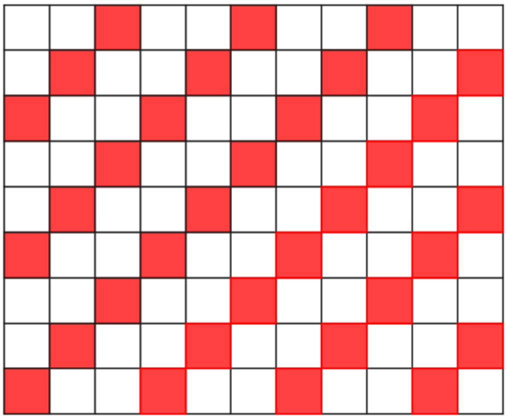
【詳解】

(1) 任意一個紅方格 P，以 P 為中心的 3×3 正方形中，與 P 相鄰的方格不能塗紅色，因此每個 3×3 正方形中恰有 3 個紅方格：

如圖(一)，若 Q 為紅方格，為了使 2×3 矩形 $EBCG$ 有 2 個紅方格，則矩形 $ABLK$ 或矩形 $IJCD$ 有 3 個紅方格，矛盾。



圖（一）



圖（二）

(2) 如圖(二)，在 9×11 的矩形中，可分為 9 個 3×3 正方形和 3 個 2×3 矩形，共有 33 個紅方格。

問題編號
14805

小弘在舊數學課本裡，發現有一個將最簡分數展化為循環小數的問題，題中之分子部分已經全部蛀損，而分母部分、循環小數部分，則各被書蟲吃掉了兩個數字、三個數字，其餘算式如右所示：$\dfrac{x}{5\Delta\Delta8}=0.69\Delta\Delta\overline{\Delta13}$，你可以把它復原嗎？

【簡答】 原式是 $\dfrac{3697}{5328}=0.6938\overline{813}$

【詳解】

設 $\dfrac{x}{5\Delta\Delta8}=0.69\Delta\Delta\overline{\Delta13}$ 原為 $\dfrac{x}{5ab8}=0.69cd\overline{e13}$，則 $\dfrac{x}{5ab8}=\dfrac{69cde13-69cd}{9990000}$，

∵循環小數小數點後有 4 位不循環，3 位循環，

而分母之個位數數字為 8，

∴分母是 $2^4=16$ 的倍數且分母是 333 的倍數，得分母為 5328。

而 $9990000=2^4\times3^3\times5^4\times37=5328\times3\times5^4$，

而知 $(6900013+10000c+1000d+100e)-(6900+10c+d)$ 是 3×5^4 的倍數，

即 $6893113+9990c+999d+100e$ 是 3 的倍數，也是 625 的倍數，

因此，$1+e$ 是 3 的倍數，$613-10c+374d+100e$ 是 625 的倍數，

由 $1+e$ 是 3 的倍數，可知 $e=2$ 或 5 或 8，

1. $e=2$ 時，$813-10c+374d$ 是 625 的倍數，解得 $d=3$，$c=6$，

得 $\dfrac{x}{5328}=\dfrac{6963213-6963}{9990000}=\dfrac{6956250}{9990000}=\dfrac{3710}{5328}$，不是最簡分數，不合；

2. $e=5$ 時，$1113-10c+374d$ 是 625 的倍數，d, c 無解；

3. $e=8$ 時，$1413-10c+374d$ 是 625 的倍數，解得 $d=8$，$c=3$，

得 $\dfrac{x}{5328}=\dfrac{6938813-6938}{9990000}=\dfrac{6931875}{9990000}=\dfrac{3697}{5328}$，

故原式是 $\dfrac{3697}{5328}=0.6938\overline{813}$。