

三稜鏡與分光原理(上)

王涪曠 賈至達*

國立臺灣師範大學 物理系

楔子

在雨過天晴之際，空氣中瀰漫著水氣，一縷縷陽光穿透雲層照向前方，或濃或淡的彩色光帶隨之浮現，橫跨天際。這也許是許多羅曼蒂克的文人所喜愛的景象或是大部分人美好的生活經驗之一！然而如此美麗的景象可遇不可求，必須在雨後空氣中還留有大量小水珠，受到陽光照射才行，那麼，彩虹是如何利用水珠將陽光絢麗的色彩顯現的呢？其中的緣由可以追溯到西元 1664 年，牛頓透過三稜鏡色散自然光，自然光呈現如同彩虹般的色澤，光學從此開啟了嶄新的篇章～

壹、前言

1664 年牛頓將可見光經過三稜鏡分光(Louis Trenchard More, 1934)，開啟人類對於光特性的學習篇章；在中西交流的歷史中，利瑪竇也利用三稜鏡敲開了中國的大門(尹章義、曾惠明，2007)。人類對於大自然的觀察從未停歇，天空中的景色有欣羨也有讚嘆，也有不少幻象吸引著人類。大氣層就像是一個美麗的自然畫布生活在我們的周遭，常常給我們心動的感覺，如霓虹、日暈、月暈和幻日等景象(Lynch D. K. et al., 2001)，不僅為人們生活增添許多美麗的色彩，也在重複運行自然的規律中逐漸讓人類的知識可以累積，而創造出現今的文明。

三稜鏡不僅讓人們逐漸了解光的現象，更促成光學儀器的發展和應用。精密的光學儀器是造就現今科技與人類文明的重要基石；例如 LCD 螢幕的背板也是密密麻麻的三稜鏡組合設計(Li C. J. et al., 2008)；鈦藍寶石超快雷射系統的色光補償(Moulton .F., 1982)、半導體晶片製作需要用到光蝕刻機(Jiang G. et al. 2013)，哈伯望遠鏡上的紅外線光譜儀(<https://hubblesite.org/contents/media/videos/2008/11/568-Video.html>)，以及近日開始攝去太空影像的韋伯望遠鏡(In Depth | James Webb Space Telescope – NASA Solar System Exploration)等；都見到稜鏡的應用和相關光學技術的進展所創造出現代科技，而此文明科技的創造---奠基於基礎的光學教學。

*為本文通訊作者

文明科技植基於教學，上述不少的成就植基於光學的教學。很早期 Fraunhofer J. (1814) 就利用三稜鏡製作光譜儀，在課堂上演示，且測得的太陽光的光譜線還沿用至今。

台灣也有很多老師讓學生們透過簡單的器材進行實驗教學；例如雷射筆、狹縫、三稜鏡，或者是光柵等簡易或是容易取得的器材 (梁立國, 2014)。陳昊維、陳清風(2013)提出以高中生可以理解的數學，解析三稜鏡的最小偏向角。現代的老師還可以利用線上模擬程式進行三稜鏡分光的理論教學；如標題為 "Dispersion of Light" 在 <https://ophysics.com/18.html> 網頁，和利用 desmos 開放軟體製作的模擬實驗程式 <https://www.desmos.com/calculator/azu4gy2v62?lang=zh-CN>；類似的網頁也可以在 GeoGebra 的網頁 <https://www.geogebra.org/search/prism> 中找到更多的模擬程式的教學資源。有興趣的同仁也可以在 <https://www.olabs.edu.in/> 線上實驗網站中，標題為 "Refraction through a Prism" 實驗模擬程式進行仿真數據測量。這些都是學習三稜鏡十分推薦的線上模擬和線上實驗的資源，會有助於老師的教學和學生自學了解三稜鏡的幾何光學特性。近來更有利用智慧型手機以三稜鏡為主題的實驗，如 Mayer V. V. 等提出用手機相機來分析色散的光譜，Mustafa Coramik and Erdoğan Özdemir (2021)也利用手機虛擬 APP-- RayLab，進行三稜鏡色散的學習。雖然只是一個玻璃製成的三稜鏡，但是自從牛頓之後，用於光學教學開展出很多不同創意的實驗和理論推導，如 Waldenström S.(1978)、Dileep V. Sathe (1987)、Cheng Chao-Chia (2014)和 Feldman A. (1983)等的創新作法。不論是理論或是實驗，都說明三稜鏡是用以學習幾何光學理論和實驗的一個重要器材。

三稜鏡是一個有趣的問題，有許多期刊討論、網路上稜鏡的問與答，也可以搜尋 YouTube 上 https://www.youtube.com/results?search_query=refraction++prism 的影片，其中所作的理論解答和實驗實作，有很多相當有創意的解法。也是因為在理論上稜鏡的光學特性可以有許多不同出發點的幾何和數學的解法，實驗測量也有許多不同但可得到相同結果的作法。本文以等腰三稜鏡作為主題，講述三稜鏡的光學特性，以及光學儀器中常見的基礎定義。以幾何光學出發，講述折射率、偏向角、角色散和解析度等重要的光學儀器參數。教師可以應用本文於光學加深加廣的課程，以三稜鏡實驗和理論探討，引薦重要的幾何光學原理和光學儀器參數的定義。學生也可以利用本文加強相關的數學能力，尤其是三角函數、幾何和簡易微積分等數學基礎。不諱言，光學三稜鏡是一種理論探究和實作創意的有趣主題，也是學習幾何光學一個好的練習，也是撰寫本文出發點。以下逐次介紹三稜鏡對於光的作用、應用幾何光學解釋稜鏡的偏向角、最小入射角度、最小偏向角、以及角色散和解析度等光學儀器的重要參數。

貳、三稜鏡的作用---彩虹效應

三稜鏡是三角形的柱狀透明材質所製成，如圖 1 所示之等腰三稜鏡是其中一種，也是本文主要討論的稜鏡種類。當陽光入射三稜鏡後，光路徑產生偏折，不同色光在介質中傳播速度不同造成不同程度的偏折而讓色光分散，稱為色散現象，再經一次折射穿出三稜鏡，可見分散的彩色光帶，稱為彩虹效應，如圖 1 所示。此現象可用以描述和定義不同色光對於稜鏡的折射率，同時也可以定量的計算折射率 n 和色光波長 λ 的關係， $n(\lambda)$ 。不同顏色的光偏折程度不同，現今可以輕鬆經由實驗測量，而在西元 1703 年的《Dioptrica》一書中已經觀察到相關現象且日後定義出折射率，其歸功於威理博·司乃耳(Willebrord Snell van Royen)的貢獻(<https://www.britannica.com/biography/Willebrord-Snell>)，故稱之為司乃耳定律。因為折射率與光的波長相關，光波長短折射角度不同，因此在稜鏡中會產生色散；光射出稜鏡後再分光是為彩虹效應。在下一節我們會利用司乃耳定律討論光透射三稜鏡的幾何光學問題，如偏向角特性、全反射角，何謂最小偏向角等，以及如何利用最小偏向角測定單色光對於稜鏡材質的折射率等問題。

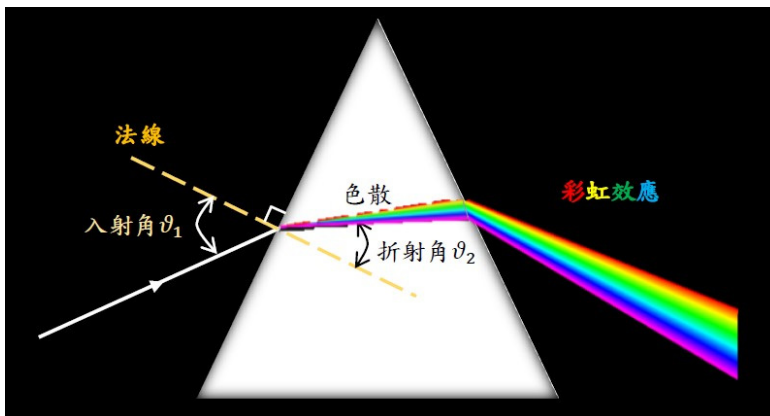


圖 1：三稜鏡彩虹效應

參、折射定律與三稜鏡的偏向角

一個頂角為 α 的等腰三稜鏡；其兩等腰的長度為 L ，則底邊長 $l = 2L \sin \frac{\alpha}{2}$ ，如圖 2 所示。當單色光由頂角 α 一側入射，也就是由空氣入射三稜鏡時；入射光與法線的夾角即為入射角 θ_1 ，經稜鏡介面產生第一次偏折，即折射角 θ_2 ；則司乃耳定律描述入射角 θ_1 、折射角 θ_2 和稜鏡材質的折射率 n 的關係為；

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \quad (1)$$

其中空氣的折射率近似等於 1。同理，當單色光由三稜鏡頂角的另一側射出到空氣時是第二次偏折，其入射角為 θ_3 ，穿出三稜鏡時光偏折的角即為折射角 θ_4 ，故

$$n \sin \vartheta_3 = \sin \vartheta_4 \quad (2)$$

圖 2 中入射光與透射光之延長線所夾的角，即稱之為偏向角 δ 。另從圖 2 的幾何關係中，可以得到 $\vartheta_1 \sim \vartheta_4$ 與頂角 α 和偏向角 δ 的三角幾何關係。因為法線與兩邊互相垂直，兩法線延長線交點和頂角 α 兩側所形成四邊形的內角和為 2π ，可知兩法線夾角為 $\pi - \alpha$ ，而在稜鏡介面入射點和透射點所形成的三角形，其內角和為 π ，可得

$$\vartheta_2 + \vartheta_3 = \alpha \quad (3)$$

同理；由兩法線、入射光和透射光之延長線所形成的四邊形可知： $2\pi = (\pi - \alpha) + (\pi - \delta) + \vartheta_1 + \vartheta_4$ ，因此

$$\delta = \vartheta_1 + \vartheta_4 - \alpha \quad (4)$$

此兩關係式至為重要，顯示出頂角 α 與 ϑ_1 、 ϑ_2 、 ϑ_3 、 ϑ_4 和偏向角 δ 之間的關係。且與司乃耳定律(1)式和(2)式，為以下所有理論公式的基礎。

由(2)式得到 $\vartheta_4 = \sin^{-1}[n \sin \vartheta_3]$ ，再將(3)式代入，且由(2)式得到 $\vartheta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{\sin \vartheta_1}{n}\right)$ ，則 ϑ_4 等於

$$\vartheta_4 = \sin^{-1} \left\{ n \sin \left[\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) \right] \right\} \quad (5)$$

其中 $n \sin \left[\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) \right] = \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \cos \alpha \sin \vartheta_1$ ，參見附錄一。

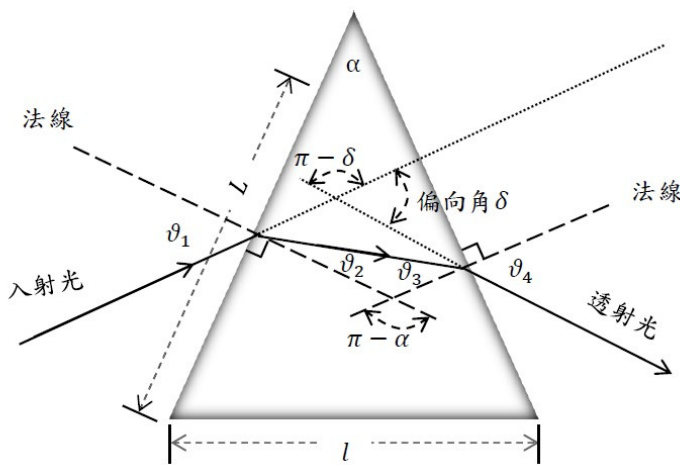


圖 2：頂角為 α 的稜鏡。當入射角 ϑ_1 由稜鏡的一腰入射，光由另一腰射出，兩道光線的夾角為 δ 。

將(5)式代入(4)式，可以得出偏向角 $\delta(n, \vartheta_1, \alpha)$ 的表示式，即：

$$\delta(n, \vartheta_1, \alpha) = \vartheta_1 + \sin^{-1} \left\{ n \sin \left[\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) \right] \right\} - \alpha \quad (6)$$

上式顯示偏向角為折射率 n 、入射角 ϑ_1 和頂角 α 的函數；附錄一也增列出偏向角 $\delta(n, \vartheta_1, \alpha)$ 的其他等價表示式提供參考。偏向角 δ 是光經由頂角兩側的兩次折射的結果；對於一個特定的 n 和頂角 α 的三稜鏡，(6)式顯示偏向角的數值僅受到入射角 ϑ_1 的影響，也可以參考 Desmos、GeoGebra 和 ophysics 的三稜鏡光偏折的模擬程式，或者是到線上實驗的 [i-labs](#) 網站進行實驗練習。圖 3 是以折射率 $n = 1.5$ 、且頂角 $\alpha = 60^\circ$ 代入(6)式後計算出來的結果；圖中顯示出兩個特殊角：1) 存在一個最小入射角 $\vartheta_{1,\min} \cong 27.9^\circ$ ，也就是 ϑ_1 必須是在 $27.9^\circ \sim 90^\circ$ 範圍內入射稜鏡，才會讓光由頂角 α 的另一側透射出來；2) 偏向角存在一個最小值，當入射角 ϑ_1 為 48.6° 時，有一個最小偏向角 $\delta_{\min} \cong 37.2^\circ$ ；此特殊入射角定義為 $\vartheta_{1,\min}$ 。以上討論知道僅在特定範圍的入射角 ϑ_1 ，才会有光穿過頂角 α 兩邊而透射出來，如圖 3 所顯示的 $\vartheta_1 \in (27.9^\circ, 90^\circ)$ ；而在特定的入射角 $\vartheta_{1,\min}$ ，會存在一個最小的偏向角 δ_{\min} 。以下我們介紹這兩個特殊角 $\vartheta_{1,\min}$ 和 δ_{\min} 的理論推導。

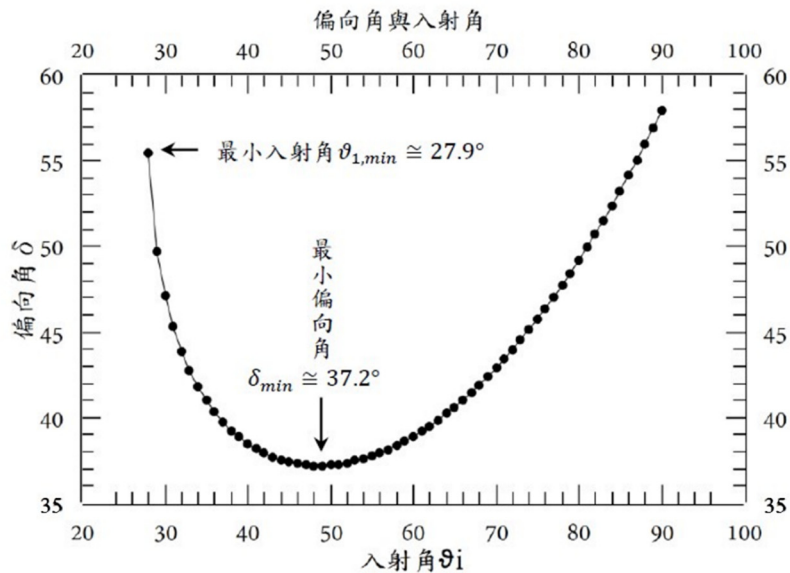


圖 3：偏向角 δ 與入射角 ϑ_1 的關係圖。當折射率 $n = 1.5$ 、且頂角 $\alpha = 60^\circ$ 時，由(6)式計算所得知入射角 $\vartheta_{1,\min} = 27.9^\circ$ 。當 $\vartheta_1 \cong 48.6^\circ$ 時，最小偏向角為 $\delta_{\min} \cong 37.2^\circ$ 。

肆、最小入射角 $\vartheta_{1,\min}$

入射光要由符合圖 1 所示的方式由三稜鏡頂角兩側入射和透射出來，圖 3 顯示出入射角 ϑ_1 必須符合特定條件。當入射光由空氣進入稜鏡，是不會產生全反射的現象。因為稜鏡的折射率 $n > 1$ ，當光要由稜鏡透射出來才有可能產生全反射。如圖 4 所示。 ϑ_3 必須小於全反射的臨界角 $\vartheta_{3,C}$ ，才可以讓光穿過稜鏡頂角 α 的另一側。當入射角為 $\vartheta_{1,\min}$ ，在 α 的另一側介面上恰好入射角為臨界角 $\vartheta_{3,C}$ ，也就是符合全反射條件，此時 ϑ_4 恰等於 $\frac{\pi}{2}$ ，即由(2)式得

$$n \sin \vartheta_{3,C} = \sin \vartheta_4 = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

由上式給出透射出稜鏡的條件是： $\vartheta_3 < \vartheta_{3,C} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ ；此條件也就限制了 ϑ_2 的範圍。由(3)式可知道 ϑ_2 的只能在特定範圍，即 $\vartheta_2 > \alpha - \vartheta_{3,C} = \alpha - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ 。依據 (3)式得出入射角 $\vartheta_1 = \sin^{-1}(n \sin \vartheta_2) > \sin^{-1}\left[n \sin\left(\alpha - \vartheta_{3,C}\right)\right]$ ；因此最小值為

$$\vartheta_{1,\min} = \sin^{-1}\left\{n \sin\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\} \quad (7)$$

以上是利用全反射條件所推導之 ϑ_1 和 ϑ_4 函數關係式的相關等式，另一方面，利用光的可逆性，也可以得到與(7)式相同的結果。根據 (5)式，透過移項將 ϑ_1 表示為 ϑ_4 的函數，即

$$\vartheta_1 = \sin^{-1}\left\{n \sin\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{\sin(\vartheta_4)}{n}\right)\right]\right\} \quad (8)$$

上式成立並不意外，因為光是可逆的，故將(5)式中的 ϑ_1 和 ϑ_4 直接互換，也可以得到(8)式，也說明了光的可逆性。若光能由穿過頂角兩邊介面透射稜鏡，則表示 $\vartheta_4 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，當達到全反射的條件時 $\vartheta_4 = \frac{\pi}{2}$ ；且由光可逆的特性，可以得出入射角 ϑ_1 的範圍是

$$\vartheta_1 \in \left(\sin^{-1}\left\{n \sin\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}, \frac{\pi}{2}\right) = \left(\vartheta_{1,\min}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (9)$$

當 $n = 1.5$ 、且 $\alpha = 60^\circ$ ，(9)式的計算結果就如圖 3 所示， $\vartheta_{1,\min} = 27.9^\circ$ 。故當入射稜鏡的角度 ϑ_1 小於 $\vartheta_{1,\min} = \sin^{-1}\left\{n \sin\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}$ 時，光是不會直接穿透稜鏡頂角的兩側，而在頂角另一邊介面產生全反射。由光的可逆性，對應(9)式之 ϑ_1 範圍， ϑ_4 的範圍是 $\left(\frac{\pi}{2}, \sin^{-1}\left\{n \sin\left[\alpha - \sin^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right\}\right)$ 。當用單色光入射三稜鏡時，可以很清楚知道 ϑ_1 和 ϑ_4 兩者的範圍是相同的，這也是光的可逆性的一種驗證。

在附錄四，我們還提供另一種推算出 $\vartheta_{1,min}$ 的公式，學習者也可以有自創的方式求得 $\vartheta_{1,min}$ 。上述討論知道 ϑ_2 和 ϑ_3 ，也是有範圍限定，學習者也可以自行練習求其範圍。

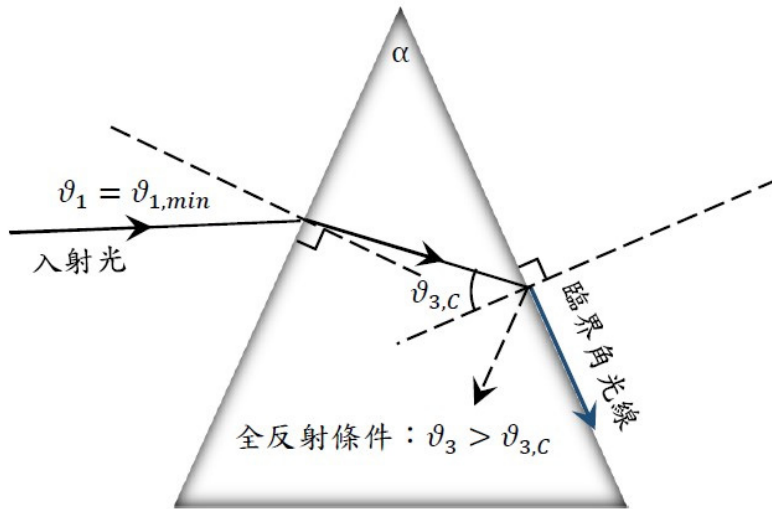


圖 4：當入射角 $\vartheta_1 = \vartheta_{1,min}$ ；造成由頂角射出的光達到臨界角 $\vartheta_{3,c}$ 。當 ϑ_3 大於 $\vartheta_{3,c}$ ，折射光於介面發生全反射。

伍、最小偏向角 δ_{min}

偏向角 δ 為折射率 n 的函數，表示可以透過測量偏向角得知稜鏡的折射率，但由於自然光通過三稜鏡時不同色光會分散，角度測量不易。若有一個容易標定的角度則較方便求出折射率與入射波長的關係 $n(\lambda)$ ，其結果恰是以選定最小偏向角 δ_{min} 進行測量最為方便。

(9)式顯示 ϑ_1 是在一個有限範圍，且圖 3 表示 δ 存在極小值 δ_{min} ；即當入射角達到此條件時，透射光將到達最接近入射方向的狀態，如圖 5 所示。假設入射角 $\vartheta_1 = \vartheta_1^*$ 時，偏向角恰有最小值 δ_{min} ；則由(4)式知

$$\left. \frac{\partial \delta(n, \vartheta_1, \alpha)}{\partial \vartheta_1} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} = 0 = \left. \frac{d(\vartheta_1 + \vartheta_4 - \alpha)}{d \vartheta_1} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} = 1 + \left. \frac{d \vartheta_4}{d \vartheta_1} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} \quad (10)$$

上式得出 $\left. \frac{d \vartheta_4}{d \vartheta_1} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} = -1$ ，由附錄二的結果得出

$$\left. \frac{d \vartheta_4}{d \vartheta_1} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} = -1 = \left. \frac{-\cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_3)}{\cos(\vartheta_2) \cos(\vartheta_4)} \right|_{\vartheta_1 = \vartheta_1^*} \quad (11)$$

上式的推導過程詳見附錄二，同時在附錄三中也提示計算三角函數微分的簡易圖示判

定方法。將 (1) 式和 (2) 式代入(11)式可以求出得

$$\vartheta_2|_{\vartheta_1=\vartheta_1^*} = \vartheta_3|_{\vartheta_1=\vartheta_1^*} = \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

$$\vartheta_4|_{\vartheta_1=\vartheta_1^*} = \sin^{-1}[n \sin(\vartheta_3|_{\vartheta_1=\vartheta_1^*})] = \sin^{-1}\left[n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] \quad (13)$$

$$\vartheta_1^* = \sin^{-1}\left[n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \vartheta_4|_{\vartheta_1=\vartheta_1^*} \quad (14)$$

(14)式指出 ϑ_1^* 為 n 和 α 的函數，且入射角 $\vartheta_1^* = \vartheta_4$ ，將(14)式代入 (4) 式， $\delta = \vartheta_1 + \vartheta_4 - \alpha = 2\vartheta_1^* - \alpha$ ，可得出最小偏向角 δ_{\min} 僅為頂角 α 和折射率 n 的函數：

$$\delta_{\min} = 2\vartheta_1^* - \alpha = 2 \sin^{-1}\left[n \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] - \alpha \quad (15)$$

上式顯示稜鏡內的光路平行於底邊，是最小偏向角的條件，如圖 5 所示之幾何對稱的關係。這項結果也可以由圖 2 中的幾何關係直接得到；因為當 δ_{\min} 發生時，其補角一定是最大值，而補角恰被其稜鏡中垂線兩等分時會有最大值，因此 δ_{\min} 發生於三稜鏡中光路徑平行底邊的時候，而且此時對於相同的入射點，光線在稜鏡中的路徑竟是最短的。由 (15) 式可以推算出折射率

$$n(\delta_{\min}, \alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad (16)$$

(16)式是一個重要的結果，讓實驗上可以很容易求出材質的折射率 $n(\lambda)$ ；因為以實驗決定 $\delta_{\min}(\lambda)$ 就可以決定折射率，因此可以用很精確的方法得到折射率 $n(\lambda)$ 。雖然理論上我們可以採用任意入射角 ϑ_1 ，測其偏向角 δ ，再將兩者代入 (6) 式去推算折射率；但是複雜很多。實驗上直接測出 δ_{\min} 是容易的、再代入 (16) 式去推算折射率，顯然比較方便，精確度也會提高。也有人發展不同的實驗方法測量稜鏡的折射率，見參考資料 Chandra B. P. and Bhaiya S. C.(1983)；讓光入射等邊三稜鏡時，入射角與頂角相等($\vartheta_1 = \alpha = 60^\circ$)；則此時透射出稜鏡的角度 ϑ_4 會等於偏向角 δ 。實驗時測得偏向角 δ 代入以下(17)式，即可求得折射率

$$n(\alpha = \vartheta_1, \delta) = \sqrt{\sin^2 \delta + (1 + \sin \delta \cot \alpha)^2} \quad (17)$$

此方法求折射率也算是簡便；上式可自行練習推導。

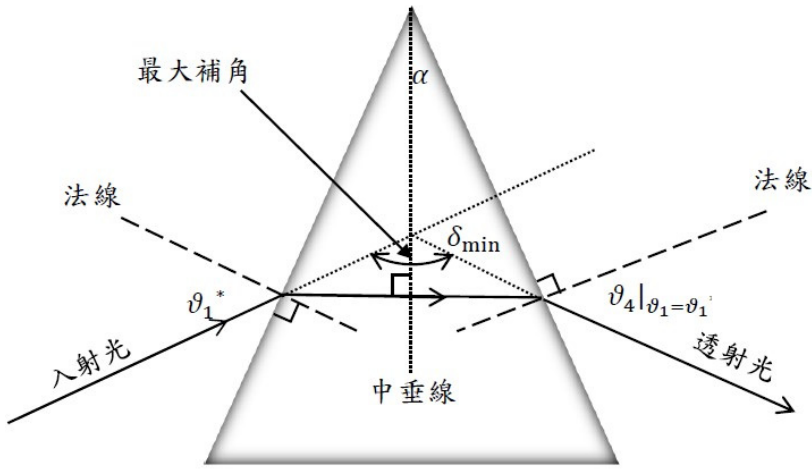


圖 5：當折射光路徑平行底邊， $\vartheta_1 = \vartheta_4$ ，偏向角有最小值，即 δ_{\min} 。

當達到最小偏向角 δ_{\min} ， $\vartheta_1^* = \vartheta_4$ ，也就是(14)式的結果，此時由圖 6 知道 \overline{AB} 位置是入射光波前，而 $\overline{A'B'}$ 為透射光波前，這是否表示 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 兩者的光程 (Optical Path Length) 都相等？是否光行經 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 的時間相等？這是一個光程差的好練習，也有助於了解在最小偏向角時光路的特性。

$\overline{BB'}$ 線段長等於 $L \sin \vartheta_1^* + L \sin \vartheta_4 = 2L \sin \vartheta_1^*$ ；將(14)式的 ϑ_1^* 代入，得到

$$2L \sin(\vartheta_1^*) = 2Ln \sin \alpha = nl$$

其中 l 是稜鏡底端的長度，由圖 6 知道 l 等於 $2L \sin \alpha$ 。將長度除以光速 c ；得出時間 t 為

$$t = \frac{2L \sin \vartheta_1^*}{c} = \frac{nl}{c} = \frac{l}{c/n} \quad (18)$$

其中稜鏡中的光速是 c/n 。光自 A 沿底邊抵達 A' 所需時間為 $\frac{l}{c/n}$ ，與自 B 到 B' 所需時間 $\frac{2L \sin \vartheta_1^*}{c}$

相同。同理，在最小偏向角的條件下，所有光線透出三稜鏡後並無光程差，如圖 6；簡單的說是符合費馬原理的結果。因為 l 是任意選定的稜鏡底端長度，因此(18)顯示 \overline{AB} 和 $\overline{A'B'}$ 兩波前之間；光傳播的時間都是相等的。上述推導最小偏向角時，並沒有用到等腰三角形的特性，而結果卻是以頂角的中垂線為對稱軸之左右對稱。若三稜鏡為等腰三角形，在最小偏向角條件下，在稜鏡內所有的光束線與其底邊平行；且所有經頂角左邊 \overline{ab} 入射的光，必定會在頂角右邊 $\overline{a'b}$ 透射出稜鏡，且都會偏折 δ_{\min} 角度以同方向射出。

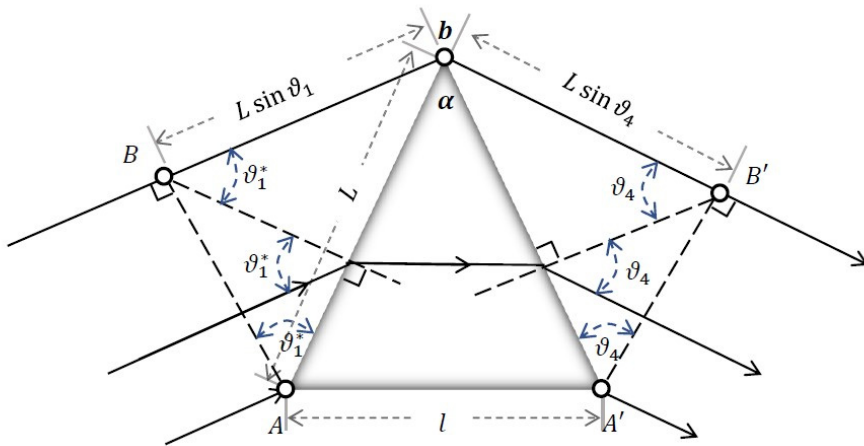


圖 6、 \overline{AB} 為入射光波前， $\overline{A'B'}$ 為透射光波前，光自 B 經過 b 抵達 B' 行經路徑長度為 $2L \sin \theta_1^*$ ，自 A 沿底邊抵達 A' 路徑長度為 l 。

陸、色散、角色散

在(16)式顯示折射率 n 是最小偏向角 δ_{\min} 和頂角 α 的函數，而 δ_{\min} 與波長 λ 有關，因此折射率亦是波長的函數，即 $n = n(\lambda)$ 。又通常 n 和 λ 兩者關係可以由柯西經驗公式描述，即

$$n(\lambda) \approx A + \frac{B}{\lambda^2} \quad (19)$$

其中 A 、 B 均為正數。以石英玻璃三稜鏡及可見光為例，石英玻璃的係數 $A \approx 1.46$ ，且 $B \approx 3.54 \times 10^{-3} \mu\text{m}^2$ 。紅光波長最長約 750 nm ，紫光波長最短約 380 nm ，根據(19)式，光波長介於 $750 \text{ nm} \sim 380 \text{ nm}$ 者，其對於石英玻璃的折射率約在 $1.47 \sim 1.48$ ，波長較長的紅光折射率較小，約為 1.47 。透過(19)式可將最小偏向角 δ_{\min} 表示為波長 λ 的函數，即

$$\delta_{\min} = 2 \sin^{-1} \left[\left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right] - \alpha \quad (20)$$

(20)式指出當波長 λ 越長，折射率越小，最小偏向角越小。例如紅光波長較藍光波長長，因此紅光的偏折較藍光偏折的少，不同波長的光便會在透射稜鏡後分離開來(Christy, R. W. 1972)，如圖 1 所示的彩虹效應。

通常介質中的光速 v 與波長 λ 相關， $v(\lambda)$ 的函數式即所謂的色散。折射率是 $n(\lambda) = c/v(\lambda)$ ；因此 $n(\lambda)$ 表示式，也稱為色散關係式。(16)式表示三稜鏡的 n 可以由 δ_{\min} 求得(Hazzard, George W. 1951)，因此稜鏡色散關係式會與偏向角相關。因為是與角度相關而定義出稜鏡「角」色散， $D \equiv d\delta_{\min}/d\lambda$ ，也可以改寫為

$$D \equiv \frac{d\delta_{\min}}{d\lambda} = \frac{d\delta_{\min}}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} \quad (21)$$

依據(19)式推算 $\frac{dn}{d\lambda} = -\frac{2B}{\lambda^3}$ ，且 $\frac{d\delta_{\min}}{dn} = 1/\frac{dn}{d\delta_{\min}}$ ，再利用(16)式將 n 對 δ_{\min} 微分得

$$\frac{dn}{d\delta_{\min}} = \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{d}{d\delta_{\min}} \left[\sin \left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} \right) \right] = \frac{\cos \left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$$

將上式代入(21)式得出角色散 D 為

$$D = \frac{d\delta_{\min}}{d\lambda} = -\frac{4B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} \right)} \quad (22)$$

上式是描述角色散在不同波長的光中如何分散的函數(Duarte, F. J. and Piper J. A. 1983)。波長在可見光範圍，圖 7 顯示是 $\alpha = \pi/3$ 石英玻璃三稜鏡之角色散數值。 D 的數值都小於零，但是多是考量其絕對值，見參考資料 Hazzard, George W. (1951)。對於波長越長的光，角色散的絕對值越小，最小偏向角的變化也就越小，表示三稜鏡在短波長區的透射光偏折較大，在長波長區偏折較小，就如圖 1 所顯示的狀況，紅光偏折小，而紫光偏折較大。

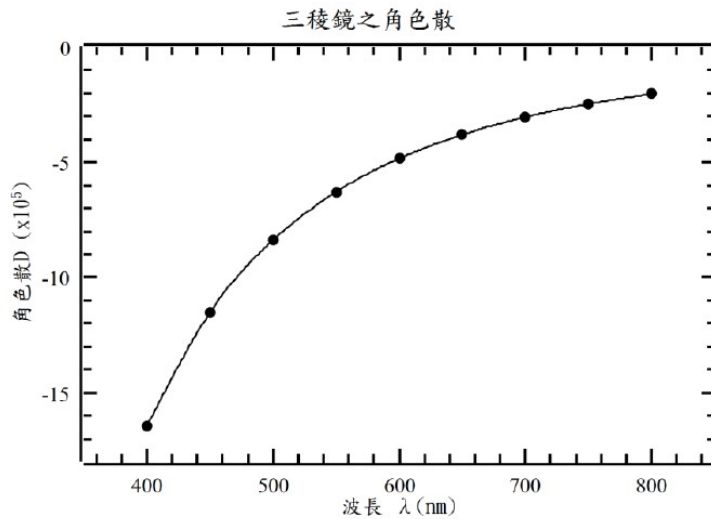


圖 7：可見光範圍之石英三稜鏡之角色散，波長越長，角色散越大。

文獻中也會出現另一種角色散的定義，表達式是 $D' \equiv d\vartheta_4/d\lambda$ 。在最小偏向角 δ_{\min} 時，其結果可以利用第(13)式得出；即

$$D' = \frac{d}{d\lambda} \left\{ \sin^{-1} \left[n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] \right\} = -\frac{2B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}} \quad (23)$$

其中 $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$ 。有關於 \sin^{-1} 函數的微分可以參考附錄五。由上述的(22)和(23)式可以得知波長越長， D 和 D' 的絕對值就越小，則透射出稜鏡的光偏折就越小；因此 D 和 D' 常常以其絕對值表示，以利於和偏折的角度做對比。

【待續】