# 正多邊形摺紙與組合式多角禮物盒

蔣小娃 [1] 連崇馨 [2*]

[1] 國立苗栗高級商業職業學校

[2] 國立鳳山高級中學

## 壹、前言

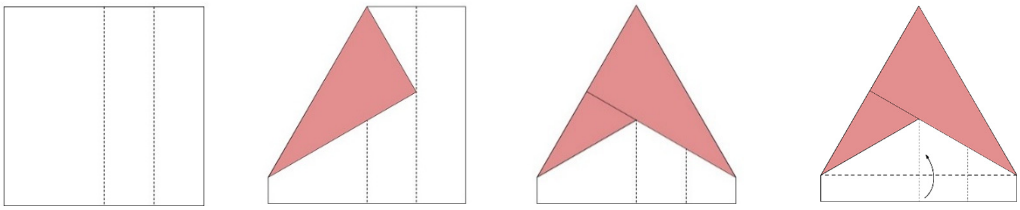
正多邊形的摺紙其實很適合在國中學過畢氏定理後或是搭配尺規作圖，以及高中配合三角比搭配計算機的計算引入課程內，讓學生嘗試探索並了解其中蘊含的數學知識。本文將針對正三角形、正五邊形、正六邊形與正七邊形的摺紙做一點探討與說明，並利用正多邊形的摺紙原理及三角比的計算，來解構日本摺紙大師 Tomoko Fuse(布施知子)在組合式多角禮物盒一書中的設計原理。

## 貳、正三角形與組合式三角禮物盒

(1)正三角形：

正三角形的摺紙方式有很多種，以下我們用其中的兩種為例。

範例 1：



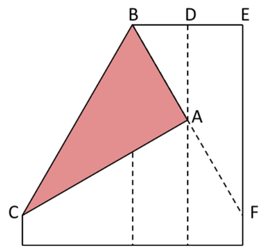
1. 摺出中線及 $\frac{1}{4}$ 的等分線

2. 固定邊上中點，將左上方直角摺至摺線處

3. 將右上方直角沿三角形邊向左下方摺

4. 沿下方的虛線上摺即完成一正三角形摺至摺線處

[說明]：在步驟 2 中，若設色紙的邊長為 4，則右圖中的 $\overline{AB}=2,\overline{BD}=1$， 且 $\Delta ABD$ 為直角三角形，可知 $\overline{AD}=\sqrt{3}$，因此 $\angle ABD=60^{\circ}$，$\angle BAD=30^{\circ}$，又 $\Delta ABC$ 為一直角三角形，$\angle ABC=60^{\circ}$，$\angle BCA=30^{\circ}$，



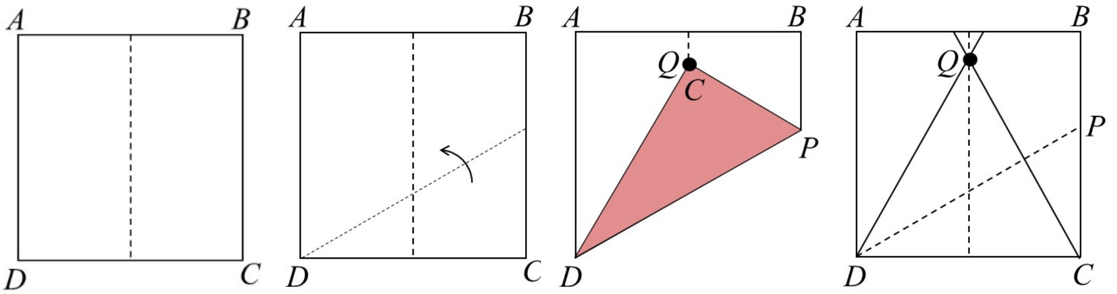

*為本文通訊作者

$\Delta EBF$ 為一直角三角形， $\angle EBF = 60^{\circ}$ ， $\angle BFE = 30^{\circ}$ ，

且$\overline{AB} = \overline{BE}$，可得 $\Delta ABC \cong \Delta EBF$ ， $\overline{BC} = \overline{BF}$

由此可得上方步驟 4 完成的三角形為一頂角為$60^{\circ}$的等腰三角形，即正三角形。

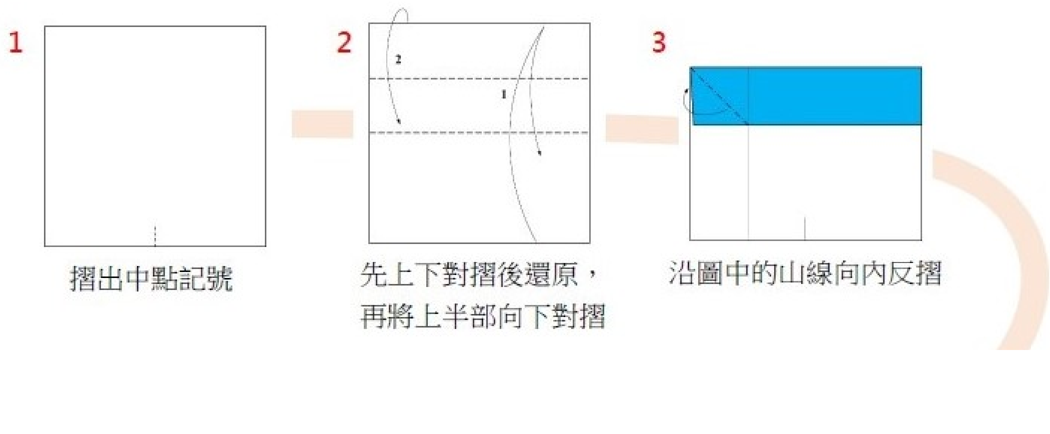
範例 2：

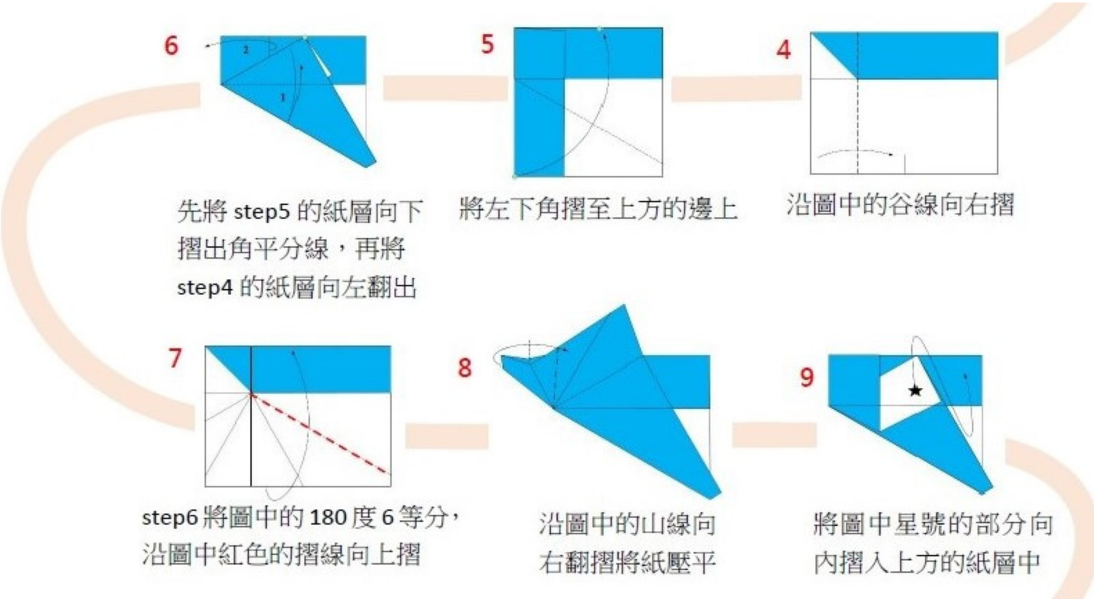


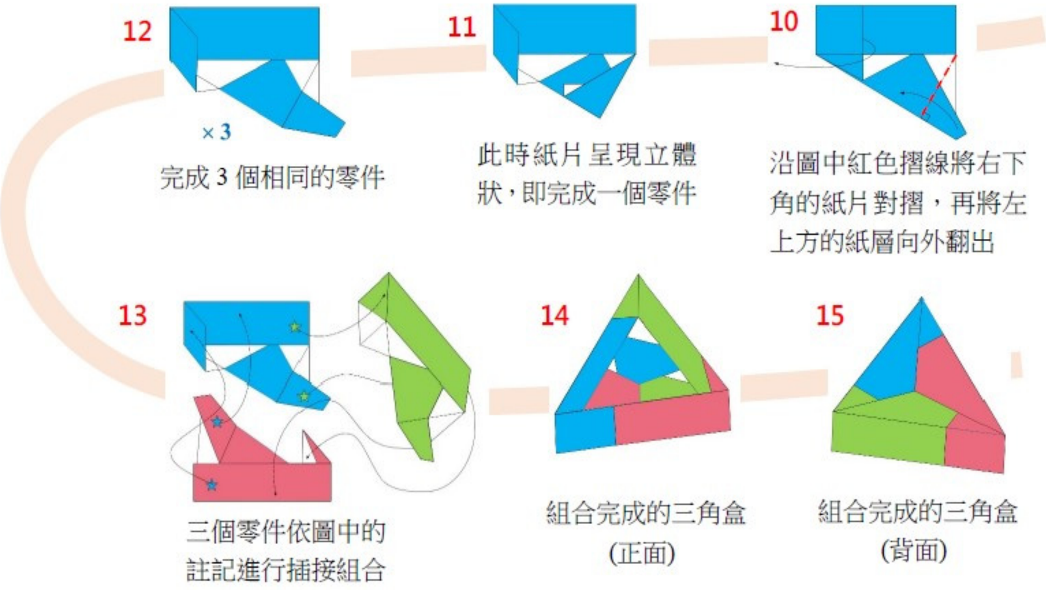

1. 先將正方形 ABCD 對摺成兩等分
2. 接著固定 D 點，將 C 點摺到兩等分的摺線上
3. 產生通過 $D$ 點的摺線$\overline{DP}$，且 $C$ 點摺至摺線上的 $Q$ 點
4. 分別摺出 Q 點與 C、D 兩點的摺痕，則△QDC 為正三角形

[說明]：經步驟 3，$\overline{QD} = \overline{CD}$，及步驟 4 中 $\overline{QD} = \overline{QC}$，可知 $\overline{QD} = \overline{QC} = \overline{CD}$，即 $\Delta QCD$ 的三邊等長，故為正三角形。

(2)組合式三角禮物盒：



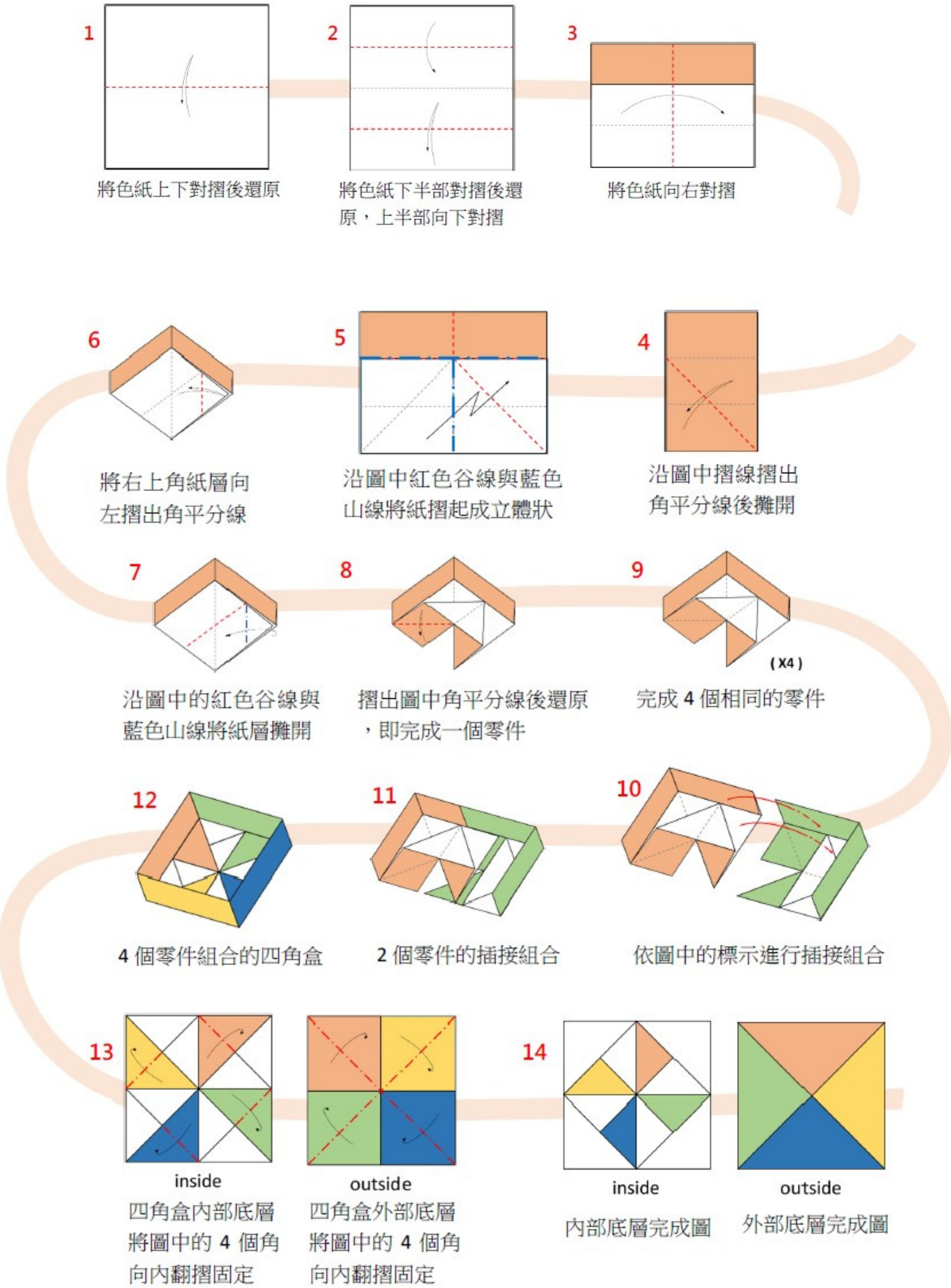



[說明]：三角禮物盒運用了上述範例 1 的摺法進行設計，在禮物盒零件摺製的第 5 步到第 6 步，即為範例 1 中步驟 1 與步驟 2(將直角頂摺到 $\frac{1}{4}$ 等分線上)，目的主要是要創造出 60 度的角度。在禮物盒零件摺製的第 10 步到第 11 步，將盒子立體化之後形成的角度即為 60 度，因此在不考慮摺紙的些微誤差，我們所摺製組合而成的禮物盒為正三角形的盒子。

## 參、組合式四角禮物盒

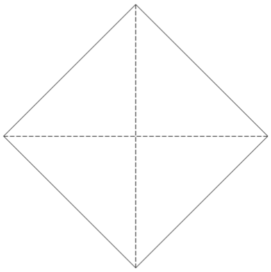
組合式四角禮物盒：



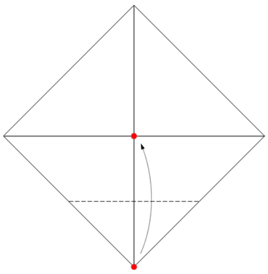

[說明]：在禮物盒零件摺製的第 4 步到第 6 步，目的是要創造出直角，因此可以直觀的看出組合而成的是一個正方形。

## 肆、正五邊形與組合式五角禮物盒

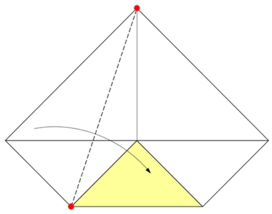
(1)正五邊形：



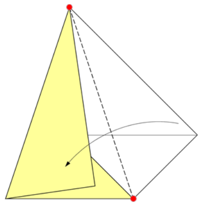
1. 摺出兩條對角線



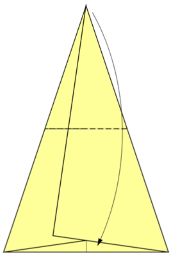
2. 下方頂點對齊中心向上翻摺線



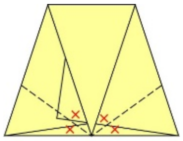
3. 依兩點連線向內翻摺



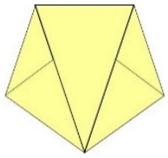
4. 依兩點連線向內翻摺



5. 將頂點向下翻摺對齊底邊中點



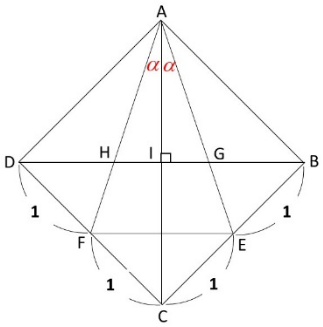
6. 將左右兩邊依角平分線收摺



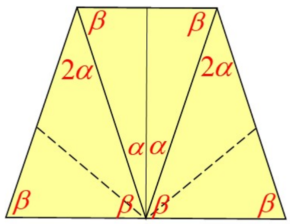
7. 完成正五邊形

[說明]：將色紙攤開，觀察其摺線的關係如左下圖一。假設正方形邊長為 2，則對角線 $\overline{AC}$ 及 $\overline{BD}$ 長為 $2\sqrt{2}$，由步驟二可知 $\overline{FE}$ 長為 $\sqrt{2}$，且 $\overline{CJ}$ 長為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此可以得知 $\overline{AJ}$ 長為 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$。

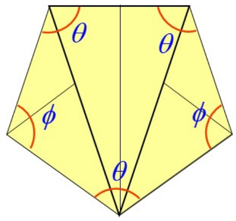
讓我們專注在ΔAEJ 中，$\overline{AJ}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 且 $\overline{JE}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，因此 $\alpha=\tan^{-1}(\frac{1}{3})\approx 18.435^{\circ}$。接下來我們假設β，滿足 $\alpha+\beta=90^{\circ}$，則 $\beta\approx 71.565^{\circ}$。故可以得到下圖二之結果，且由圖三可知 $\theta=2\alpha+\beta\approx 108.435^{\circ}$，且 $\phi=\dfrac{1}{2}(540^{\circ}-3\theta)\approx 107.347^{\circ}$。此五邊形非正五邊形，但因誤差很小幾乎無法分辨，故以此為簡易貼近正五邊形的摺製方式。




圖一

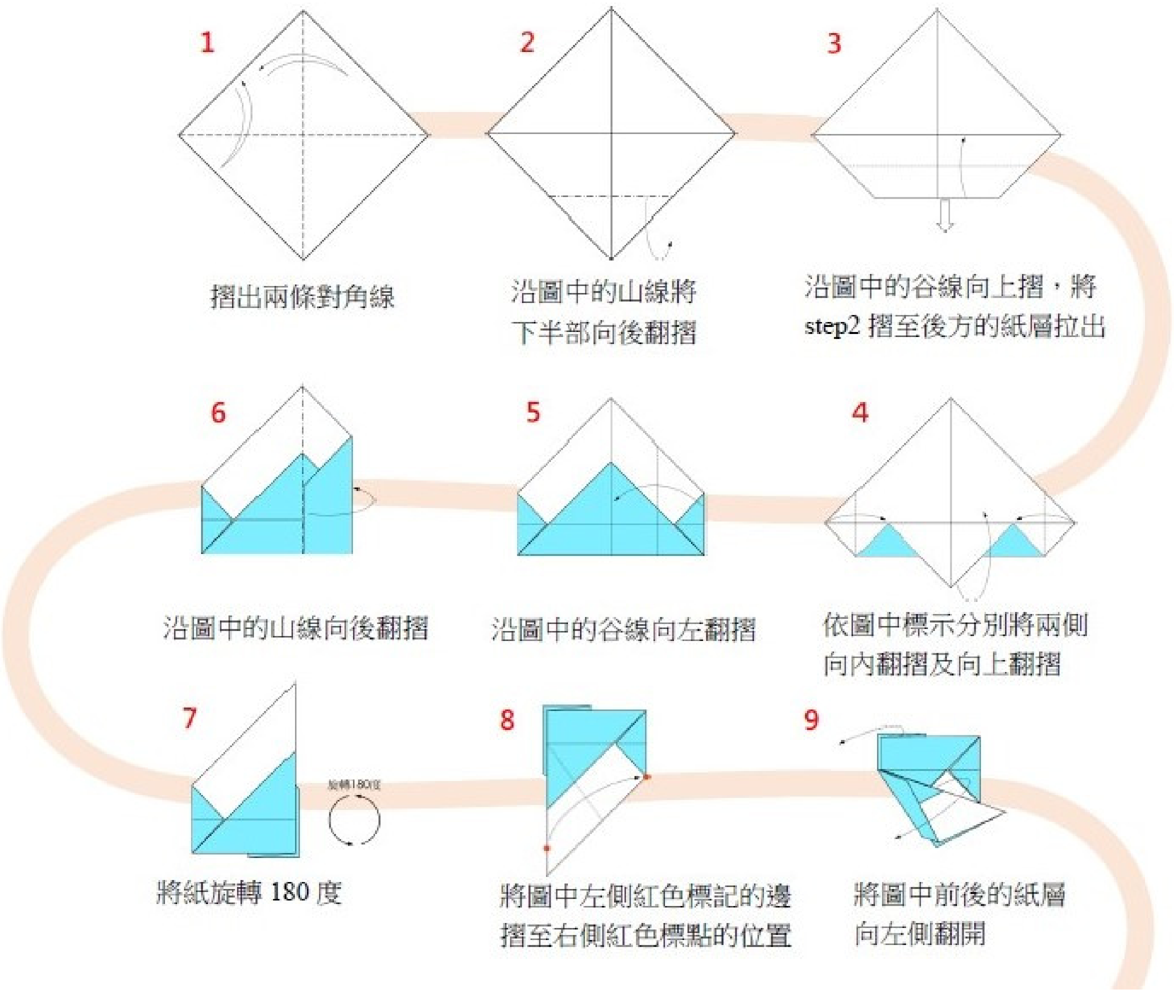


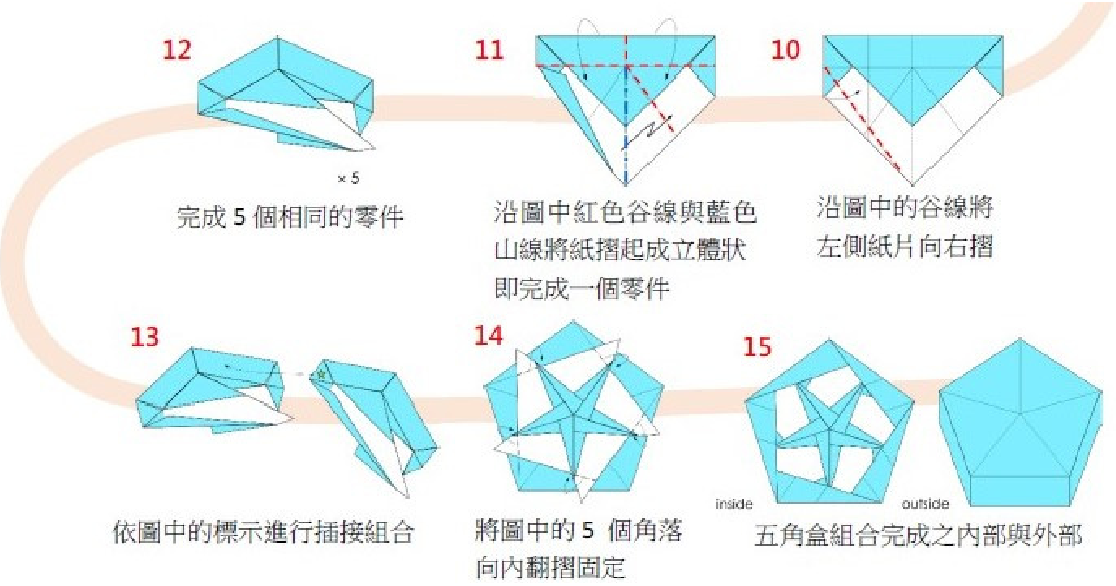

圖二



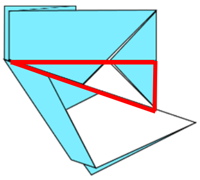

圖三

(2)組合式五角禮物盒：

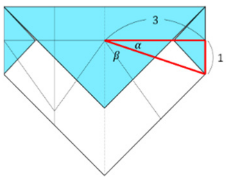




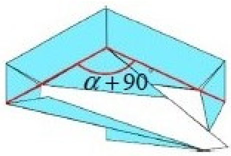

[說明]：觀察下圖四(上述摺紙步驟 9)之直角三角形，將其用紅色筆畫記。將色紙攤開如下圖五，經過計算可以找出直角三角形的邊長比為 3:1，正好呼應前述正五邊形之$\alpha = tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 18.435^{\circ}$，因此可得圖六所求之角度為 $\alpha + 90^{\circ} \approx 108.435^{\circ}$，與正五邊形的角度$108^{\circ}$誤差並不大。



圖四



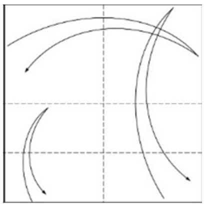

圖五

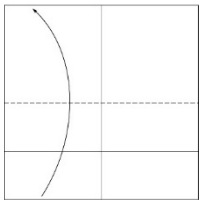


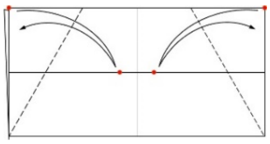

圖六

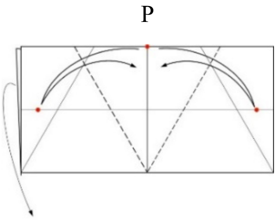
## 伍、正六邊形與組合式六角禮物盒

(1)正六邊形：







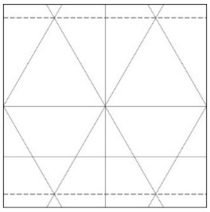



1. 摺出上下、左右的對摺線與下方$\frac{1}{4}$的摺線

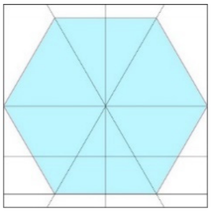
2. 將紙張上下對摺

3. 將左上角與右上角的直角頂分別摺至中間線上

4. 將圖中的 P 點摺至中間線後再將紙張還原

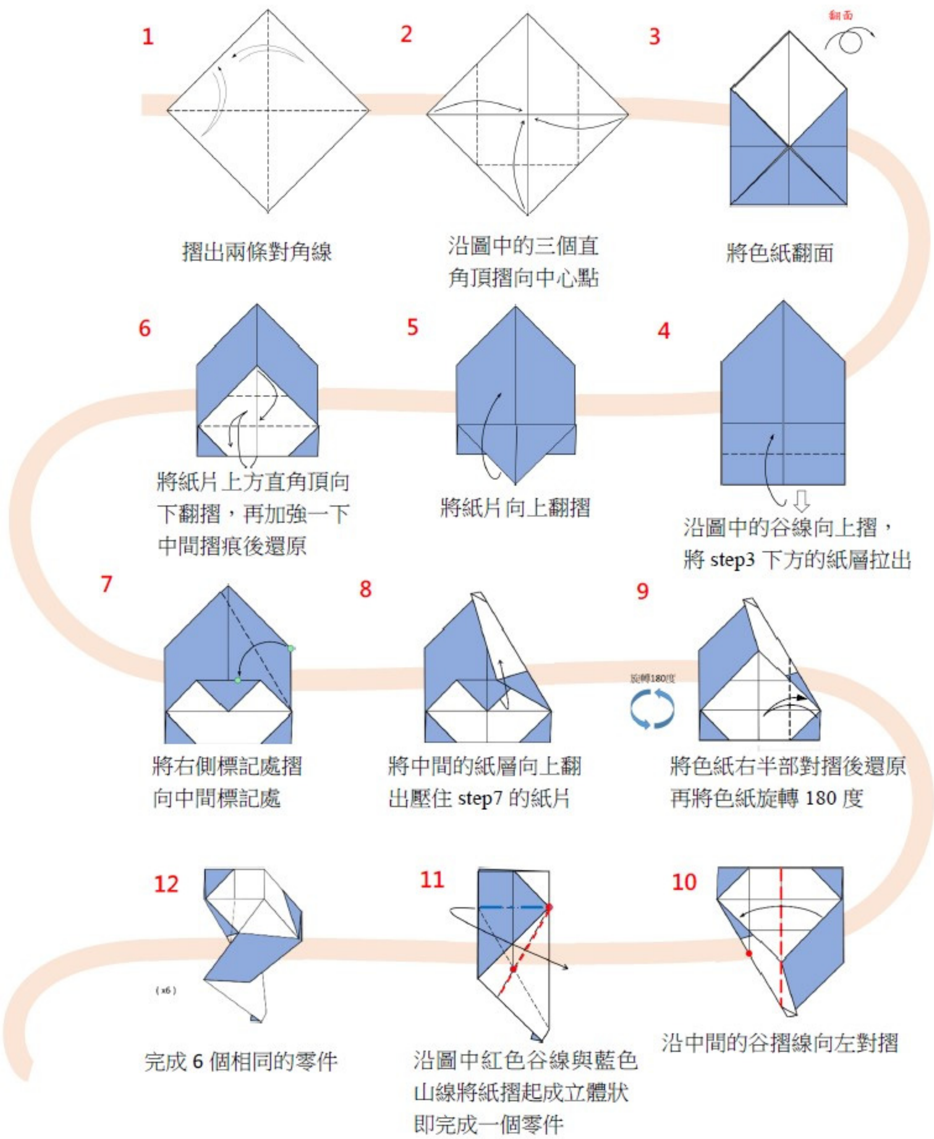


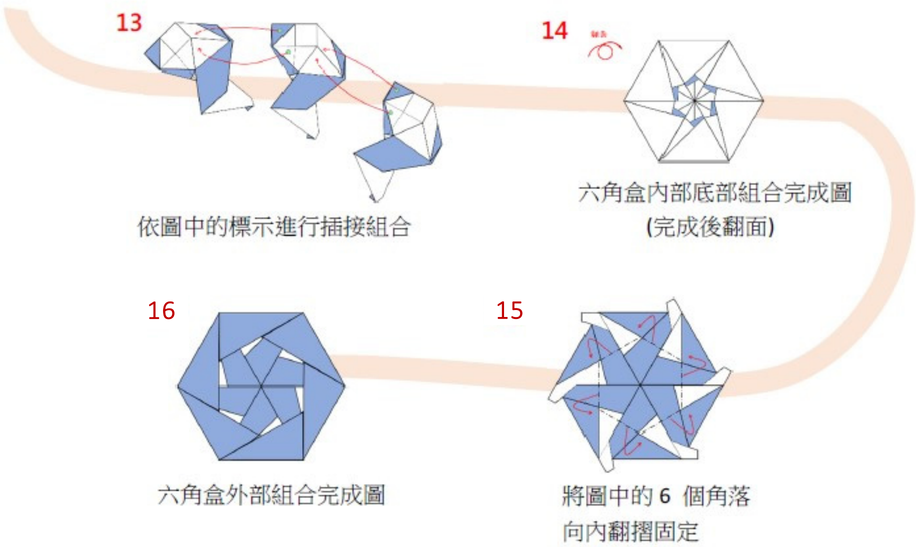
5. 摺出如圖中上、下兩條正三角形頂點的連線



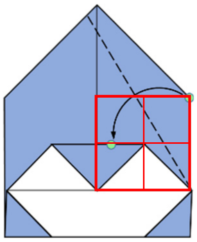
6. 完成正六邊形

[說明]：步驟 3 及步驟 4 即為本文前述正三角形摺紙之範例 2 摺出 60 度角之作法，讀者可參考之前的說明，在此就不再贅述。



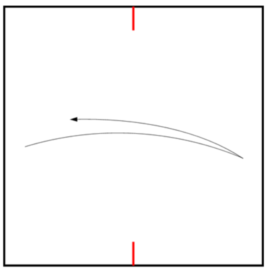


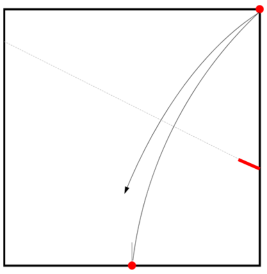

[說明]：上述摺紙步驟 7 之操作目的在於摺出 60 度角，其原理與正六邊形摺紙相同，主要是利用正三角形摺紙之範例 2 摺出 60 度角之作法，如右圖七。

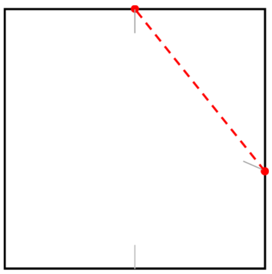

圖七

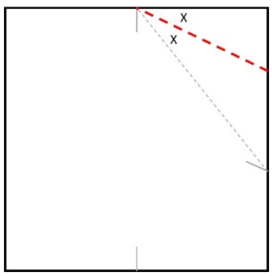
## 陸、組合式七角禮物盒

(1)正七邊形：

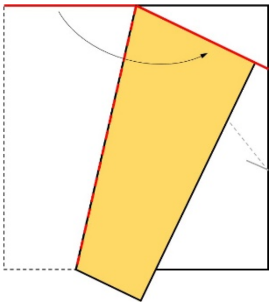

1. 摺出上下兩邊中點記號


2. 點對點壓出一點記號

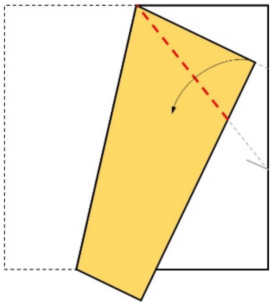

3. 過兩點向下翻摺後復原



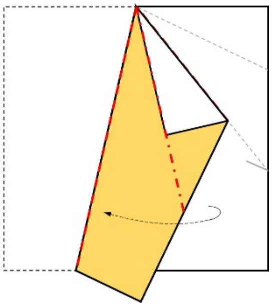
4. 做出角平分線後復原



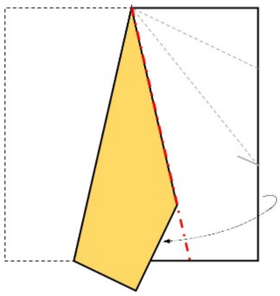
5. 對齊紅線向右翻摺



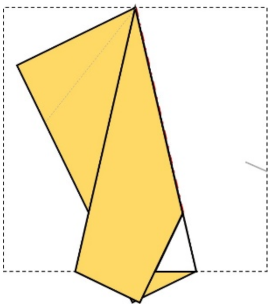
6. 沿著底下摺線向下翻摺



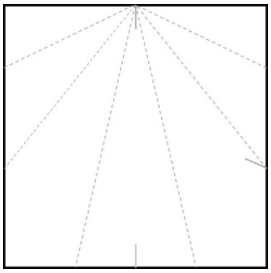
7. 沿著紅色虛線向內翻摺



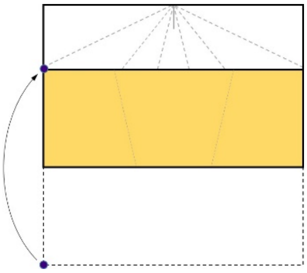
8. 後半頁沿著紅色虛線向後翻摺



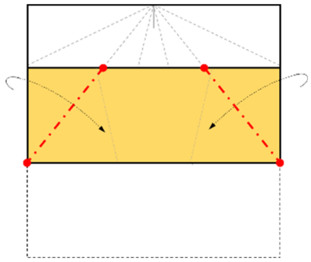
9. 攤開



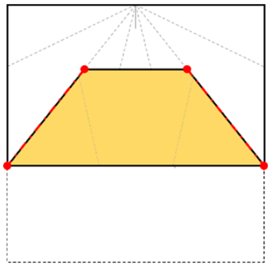
10. 攤開圖



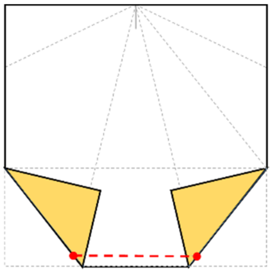
11. 點對點向上翻摺



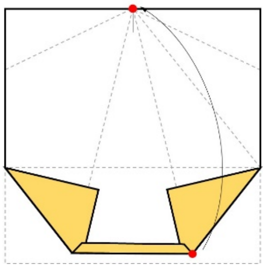
12. 連接紅色點向內翻摺



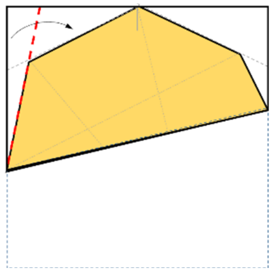
13. 攤開



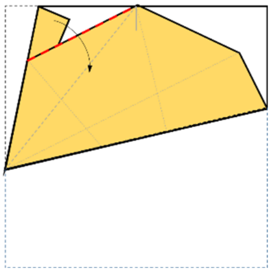
14. 連接兩點向上翻摺



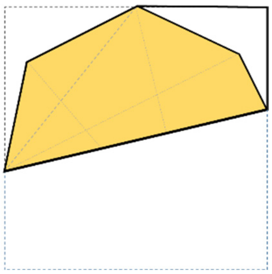
15. 點對點向上翻摺



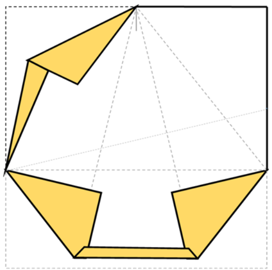
16. 沿紅色虛線向內收摺



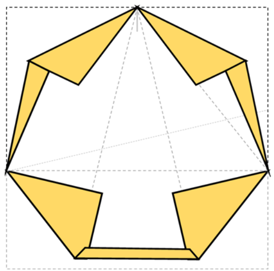
17 沿紅色虛線向內收摺



18. 向下攤開



19. 右邊重複同樣動作收摺



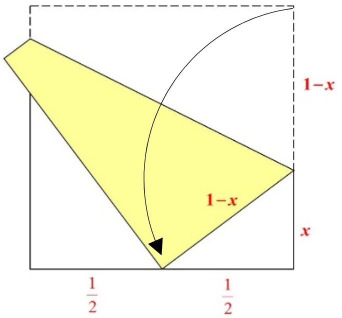
20. 完成正七邊形

[說明]：上述七邊形摺紙的步驟 2 中有一向下摺至中點的動作，如圖七。

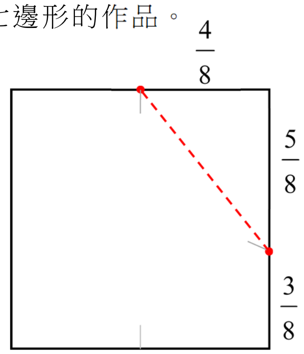
若將色紙的邊長設為 1，經由畢氏定理的計算：

$$(1-x)^2=\frac{1}{4}+x^2 \Rightarrow 1-2x=\frac{1}{4} \Rightarrow x=\frac{3}{8}$$

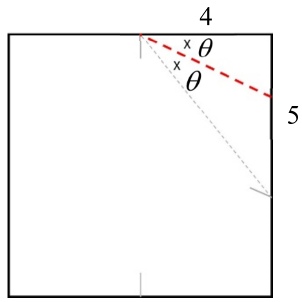
因此在步驟 3 中的直角三角形兩股的邊長比為 4：5，如圖八。在步驟 4 我們利用計算機來求正切函數 $\tan 2\theta=\frac{5}{4} \Rightarrow 2\theta=\tan^{-1}(\frac{5}{4}) \approx 51.34^{\circ}$，此一角度與 $\frac{360^{\circ}}{7} \approx 51.42^{\circ}$ 的誤差並不大，在步驟 5~10 中我們利用此角度將一平角七等分後，步驟 11~20 再摺出近似正七邊形的作品。



圖七

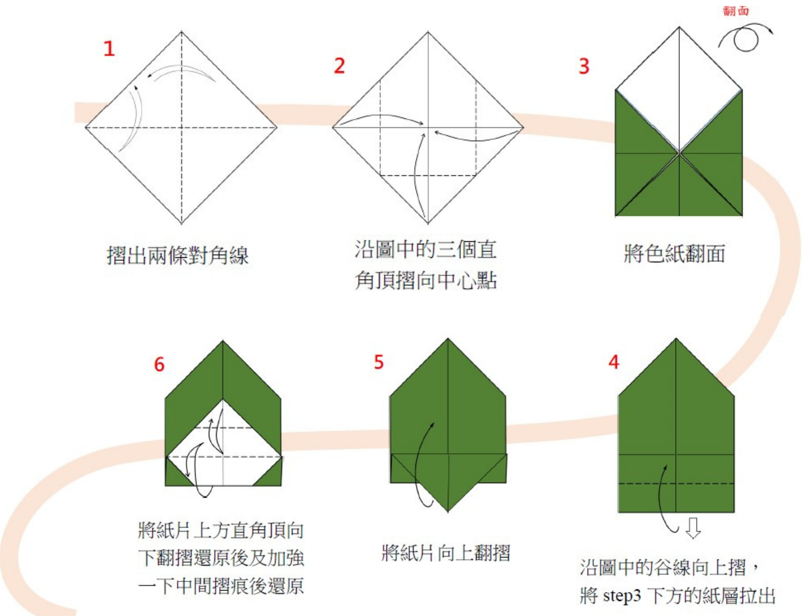


圖八

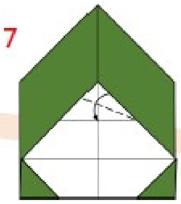


圖九

(2)組合式七角禮物盒：

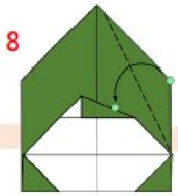


7



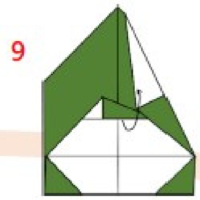
將右側標記處摺
向中間標記處

8



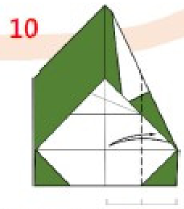
將右側標記處摺
向中間標記處

9



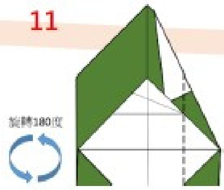
將中間的紙層向上翻
出壓住**step8** 的紙片

10



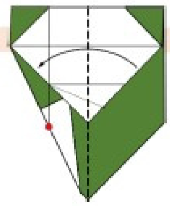
將色紙右半部對摺後還原

11



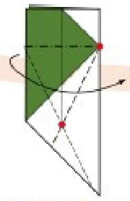

將色紙旋轉 180 度

12



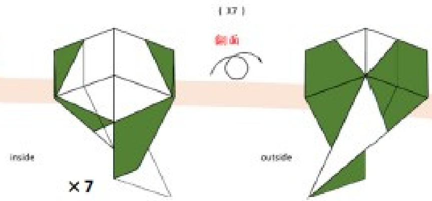
沿中間的谷摺線向左對摺

13



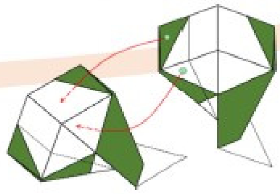
沿圖中紅色谷線與藍色
山線將紙摺起成立體狀
即完成一個零件

14



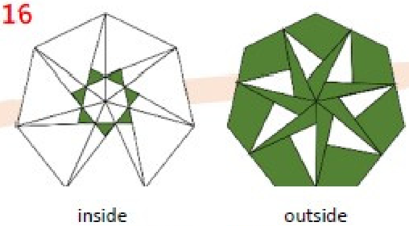

完成 7 個相同的零件
左圖為零件完成的內部圖
右圖為零件完成的外部圖

15



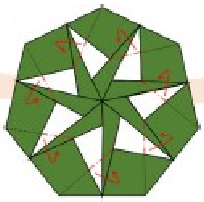
依圖中的標示進行插接組合

16



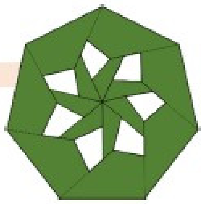

左圖為組合完成的內部圖
右圖為組合完成的外部圖

17



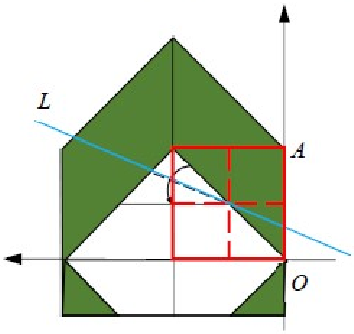
將圖中的 7 個角落
向內翻摺固定

18

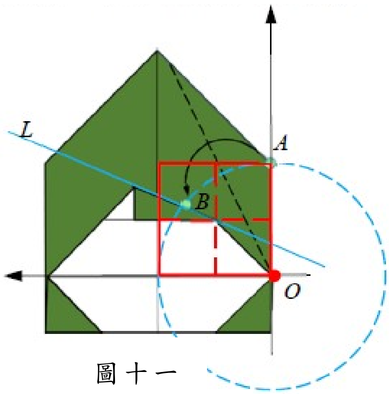


七角盒外部組合完成圖

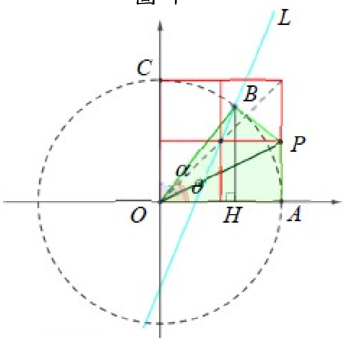
[說明]：解構這個七角盒的摺紙過程，重點在步驟 7~9，由於直觀的方式不易判斷，因此這個七角盒我們採用了解析幾何配合坐標化的方式來說明。為了方便計算與說明，我們將下圖十中的 $O$ 點定為坐標軸的原點，$\overleftrightarrow{OA}$ 定為 $x$ 軸，步驟 7 中 45 度的角平分線以斜率 $m=\tan 67.5^{\circ}$ 的直線 $L$ 來表示，步驟 8 的動作即圖十一中的 $A$ 點摺至 $B$ 點的意思。



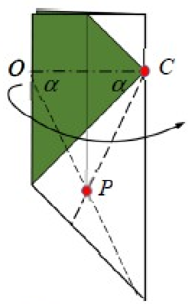

圖十



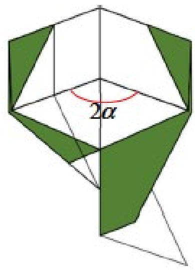

圖十一




圖十二




圖十三




圖十四

設 $O$ 為原點(0,0)，圓的半徑為 2，因此圓的方程式為 $x^2+y^2=4$，直線 $L$ 為斜率 $m=\tan 67.5^{\circ}=\sqrt{2}+1$ 且過點(1,1)的直線，則 $L$ 之方程式為 $L: y-1=(\sqrt{2}+1)x-1$，而圖十二中的點 $B$ 為圓與直線 $L$ 之交點，而 $\angle COP$ 即為上述摺紙步驟 14 中等腰三角形的底角 $\alpha$，如圖十三。

解聯立方程式：$\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y-1=(\sqrt{2}+1)(x-1) \end{cases} \Rightarrow x^2+\left((\sqrt{2}+1)(x-1)+1\right)^2=4$

$$\Rightarrow (2+\sqrt{2})x^2-(2+\sqrt{2})x-1=0 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}+1\pm\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}+2)}$$ (負不合)，

故取 $x=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}+2)}$

在 $\Delta BOH$ 中， $\overline{BO}=2,\overline{OH}=x=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{(2\sqrt{2}+2)}$

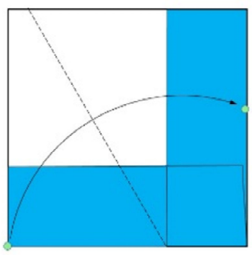
$\Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2(2\sqrt{2}+2)} \Rightarrow \theta\approx 51.8^\circ$，故 $\angle POC=\alpha=90^\circ-\dfrac{\theta}{2}\approx 64.1^\circ$

因此可知上述摺紙步驟 15 中所摺出來的角度為 $2\alpha\approx 128.2^\circ$，如圖十四，與正七邊形的內角之近似值 $128.57^\circ$ 誤差不大。

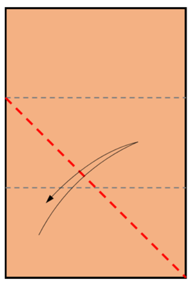
## 柒、操作心得

經由本文的探討，不知諸位讀者對於布施知子的多角盒設計有無自己的心得與想法，筆者在此提供一些個人操作的心得淺見，與大家交流。觀察上述的操作過程，不難發現大師在設計此一系列的多角盒似乎有一個脈絡與思路，下圖我們先將三角盒到七角盒摺紙步驟圖中，決定角度的關鍵步驟圖整理如下：

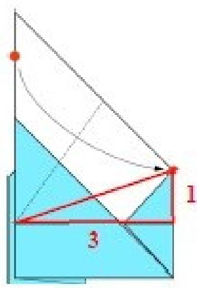
在三角盒與四角盒的操作是一般我們常見摺出 60 度與摺出 45 度(直角的角平分線)的方法，但在五角盒時設計者利用紙張摺痕的比例去創造 $tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 18.435^\circ$的近似值，不得不佩服設計者的巧思。其次在六角盒、七角盒與八角盒設計者使用同一手法去設計，其作法主要是利用下圖六角盒、七角盒與八角盒說明圖中的紅色的 2×2 的方格中的 45 度線、22.5 度線，圖十五中的 A 點摺向方格中的 P、Q、R，分別是六角、七角與八角盒的操作。



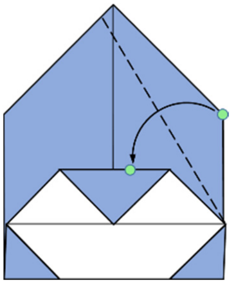
三角盒



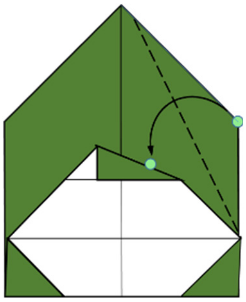
四角盒



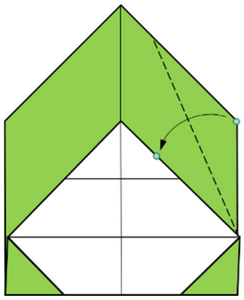

五角盒



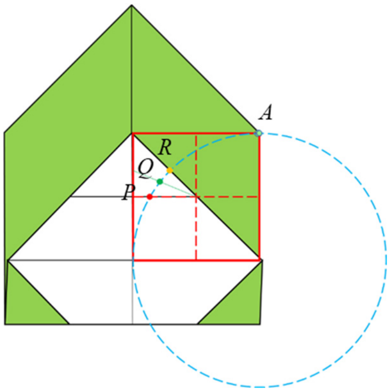
六角盒



七角盒



八角盒




說明：

六角盒：*A* 點摺至中的 *P* 點

七角盒：*A* 點摺至中的 *Q* 點

八角盒：*A* 點摺至中的 *R* 點

圖十五：六角盒、七角盒與八角盒說明圖

## 參考資料:

Tomoko Fuse - Joyful Origami Boxes　Japan Publications 1996 ISBN：9780870409745
芳賀和夫　摺紙玩數學：日本摺紙大師的幾何學教育　世茂出版社　2016/04/08

註：本文我們探討從正多邊形的摺紙出發，進而探討布施知子的多角盒設計，內容從三角盒、四角盒、五角盒、六角盒到七角盒，至於八角盒的部分，屏東女中陳哲成老師已有相關的文章，「摺紙學數學—八角箱（盒）：從正八邊形探尋有趣的幾何關係」，文章已刊登於龍騰數亦優刊物第 41 期，有興趣的朋友可以自行參考閱讀。

## 致謝:

最後感謝師大附中彭良禎老師、仁德文賢國中王儷娟老師，撥冗試閱，提供寶貴的意見!