

三稜鏡與分光原理(下)

王淦曦 賈至達*

國立臺灣師範大學 物理系

柒、稜鏡解析度

當光透過三稜鏡散開來後，不同波長的光沿不同路徑前進，差別越大，越容易分辨，這也是較早的分光光譜儀使用三稜鏡作為光波波長判定的原因。若波長 λ 光強度最強的位置恰落在波長 $\lambda + \Delta\lambda$ 光強度第一個最弱暗紋的位置，如圖 8，則稱此兩波長恰可分辨，此判斷條件稱之為瑞利判準或瑞利準則，此時解析度定義為 $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$ 。

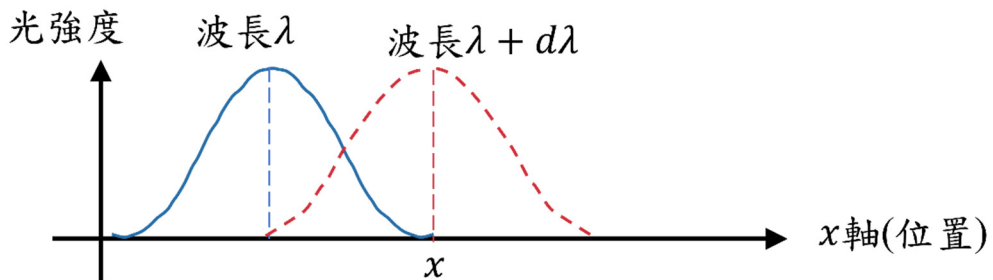


圖 8：波長 λ 的光強度在 x 處有最小值，同時波長 $\lambda + \Delta\lambda$ 的光強度在 x 處有最大值，此兩波恰可分辨，解析度即 $\lambda/\Delta\lambda$ 。

為何稱之為解析度？「解析」指可將物體分析、釐清，若能分辨越細微的差別，則解析程度越高；而「度」一詞有程度、比率的意思。當波長為 λ 和 $\lambda + \Delta\lambda$ 的光一同透過三稜鏡後分離至如圖 8 所示的結果，則顯示恰可分辨 λ 與 $\lambda + \Delta\lambda$ 這兩個波長的光。將波長 $\lambda + \Delta\lambda$ 表示為 λ 的倍率，即 $\lambda(1 + \Delta)$ ，其中 $\Delta = \Delta\lambda/\lambda$ ， $(1 + \Delta)$ 即為其倍率。若 $\Delta\lambda$ 範圍大，則 Δ 比例值較大，顯示對於不同波長的分辨能力較差，反之 Δ 比例值較小，則可以解析出較精準的波長差異。解析度與波長 λ 相關，且和此波長 λ 範圍內恰可辨識之 $\Delta\lambda$ 大小相關，也就是 $\lambda - \Delta\lambda < \lambda < \lambda + \Delta\lambda$ 範圍內的光是無法辨識出來的。根據解析度的概念，定義解析度 $R \equiv 1/\Delta = \lambda/\Delta\lambda$ ，表示在對於特定波長範圍內 λ ， $\Delta\lambda$ 越小解析度 R 越大，儀器的波長解析能力越高。(Majumdar, K. and Sodha M. S., 1953)

*為本文通訊作者

三稜鏡解析度的表達式為何？又與那些參數有關？因此設計稜鏡分光裝置如圖 9 所示。在稜鏡前後分別放置透鏡 1、透鏡 2，使光源經透鏡 1 後平行入射三稜鏡，並使透射光經透鏡 2 聚焦於屏幕上，且波長 λ 與 $\lambda + \Delta\lambda$ 符合瑞利準則恰可分辨，如圖 9 兩路徑所示。

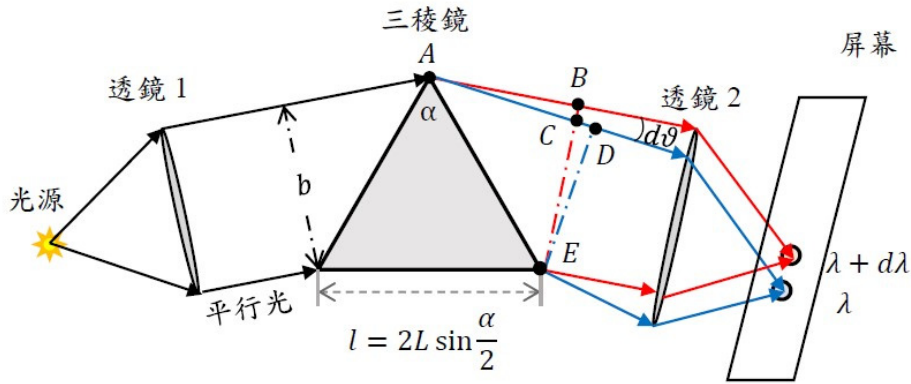


圖 9：入射平行光經稜鏡後色散；用透鏡 2 聚光於螢幕，波長分別為 λ 與 $\lambda + d\lambda$ 的兩光束波恰可分辨，即兩者光強度最強與最弱處重合。

在最小偏向角的條件下； \overline{AB} 為波長 $\lambda + d\lambda$ 的光路徑， \overline{ACD} 為波長 λ 的光路徑，其中 b 為光束截面的寬度，近似於 \overline{BE} 、 \overline{CE} 、 \overline{DE} 的長度， $d\theta$ 為波長為 $\lambda + d\lambda$ 和 λ 兩道光束的夾角，也等於是兩束光在最小偏向角變異量 $d\delta_{\min}$ ，且 $d\theta \ll 1$ 。從圖 9 中幾何關係，可以看出 $\angle CED = \angle BAC = d\theta$ ，因此兩波光程差 $\overline{CD} = b d\theta = \lambda$ ，即

$$d\theta = \frac{\lambda}{b} \quad (24)$$

又因為有最小偏向角時有： $\vartheta_1^* = \vartheta_4 = \sin^{-1} \left[n \sin \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right]$ ， ϑ_4 是折射率 n 的函數；因此光程差可以用 $d\theta$ 或折射率 n 表示，及 $d\theta$ 是折射率 n 的函數。 λ 對應折射率 n ， $\lambda + \Delta\lambda$ 對應折射率 $n - dn$ ；且依據圖 6 和 (18) 式討論的結果知：

$$\lambda = b d\theta = (n - dn)l - nl = -dn l \quad (25)$$

再根據 (19) 式折射率的柯西經驗公式，代入解析度 R 的定義，則

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{-dn}{d\lambda} l = \frac{2B}{\lambda^3} \cdot l = \frac{4B}{\lambda^3} \cdot L \sin \frac{\alpha}{2} \quad (26)$$

因此模型為等腰三角形，(26) 式表明三稜鏡底部寬度 l 越寬，解析度 R 越高；亦可看作 $\sin \frac{\alpha}{2}$ 越大，也就是對應到頂角 α ，解析度越高 (Sleator W. W. 1940)。以上詳細計算過程與解

析度的其他等價表示請見附錄六。

捌、類似稜鏡效應的自然現象

三稜鏡常用於高精密度的折射率測定(Medenbach O, et al. 2001)，更可應用於影像系統、光源系統、測量儀器、掃描儀、光通訊器件等。但是許多美麗的天空景象，例如日暈、幻日、日承和月暈也跟上述學到的稜鏡相關。天氣乾冷時，天空雲層中會有很多六角形的冰晶，如圖 10(a)所示，六角冰晶可以看成是一個正三角形稜鏡，因此在天空中會產生日暈、月暈、承日和幻日等奇妙的景象。英國大氣光學(Atmospheric Optics)網站(<https://atoptics.co.uk/>)提供相當多的資訊，討論水珠、彩虹和暈等色散分光的現象，以及大氣中所產生光學景象的照片，同時也提供模擬的軟體 HaloSim 3.0，用以模擬許多天空中的光學現象。大氣光學網站提到由冰晶產生日暈，圖 10(b)是利用該網站所提供的 HaloSim 3.0 軟體所模擬出來的天空景象。環狀日暈是視角大約為 22° 的一個亮環；當陽光由圖 10(a)六角冰晶的 A 面入射而由 C 面透射(或其對應面)，有如稜鏡的彩虹效應，造成陽光色散而在偏向角度為 22° 的日暈環，見圖 11。若由 A 面入射而由 D 面透射，也會產生一個 46° 的日暈環，只是強度不足通常不易察覺。圖 11(a)為台灣日暈的照片。圖 11(b)為一個示意圖，陽光入射冰晶，而六角冰晶是任意排列，陽光因為偏向，而產生角度為 22° 的日暈環。這些有趣的現象也可以是一個有趣的研究主題。

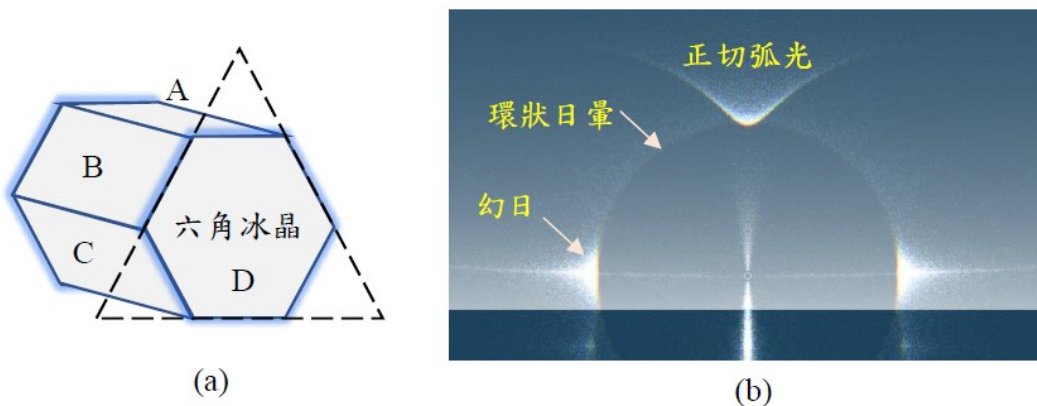


圖 10：(a)天空中的六角冰晶可以視為正三角形稜鏡；(b) 由大氣光學網站提供的 HaloSim 免費模擬軟體所模擬的圖形。

許多天空中的景象是透過多年的研究得到適當的解釋，所以也多半有相對應的人造實驗的驗證。Selmke M. (2015)、Selmke M. and Selmke S.(2017)就仿造了許多相關的大氣光學的現象，而讓無法觸及的天空中的現象，得以用實驗室中或是家中的器材就可以模擬，並進而用實驗室中或是家中的器材就可以仿造天空中的景象，教學可以進行實驗測量並進

一步解釋其現象，同時也在生活中拓展出不一樣的觀察方法。本文最開頭我們寫了一段楔子，是有感於自然賦予我們的不僅是理性的科學，也有感性的人文！

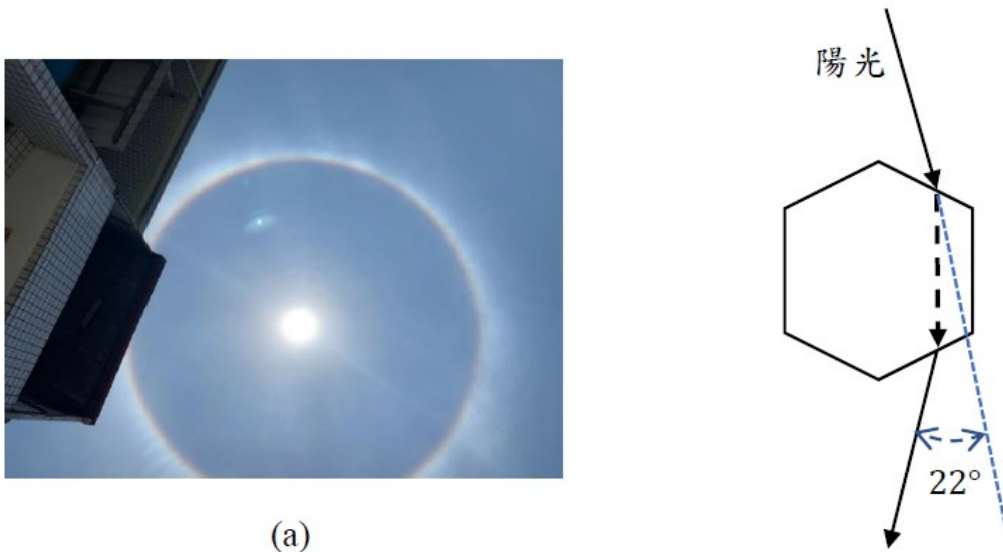


圖 11：(a)日暈，拍攝時間 2020 年 4 月 16 日。(b) 產生日暈的示意圖。陽光由冰晶的柱面入射，且最小偏向角為 22° 。

結語

三稜鏡的確是一個很有趣的幾何光學題材，在人類科學的發展歷史上(邱韻如 2020)、科學技術的應用上(The History of Spectrometer)，都有著十分有趣的故事。而在教學上更是有很多教授、老師們的創意在其中，是一個值得開發的教學題材。在撰寫的過程中，筆者也有很多發想，發現許多耳熟能詳的物理泰斗曾經有做過類似的稜鏡光譜實驗，如夫朗和斐(Fraunhofer)、克希何夫(Kirchhoff)，光譜的測量也間接促使量子力學的誕生。

我們十分推薦中學老師以三稜鏡的學習當成一個探究的實驗課程，內容包含有幾何光學、三角幾何、微積分等，也有很多空間可以讓學生發揮他們發現問題、解決問題的創意---會是更有趣的重點。

附錄

附錄一：偏向角 δ 的其他表示式

由折射定律知道 $\sin \vartheta_1 = n \sin \vartheta_2$ 和 $n \sin \vartheta_3 = \sin \vartheta_4$ ；又 $\vartheta_2 + \vartheta_3 = \alpha$ ；使用和角公式置換得

$$n \sin \vartheta_3 = n \sin(\alpha - \vartheta_2) = n(\sin \alpha \cos \vartheta_2 - \cos \alpha \sin \vartheta_2)$$

$$\begin{aligned} &= n \left[\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \vartheta_1}{n^2}} - \cos \alpha \frac{\sin \vartheta_1}{n} \right] \\ &= \sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \cos \alpha \sin \vartheta_1 \quad (1-1) \end{aligned}$$

又 $\vartheta_4 = \sin^{-1}(n \sin \vartheta_3)$ ，將上述的結果代入，得

$$\vartheta_4 = \sin^{-1} \left(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \cos \alpha \sin \vartheta_1 \right) \quad (1-2)$$

因此偏向角 δ 以 ϑ_1 表示的另一種形式為

$$\delta = \vartheta_1 + \sin^{-1} \left(\sin \alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_1} - \cos \alpha \sin \vartheta_1 \right) - \alpha \quad (1-3)$$

上兩式與(6)式是等價的。

附錄二：利用微分解出最小偏向角 δ_{\min}

當有最小偏向角 δ_{\min} 時，依然符合折射定律，故由司乃耳定律； $\sin \vartheta_4 = n \sin \vartheta_3$ ，可先計算 $\frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1}$ 的微分結果，即先討論 $\sin \vartheta_4$ 微分：

$$\frac{d \sin \vartheta_4}{d\vartheta_1} = \frac{d \sin \vartheta_4}{d\vartheta_4} \frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1} = \cos \vartheta_4 \frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1} \quad (2-1)$$

又可以將 $\sin \vartheta_4$ 用 $n \sin \vartheta_3$ 取代，即

$$\frac{d \sin \vartheta_4}{d\vartheta_1} = \frac{d(n \sin \vartheta_3)}{d\vartheta_1} = \frac{d(n \sin \vartheta_3)}{d\vartheta_3} \frac{d\vartheta_3}{d\vartheta_1} = n \cos \vartheta_3 \frac{d\vartheta_3}{d\vartheta_1} \quad (2-2)$$

由(2-1)和(2-2)式，得知

$$\cos \vartheta_4 \frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1} = n \cos \vartheta_3 \frac{d\vartheta_3}{d\vartheta_1} \quad (2-3)$$

上式中 ϑ_3 可以利用正文中的(3)式，以 $\vartheta_3 = \alpha - \vartheta_2$ 取代，而算出

$$\frac{d \sin \vartheta_4}{d\vartheta_1} = n \cos \vartheta_3 \frac{d(\alpha - \vartheta_2)}{d\vartheta_1} = -n \cos \vartheta_3 \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} \quad (2-4)$$

由(2-3)和(2-4)式，得知

$$-\frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{d\vartheta_3}{d\vartheta_1} \quad (2-5)$$

接著考慮 $\frac{\sin\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \cos\vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1}$ 的微分；又 $\sin\vartheta_2 = \frac{1}{n}\sin\vartheta_1$ ，故

$$\frac{d\sin\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{d\left(\frac{1}{n}\sin\vartheta_1\right)}{d\vartheta_1} = \frac{1}{n}\cos\vartheta_1 = \cos\vartheta_2 \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1}$$

得出

$$\frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = \frac{1\cos\vartheta_1}{n\cos\vartheta_2} \quad (2-5)$$

由(2-1)和(2-4)式形成的等式中，將(2-5)式代入

$$\cos\vartheta_4 \frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1} = -n\cos\vartheta_3 \frac{d\vartheta_2}{d\vartheta_1} = -n\cos\vartheta_3 \left(\frac{1\cos\vartheta_1}{n\cos\vartheta_2}\right)$$

整理後，得到(2-6)式，即

$$\frac{d\vartheta_4}{d\vartheta_1} = \frac{-\cos\vartheta_1\cos\vartheta_3}{\cos\vartheta_2\cos\vartheta_4} = -1 \quad (2-6)$$

上式和(10)式結果相同，(2-6)式可得出 $\cos\vartheta_1\cos\vartheta_3 = \cos\vartheta_2\cos\vartheta_4$ ；再利用三角函數的恆等式： $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ，可以得

$$\sqrt{(1 - \sin^2\vartheta_1)(1 - \sin^2\vartheta_3)} = \sqrt{(1 - \sin^2\vartheta_2)(1 - \sin^2\vartheta_4)}$$

因為根號內的數值為正值，再將司乃耳定律代入，則

$$(1 - n^2\sin^2\vartheta_2)(1 - \sin^2\vartheta_3) = (1 - \sin^2\vartheta_2)(1 - n^2\sin^2\vartheta_3)$$

整理上式得

$$-n^2\sin^2\vartheta_2 - \sin^2\vartheta_3 = -\sin^2\vartheta_2 - n^2\sin^2\vartheta_3 \quad (2-7)$$

比較等式兩邊的係數後得出 $\sin^2\vartheta_2 = \sin^2\vartheta_3$ ；這個結果再結合(3)式，也就給出

$$\vartheta_2 = \vartheta_3 = \frac{\alpha}{2} \quad (2-8)$$

(2-8)式說明在最小偏向角時； $\vartheta_1^* = \vartheta_4$ ； $\sin\vartheta_1^* = \sin\vartheta_4 = n\sin\frac{\alpha}{2} = n\sin\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}$ ；因此

可求出最小偏向角 $\delta_{\min} = \frac{\sin\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ ；也就式正文中的(16)式。

此附錄二提出對 ϑ_4 微分方式解得最小偏向角 δ_{\min} ，也可以對其他的角微分，而得到相同的結果。事實上還有也許多方式都可以求出(16)式，讀者可以自行嘗試。可以參閱附錄三。

附錄三：簡易方式理解函數的微分；以 $d \sin x = \cos x dx$ 為例

$f(x)$ 對 x 微分表示為 $\frac{df(x)}{dx}$ ，其意義是指在 $(x, f(x))$ 該點的斜率，如下圖 12 所示。當 $f(x) = \sin x$ ，則 $\frac{df(x)}{dx} = \frac{d \sin x}{dx}$ 。圖中任一個角度 x ，都對應一個 $\sin x$ 數值，且也都對應一個該點的斜率。以下說明在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 的範圍分成四個部分；斜率周而復始變化的狀況：

1. 當 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ， $\sin x$ 由 0 逐漸增加到 1，而斜率卻是由最大值 1 漸漸變小到 0；
2. 當 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ ， $\sin x$ 由 1 逐漸減小到 0，而斜率卻是由 0 漸漸變小到最小的斜率 -1。
3. 當 $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ ， $\sin x$ 由 0 逐漸減小到 -1，而斜率卻是由 -1 漸漸增加到斜率為 0。
4. 當 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$ ， $\sin x$ 由 -1 逐漸增加到 0，而斜率卻是由 0 漸漸增加到斜率為 1。

以上四個部分，在 $2\pi \leq x \leq 4\pi$ 會重複，實際上每 2π 範圍斜率變化都重複一次。圖示法也可說明 $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$ ，可以先繪製的 $\cos x$ 函數，再求其各點的斜率數值，並依據繪出數據圖，會等於 $-\sin x$ ；讀者可以自行證明。如果老師要教導學生了解三角函數的微分性質，可以利用方格紙繪出三角函數做練習，利用方格紙測量該三角函數的斜率，就可以找出該三角函數所對應的微分函數。

附錄四：另一種創意模式求 $\vartheta_{1,\min}$

求 $\vartheta_{1,\min}$ 的構想是先考慮兩面平行的介質，類似於稜鏡的頂角為 0° ，再考慮將光透射出的介面傾斜，而達到某一個特定的頂角 α 。考慮下圖 13 中兩面平行的介質，入射角為 ϑ_1 ，透射角為 ϑ_4 ，因為兩面平行，由折射定律知道光穿透時其偏向角 $\delta = 0$ ，也就是 $\vartheta_1 = \vartheta_4$ 。

$$\sin \vartheta_1 = n \sin \vartheta_2 = n \sin \vartheta_3 = \sin \vartheta_4 \quad (4-1)$$

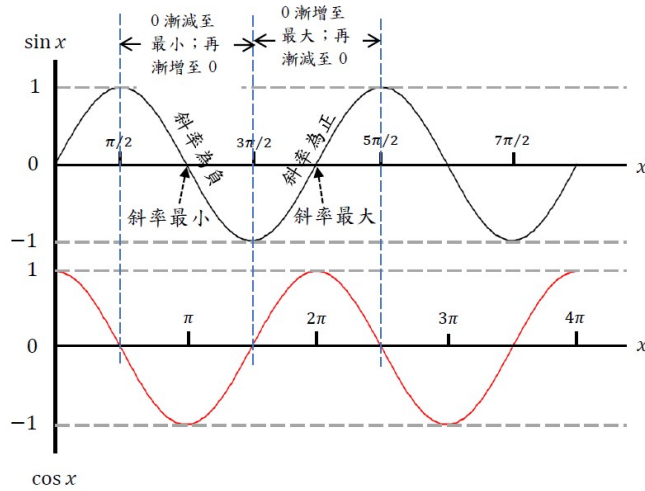


圖 12：用圖示法說明三角函數的微分關係，由斜率的改變可以知道 $\sin x$ 函數的微分等於 $\cos x$ ；即 $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ 。

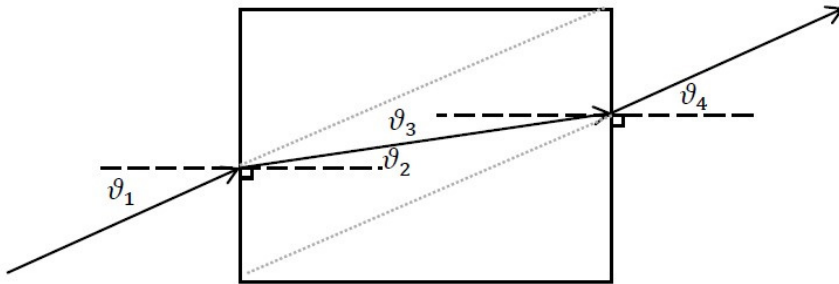


圖 13：考慮一個兩面平行的平板型介質，入射光經折射後由另一面平行入射光透射。由幾何關係可知 ϑ_2 與 ϑ_3 為內錯角，其值相等，故 $\vartheta_1 = \vartheta_4$ 。

若開始旋轉右邊介面，使左右兩介面交角為 α ，此時右邊介面的法向量隨之旋轉 α ，因此第二次折射的入射角 ϑ_3' 變為 $|\vartheta_3 - \alpha| = |\vartheta_2 - \alpha| = \left| \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) - \alpha \right|$ 。接著考慮第二次折射會有全反射的問題， ϑ_3' 必須小於臨界角 $\sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right)$ ；即

$$\vartheta_3' = \alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) \leq \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right)$$

因為 $\vartheta_3' < \vartheta_3$ ，因此

$$\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{\sin \vartheta_1}{n} \right) \leq \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \quad (4-2)$$

由(4-2)式可以推算出入射角 ϑ_1 的最小值；即

$$\vartheta_{1,\min} = \sin^{-1} \left\{ n \sin \left[\alpha - \sin^{-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right] \right\} \quad (4-3)$$

與(7)式相等。

附錄五：由反三角函數的微分求角色散 D

假設 $f(x)$ 表示為任意的反三角函數，例如 $f(x) = \sin x$ ，故 $f^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ ，則 $f(f^{-1}(x)) = x$ ；因此對於任意的反三角函數，下式成立，

$$\frac{d f(f^{-1}(x))}{d x} = 1$$

而此反三角函數微分為

$$\frac{d f(f^{-1}(x))}{d x} = \frac{d f(f^{-1}(x))}{d f^{-1}(x)} \frac{d f^{-1}(x)}{d x} = \frac{d f(x)}{d x} \frac{d f^{-1}(x)}{d x} = 1$$

由上式最後等式的兩端得知

$$\frac{d f^{-1}(x)}{d x} = \frac{1}{\frac{d f(x)}{d x}} \quad (5-1)$$

上式即為任何反函數的微分結果，是一個通式。根據角色散定義 $D \equiv \frac{d \delta_{\min}}{d \lambda}$ ，並將(15)式最小偏向角 $\delta_{\min} = 2 \sin^{-1} \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha$ 代入，即

$$D = \frac{d \left[2 \sin^{-1} \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right) - \alpha \right]}{d \lambda}$$

利用(8-1)式，於是將 $\sin^{-1} \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right)$ 對 λ 直接微分，且 $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$ 代入得

$$D = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{dn}{d \lambda} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \cdot \frac{d \left(A + \frac{B}{\lambda^2} \right)}{d \lambda}$$

也就是

$$D = - \frac{4B}{\lambda^3} \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \left(n \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \quad (5-3)$$

此結果與(22)式相同。將 $2L \sin \frac{\alpha}{2} = l$ 代入上述結果， D 亦等於

$$D = - \frac{2Bl}{L \lambda^3 \cos \left(\frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} \right)} \quad (5-4)$$

附錄六：由角色散 D 求解析度 R

由角色散的定義， $D \equiv \frac{d\delta_{\min}}{d\lambda}$ ；且比較圖 9 和(24)式知 $d\theta$ 等於是兩束光在最小偏向角變異量 $d\delta_{\min}$ ，因此 $D = \frac{d\theta}{d\lambda}$ 。故由 $d\theta = Dd\lambda$ ，得出

$$d\theta = -\frac{4B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}} d\lambda = \frac{\lambda}{b} \quad (6-1)$$

即得知

$$\frac{\lambda}{d\lambda} = -\frac{4B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}} \cdot b \quad (6-2)$$

代入解析度 R 等於(取正值表示)

$$R = \frac{\lambda}{d\lambda} = \frac{4B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}} \cdot b \quad (6-3)$$

如圖 6 和(18)式知： $b = L \cos \vartheta_1^* = L \cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}$ ，且 $L \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2}$ ；因此在最小偏向角 δ_{\min} 附近的解析度為

$$R = \frac{4B}{\lambda^3} \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2}} \cdot L \cos \frac{\delta_{\min} + \alpha}{2} = \frac{2Bl}{\lambda^3} \quad (6-4)$$

上式的結果和(26)式相同。

參考資料

- Louis Trenchard More (1934). *Isaac Newton, a Biography*. New York and London: Charles Scribner's Sons.
- 尹章義、曾惠明(2007)：晚明中醫西醫的第一場戰爭--利瑪竇利用三稜鏡征服中國。歷史月刊，234，80-91。
- Lynch D. K., Livingston W. C., Livingston W. (2001). *Color and Light in Nature*. Cambridge University Press.
- Li C. J., Fang Y. C., Chu, W. T. and Cheng, M. C. (2008). Design of a prism light-guide plate for an LCD backlight module. *Journal of the Society for Information Display* 16 545-50
- Moulton P. F.(1982), Solid State Research Report, Lincoln Laboratory, MIT (1982:3), pp. 15-21.
- Jiang G., Kai Shen K. and Wang M. R. (2013). Fabrication of 3D Micro- and Nano-Structures by Prism-Assisted UV and Holographic Lithography. *Updates in Advanced Lithography* (Editor Sumio Hosaka) Ch.10
- Fraunhofer J. (1814) "Bestimmung des Brechungs- und des Farben-Zerstreuungs – Vermögens

verschiedener Glasarten, in Bezug auf die Vervollkommnung achromatischer Fernröhre" (Determination of the refractive and color-dispersing power of different types of glass, in relation to the improvement of achromatic telescopes), *Denkschriften der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu München* (Memoirs of the Royal Academy of Sciences in Munich), 5: 193–226; see especially pages 202–205 and the plate following page 226.

梁立國(2014)：以稜鏡色散對白光 LED 與鹵素燈之光譜分析及其教學應用。物理教育學刊，15(2)，97-105。

陳昊維、陳清風(2013)：使用高中數學證明「三稜鏡的最小偏向角」。科學教育月刊，363，44-6。

Mayer V. V. and Varaksina E. I. (2022). Normal light dispersion in laboratory experiments. *Physics Education* 57 015013. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ac36a7>

Mustafa Coramik and Erdoğan Özdemir (2021). Investigation of the dispersion of light in prisms via *RayLab*. *Physics Education* 56 065022. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/ac1e74>.

三稜鏡光學模擬程式：1. Ophysics 網站 <https://ophysics.com/l8.html>、2. Desmos 網站 <https://www.desmos.com/calculator/azu4gy2v62?lang=zh-CN>、GeoGebra 網站 <https://www.geogebra.org/search/prism>

線上實驗網站：[www.olabs.edu.in](http://amrita.olabs.edu.in)，Refraction through a Prism：
<http://amrita.olabs.edu.in/?sub=1&brch=6&sim=246&cnt=1>

Waldenström S. and Razi Naqvi K. (1978). A simple, accurate alternative to the minimum-deviation method for the determination of the refractive index of a prism, *American Journal of Physics*, 46, 1009-1011.

Dileep V. Sathe (1987). Alternative for the angle of minimum deviation. *Bulletin of IAPT* 4, 216

Cheng Chao-Chia (2014). Refractive index measurement by prism autocollimation. *American Journal of Physics* 82, 214-216.

Feldman A. (1983). Refraction through a prism. *American Journal of Physics* 51, 929-931.

Christy, R. W. (1972). Classical Theory of Optical Dispersion. *American Journal of Physics*, 40, 1403-1418.

Hazzard, George W. (1951). Dispersion and Resolving Power of Prism Spectrometers. *American Journal of Physics* 19, 235-236.

Duarte, F. J. and Piper J. A. (1983). Generalized prism dispersion theory. *American Journal of Physics* 51, 1132-1134.

Majumdar, K. and Mahendra Singh Sodha (1953). On the Resolving Power of a Prism. *American Journal of Physics* 21, 387-388.

Sleator W. W., (1940). The Resolving Power of a Prism. *American Journal of Physics* 8, 47-48.

Medenbach O, Dettmar D, Shannon R D, Fischer R X and Yen W. M.(2001) Refractive index and optical dispersion of rare earth oxides using a small-prism technique. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 3 174. <https://doi.org/10.1088/1464-4258/3/3/303>

Chandra B. P. and Bhaiya S. C.(1983). A simple, accurate alternative to the minimum deviation method of determining the refractive index of liquids. *American Journal of Physics* 51, 160; <https://doi.org/10.1119/1.13314>

Selmke M. and Selmke S.(2017). Artificial circumzenithal and circumhorizontal arcs featured. *American Journal of Physics* 85, 575; <https://doi.org/10.1119/1.4984802>

Selmke M. (2015). Artificial halos. *American Journal of Physics* 83, 751; <https://doi.org/10.1119/1.4923458>

邱韻如(2020)：牛頓的三稜鏡實驗。物理教育學刊，21(1)，57-65。

The History of Spectrometer：<https://www.kruess.com/en/campus/spectroscopy/history-of-spectroscopy/>

【完】