「費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式」的迴響

許閎揚

縣立彰化藝術高級中學

壹、前言

費氏數列的定義為$\langle F_n \rangle : F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，$n \geq 2$ 且 $F_0 = 0$，$F_1 = 1$，它是中學數學課程常見的一個數列。在科學教育月刊第 397 期[1]，陳建燁老師使用完全齊次對稱多項式證明了費氏數列等式 $\sum\limits_{i+j=n} F_i F_j = \dfrac{(n-1)F_{n+1} + (n+1)F_{n-1}}{5}$。對於這個數學式，我們發現可用生成函數來重新證明。此外，我們也得到費氏數列與盧卡斯數列的卷積表示式。

貳、費氏數列的生成函數

一個數列$\langle a_n \rangle$的生成函數是有著以下形式的冪級數 $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 。

設費氏數列$< F_n >$的生成函數為: $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ ，則我們有以下的定理：

定理 1([2][3]): 若 $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 為費氏數列的生成函數，則 $F(x) = \dfrac{x}{1-x-x^2}$ 。

在定理 1 中冪級數 $F(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} F_n x^n$ 的收斂區間為 $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \right)$，有興趣的讀者可在參考資料[2]找到關於它的證明。

利用定理 1，我們可以對生成函數進行四則運算與微分，得到下面的推論。

推論 1: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{i+j=n} F_i F_j x^n = \dfrac{x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ 。

證明:兩邊平方即得證。

推論 2: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_{n+1}x^n=\frac{x^2+1}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ 。

證明:

利用定理 1，

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^n=\frac{x}{1-x-x^2} \tag{1}$$

將(1)式等號兩邊微分，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_{n+1}x^n=\frac{x^2+1}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{2}$$

得證。

推論 3: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_nx^n=\frac{-x^2+2x}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ 。

證明:

將(1)式等號兩邊同乘 x，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}F_nx^{n+1}=\frac{x^2}{1-x-x^2} \tag{3}$$

將(3)式等號兩邊微分，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_nx^n=\frac{-x^2+2x}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{4}$$

得證。

推論 4: $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)F_{n+2}x^n=\frac{1+2x}{\left(1-x-x^2\right)^2}$ 。

證明:

將(1)式等號兩邊除以 x，得

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^{n-1} = \frac{1}{1-x-x^2} \tag{5}$$

將(5)式等號兩邊微分，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) F_{n+2} x^n = \frac{1+2x}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{6}$$

得證。

推論 5: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) F_{n+1} x^n = \frac{-x^2-2x+3}{\left(1-x-x^2\right)^2}$

證明:

將(1)式等號兩邊同乘 x^2，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^{n+2} = \frac{x^3}{1-x-x^2} \tag{7}$$

將(7)式微分後，得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) F_{n+1} x^{n+2} = \frac{-x^4-2x^3+3x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{8}$$

將(8)式等號兩邊同除以 x^2，

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) F_{n+1} x^n = \frac{-x^2-2x+3}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{9}$$

得證。

參、 $\sum_{i+j=n} F_i F_j = \frac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}$ 的證明

現在，我們用上一節推論 2,3,4,5 的生成函數來線性組合推論 1 的生成函數，即以下定理 2。

定理 2[1]: $\sum_{i+j=n} F_i F_j = \dfrac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}$ 。

證明:

利用 $(4)-(9)$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)F_n-(n+3)F_{n+1}\right]x^n=\frac{4x-3}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{10}$$

將 $(6)\times 2-(10)$ ，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[2(n+1)F_{n+2}-(n+1)F_n+(n+3)F_{n+1}\right]x^n=\frac{5}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{11}$$

將 $(2)-\dfrac{(11)}{5}$ ，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)F_{n+1}-\frac{2(n+1)F_{n+2}-(n+1)F_n+(n+3)F_{n+1}}{5}\right]x^n=\frac{1+x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{\left(1-x-x^2\right)^2}$$

$$=>\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{2nF_{n+1}-(n+1)F_n}{5}\right]x^n=\frac{x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2}$$

$$=>\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5}\right]x^n=\frac{x^2}{\left(1-x-x^2\right)^2} 。$$

由推論 1，

$$\sum_{i+j=n} F_i F_j=\frac{(n-1)F_{n+1}+(n+1)F_{n-1}}{5} ，$$

得證。

肆、盧卡斯數列的卷積

盧卡斯數列是一個與費氏數列有相同遞迴式的數列，它的定義為 $\langle L_n\rangle : L_n = L_{n-1}+L_{n-2}$, $n\ge 2$， $L_0=2$, $L_1=1$。它的生成函數為

$L(x)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n=\dfrac{2-x}{1-x-x^2}$，讀者可在參考資料[3]找到關於它的證明。

利用第 2 節的定理 1 與推論，我們很容易得到它與費氏數列的卷積與它自身的卷積，即下面的定理 3 與定理 4。

定理 3: $\sum_{i+j=n} F_i L_j=(n+1)F_n$。

證明:

利用定理 1，得

$$F(x)L(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} F_i L_{n-i} x^n=\frac{x(2-x)}{\left(1-x-x^2\right)^2},$$

由推論 3，得

$$\sum_{i+j=n} F_i L_j=(n+1)F_n,$$

得證。

定理 4: $\sum_{i+j=n} L_i L_j=(2n+4)F_{n+1}-(n+1)F_n$。

證明:

利用 $L(x)=\sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n=\dfrac{2-x}{1-x-x^2}$，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i+j=n} L_i L_j x^n=\frac{x^2-4x+4}{\left(1-x-x^2\right)^2} \tag{12}$$

另一方面，利用 $(2)-(10)$，得

$$\frac{x^2-4x+4}{\left(1-x-x^2\right)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+1)F_{n+1}+(n+3)F_{n+1}-(n+1)F_n\Big]x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(2n+4)F_{n+1}-(n+1)F_n\Big]x^n \tag{13}$$

比較(12)(13)式中 x^n 項係數，得

$$\sum_{i+j=n} L_i L_j = (2n+4)F_{n+1} - (n+1)F_n \text{，}$$

得證。

伍、結論

生成函數是組合數學中處理數列常用的工具，藉由它的四則運算、微分與積分，我們常可得到新的等式。讀者可發現費氏數列卷積的生成函數很容易求得，但要將費氏數列的生成函數做四則運算與微分運算後湊出卷積的生成函數卻不是一件容易的事。對於費氏數列生成函數的更多應用，有興趣的讀者可以參考資料[3]。

參考資料:

[1] 陳建燁。費氏數列下標整數分割乘積加總恆等式。科學教育月刊, 397, 20-24, 2017。

[2] 許閔揚。關於「$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{F_i}{10^i}=\frac{10}{89}$的探源與推廣」之迴響。數學傳播季刊,44(4), 38-44, 2020。

[3] T. Koshy, Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, 2001.