以矩陣運算求取「前 N 項連續正整數等冪次和」的多項式函數

李 輝 濱
嘉義市私立輔仁中學 退休教師

壹、前言

「前 n 項連續正整數等冪次和公式」就是伯努利多項式 (Bernoulli polynomial)，其多項式係數與伯努利數有密切相關性，想求取此一般表示式根本就是困難大事一樁。在參考文獻[1]中，李維昌老師以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解，其中 r 為正整數。以尋求遞迴關係式進而引用矩陣運算求得相關的伯努力數，再求得公式解。另外，文獻[2]李政豐老師則用到導函數、列簡化矩陣，把係數公式導出來。不懂伯努力數的同學或許也能看得懂，但其一般化推證內容確實也非常複雜，伯努利數不能以初等方式描述；它們與黎曼 zeta 函數完全正關聯，有很深邃的數論性質聯繫，所以不能預期有簡單一般化的計算公式。 也因此，不太容易被大眾、學生歸納理解。本篇文章末尾列出的相關文獻可作為對照參考。

根據經驗彙整的已知前 12 個多項式函數(文獻[5])，其真確詳盡內容如下述：

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \quad , \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \quad , \qquad \sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^7 = \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^8 = \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^9 = \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \quad ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^{9} - n^{7} + n^{5} - \frac{1}{2}n^{3} + \frac{5}{66}n \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{11} = \frac{1}{12}n^{12} + \frac{1}{2}n^{11} + \frac{11}{12}n^{10} - \frac{11}{8}n^{8} + \frac{11}{6}n^{6} - \frac{11}{8}n^{4} + \frac{5}{12}n^{2} \ ,$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^{12} = \frac{1}{13}n^{13} + \frac{1}{2}n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6}n^{9} + \frac{22}{7}n^{7} - \frac{33}{10}n^{5} + \frac{5}{3}n^{3} - \frac{691}{2730}n \ ,$$

可明顯觀察到這類前 n 項連續正整數等冪次和 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 的公式形式為 n 的 $m+1$ 次多項式函數且常數項為 0，即 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i n^i$ 。只需要找到每一個正確 a_i 值，就完成了公式形式的證明！本文比對 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n) = \sum_{i=1}^{m+1} a_i n^i$ 等式型態，即發現任一型 n^i 結構必可寫成 $n^i = \sum_{r=1}^{i} (-1)^{r+1} \cdot C_r^i \cdot (\sum_{k=1}^{n} k^{i-r})$ 的型式，例如：就 $\sum_{k=1}^{n} k^2 = f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ 言，可移項推求得 $n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$ ；現在特別將 n^i 代入另外 $\sum_{i=1}^{m+1} d_i n^i$ 型態中，即得 $\sum_{i=1}^{m+1} d_i n^i = \sum_{i=1}^{m+1} d_i \left[\sum_{r=1}^{i} (-1)^{r+1} \cdot C_r^i \cdot (\sum_{k=1}^{n} k^{i-r}) \right]$，並展開等號右式，再重新組合各項，排列成 $b_i \sum_{k=1}^{n} k^{i-1}$ 型（ $i = 1, 2, 3, \cdots, m+1$ ）的線性組合多項式，使成為 $\sum_{i=1}^{m+1} d_i n^i = \sum_{i=1}^{m+1} \left[b_i \sum_{k=1}^{n} k^{i-1} \right]$，並指定 $d_{m+1} = 1$ ， $b_m = b_{m-1} = b_{m-2} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = 0$，再以聯立方程式迭代法逐步計算出 b_{m+1} 與 d_m、d_{m-1}、d_{m-2}、$\cdots$、d_3、d_2、d_1 的各數值，此處主題特意將聯立方程式變換成用矩陣運算形式求出上述各數值，以得到

$$\sum_{i=1}^{m+1} d_i n^i = b_{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} k^{m} = \frac{1}{b_{m+1}} \cdot \sum_{i=1}^{m+1} d_i n^i$$

，從而推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{i=1}^{m+1} a_i n^i$ 的精確完整 n 的 $m+1$ 次多項式函數表示式。

當選取 m 值的確定數值，如 $m = 12$，即可依循上述操作說明法計算出 $\sum_{k=1}^{n} k^{12}$ 的 13 次

多項式函數公式，換言之；立刻可直接跳躍式地演算出任一個 m 的確定數值，而不需要預先知悉 $\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$ 、$\sum_{k=1}^{n} k^{m-2}$ 、$\sum_{k=1}^{n} k^{m-3}$ 、$\cdots$、$\sum_{k=1}^{n} k^{3}$ 、$\sum_{k=1}^{n} k^{2}$ 、$\sum_{k=1}^{n} k$ 等各式結果作為大規模運算量的前置鋪設基底。

以下正文特為秉持上述直覺觀點出發,並仔細敘述主題內涵演繹的完善新創理念思考、分析推演操作過程與適切的範例解說。

貳、本文

一、 在主文推演過程中需應用的數學相關性質-----引理，以承續推理內容；

引理： $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式且常數項為 0。

[證明]： 應用熟悉的數學歸納法來推導引證； 令 m, k, n, u 皆為正整數。

當 $m=1$ 時， $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$ 為 n 的 2 次多項式且常數項為 0，成立。

假設當 $m = u \geq 2$ 時，$\sum_{k=1}^{n} k^{u}$ 是關於 n 的 $u+1$ 次多項式成立且常數項為 0，則當 $m = u+1$ 時 ，由

$$n^{u+2} = [\, n^{u+2} - (n-1)^{u+2}\,] + [\,(n-1)^{u+2} - (n-2)^{u+2}\,] + [\,(n-2)^{u+2} - (n-3)^{u+2}\,] + \cdots + [\, k^{u+2} - (k-1)^{u+2}\,] + \cdots + (3^{u+2} - 2^{u+2}) + (2^{u+2} - 1^{u+2}) + (1^{u+2} - 0^{u+2})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [\, k^{u+2} - (k-1)^{u+2}\,]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{u+2} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^{u+2}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k^{u+2} - \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=0}^{u+2} (-1)^r C_r^{u+2} k^{u+2-r}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\, k^{u+2} - \sum_{r=0}^{u+2} (-1)^r C_r^{u+2} k^{u+2-r} \,\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{u+2} (-1)^{r+1} C_r^{u+2} k^{u+2-r}$$

$$= \sum_{r=1}^{u+2} (-1)^{r+1} C_r^{u+2} \sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}$$

$$= (u+2)\sum_{k=1}^{n} k^{u+1} - \sum_{r=2}^{u+2}(-1)^r C_r^{u+2}\sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r} \quad 。$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n} k^{u+1} = \frac{1}{u+2}\left[\ n^{u+2} + \sum_{r=2}^{u+2}(-1)^r C_r^{u+2}\sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}\ \right] \qquad \text{(L*)}$$

此 (L*)式中的 $\sum_{r=2}^{u+2}(-1)^r C_r^{u+2}\sum_{k=1}^{n} k^{u+2-r}$ 展開來可知 k 的最高冪次是 u 次，使得 $\sum_{k=1}^{n} k^{u}$ 是關於 n 的 $u+1$ 次多項式，另 k 的最低冪次是 0 次，而 $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$，所以組合起來 (L*)式關於 n 的次數是 $u+2$ 次，且常數項為 0。因此，得 $\sum_{k=1}^{n} k^{u+1}$ 是 n 的 $u+2$ 次多項式且常數項為 0 亦成立，由數學歸納法知；對所有正整數 m 與 n 言，$\sum_{k=1}^{n} k^{m} = f(n)$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式且常數項為 0 必然成立。

二、 主題的新穎思維、推演規範準則及其演繹操作運算過程

[A]. 首先求取 $n^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-r}\right)$ 恆等式類型表示式：

應用二項式展開式可運算出下列同類型的恆等式；

$$n^{m+1} - (n-1)^{m+1} = n^{m+1} - \sum_{r=0}^{m+1}(-1)^r C_r^{m+1}\cdot n^{m+1-r} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot n^{m+1-r}$$

$$(n-1)^{m+1} - (n-2)^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot (n-1)^{m+1-r}$$

$$(n-2)^{m+1} - (n-3)^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot (n-2)^{m+1-r}$$

$$\vdots$$

$$3^{m+1} - 2^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot 3^{m+1-r}$$

$$2^{m+1} - 1^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot 2^{m+1-r}$$

$$1^{m+1} - 0^{m+1} = \sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot 1^{m+1-r}$$

將上述同類型的 n 個恆等式其等號左右兩側運算式分別作左側相加，右側相加，

化簡整理後可得 $$n^{m+1}=\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m+1-r}) \qquad (3.1)$$

同理，仿效上述操作過程可得； $$n^{m}=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m-r}) \qquad (3.2)$$

$$n^{m-1}=\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m-1}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m-1-r}) \qquad (3.3)$$

$$\vdots$$

$$n^{m+2-i}=\sum_{r=1}^{m+2-i}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+2-i}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m+2-i-r}) \qquad (3.i)$$

$$\vdots$$

$$n^{4}=\sum_{r=1}^{4}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{4}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{4-r}) \qquad (3.4)$$

$$n^{3}=\sum_{r=1}^{3}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{3}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{3-r})=3\sum_{k=1}^{n}k^{2}-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1 \qquad (3.5)$$

$$n^{2}=\sum_{r=1}^{2}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{2}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{2-r})=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1 \qquad (3.6)$$

$$n=C_1^1\cdot\sum_{k=1}^{n}1 \qquad (3.7)$$

此處 $i=1, 2, 3, \cdots, m+1$,

[B]. 將上述全部的 (3.*)式恆等式代入 $\sum_{i=1}^{m+1}d_{m+2-i}\cdot n^{m+2-i}$ 等表示式中，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m+1}d_{m+2-i}\cdot n^{m+2-i} &= d_{m+1}\cdot[\sum_{r=1}^{m+1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+1}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m+1-r})]\\
&+d_{m}\cdot[\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m-r})]+d_{m-1}\cdot[\sum_{r=1}^{m-1}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m-1}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m-1-r})]\\
&+\cdots+d_{m+2-i}\cdot\sum_{r=1}^{m+2-i}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+2-i}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{m+2-i-r})+\cdots\\
&+d_4\cdot[\sum_{r=1}^{4}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{4}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{4-r})]+d_3\cdot[\sum_{r=1}^{3}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{3}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{3-r})]\\
&+d_2\cdot[\sum_{r=1}^{2}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{2}\cdot(\sum_{k=1}^{n}k^{2-r})]+d_1\cdot[C_1^1\cdot\sum_{k=1}^{n}1] \qquad (4)\end{aligned}$$

[C]. 現在，將(4)式各項展開來，再把含有同一類成份的 $\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ 所有項結合相加起來以形成 $b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ 項，則(4)式變換成下列形式：

$$\sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i} = d_{m+1} \cdot C_1^{m+1} \cdot \sum k^m + (-d_{m+1} \cdot C_2^{m+1} + d_m \cdot C_1^m) \cdot \sum k^{m-1}$$
$$+ (d_{m+1} \cdot C_3^{m+1} - d_m \cdot C_2^m + d_{m-1} \cdot C_1^{m-1}) \cdot \sum k^{m-2} + (-d_{m+1} \cdot C_4^{m+1} + d_m \cdot C_3^m -$$
$$d_{m-1} \cdot C_2^{m-1} + d_{m-2} \cdot C_1^{m-2}) \cdot \sum k^{m-3} + (d_{m+1} \cdot C_5^{m+1} - d_m \cdot C_4^m + d_{m-1} \cdot C_3^{m-1} - d_{m-2} \cdot C_2^{m-2}$$
$$+ d_{m-3} \cdot C_1^{m-3}) \cdot \sum k^{m-4} + \cdots + [d_{m+1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot C_i^{m+1} + d_m \cdot (-1)^i \cdot C_{i-1}^m$$
$$+ d_{m-1} \cdot (-1)^{i-1} \cdot C_{i-2}^{m-1} + \cdots + d_{m+4-i} \cdot C_3^{m+4-i} - d_{m+3-i} \cdot C_2^{m+3-i} + d_{m+2-i} \cdot C_1^{m+2-i}]$$
$$\cdot \sum k^{m+1-i} + \cdots + [d_{m+1} \cdot (-1)^m \cdot C_{m-1}^{m+1} + d_m \cdot (-1)^{m-1} \cdot C_{m-2}^m + d_{m-1} \cdot (-1)^{m-2} \cdot C_{m-3}^{m-1} +$$
$$\cdots + d_5 \cdot C_3^5 - d_4 \cdot C_2^4 + d_3 \cdot C_1^3] \cdot \sum k^2 + [d_{m+1} \cdot (-1)^{m+1} \cdot C_m^{m+1} + d_m \cdot (-1)^m \cdot C_{m-1}^m$$
$$+ d_{m-1} \cdot (-1)^{m-1} \cdot C_{m-2}^{m-1} + \cdots + d_4 \cdot C_3^4 - d_3 \cdot C_2^3 + d_2 \cdot C_1^2] \cdot \sum k + [d_{m+1} \cdot (-1)^{m+2} \cdot C_{m+1}^{m+1}$$
$$+ d_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot C_m^m + d_{m-1} \cdot (-1)^m \cdot C_{m-1}^{m-1} + \cdots + d_5 \cdot C_5^5 - d_4 \cdot C_4^4 + d_3 \cdot C_3^3 - d_2 \cdot C_2^2$$
$$+ d_1 \cdot C_1^1] \cdot \sum 1$$

$$= \sum_{i=1}^{m+1} \{ [\sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j} \cdot (-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j}] \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i} \} \tag{5}$$

對照比較(4)式與(5)式的 2 組相互關連等式，結合起來可得下列關係式；

$$\sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i} = \sum_{i=1}^{m+1} [b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}] \tag{6}$$

而(6)式的 $b_{m+2-i} = d_{m+1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot C_i^{m+1} + d_m \cdot (-1)^i \cdot C_{i-1}^m + d_{m-1} \cdot (-1)^{i-1} \cdot C_{i-2}^{m-1} + \cdots$

$$+ d_{m+4-i} \cdot C_3^{m+4-i} - d_{m+3-i} \cdot C_2^{m+3-i} + d_{m+2-i} \cdot C_1^{m+2-i} = \sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j} \cdot (-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j} \tag{7}$$

此處 (7)式的 $i = 1, 2, 3, \cdots, m+1$ ，$d_{m+1+v} = 0$ ，(v = 1,2, 3, ⋯)，且所有含有組合記號數型如 C_0^J 或 C_{-u}^J 的項皆不存在。如此對 b_{m+2-i} 數值逐一敘述編排，羅列完成後就可得到一組含有 $m+1$ 列等式的聯立方程式。

例如：$i = 15$ 含有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m-14}$ 成份者為

$$[\, d_{m+1} \cdot C_{15}^{m+1} - d_m \cdot C_{14}^{m} + d_{m-1} \cdot C_{13}^{m-1} + \cdots + d_{m-11} \cdot C_{3}^{m-11} - d_{m-12} \cdot C_{2}^{m-12} + d_{m-13} \cdot C_{1}^{m-13} \,]$$

$$\cdot \sum k^{m-14} = b_{m-13} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m-14} \quad 。$$

因此， $b_{m-13} = [\, d_{m+1} \cdot C_{15}^{m+1} - d_m \cdot C_{14}^{m} + d_{m-1} \cdot C_{13}^{m-1} + \cdots + d_{m-11} \cdot C_{3}^{m-11} - d_{m-12} \cdot C_{2}^{m-12} + d_{m-13} \cdot C_{1}^{m-13} \,]$，其內總共含有 15 項。

[D]. 以 b_{m+2-i} 建立的一組聯立方程式

在[C].節內由 b_{m+2-i} 建立的一組 $m+1$ 列等式的聯立方程式，其內涵詳述於下；

$$d_{m+1} \cdot C_1^{m+1} = b_{m+1} \qquad (i=1)$$

$$-d_{m+1} \cdot C_2^{m+1} + d_m \cdot C_1^{m} = b_m \qquad (i=2)$$

$$d_{m+1} \cdot C_3^{m+1} - d_m \cdot C_2^{m} + d_{m-1} \cdot C_1^{m-1} = b_{m-1} \qquad (i=3)$$

$$-d_{m+1} \cdot C_4^{m+1} + d_m \cdot C_3^{m} - d_{m-1} \cdot C_2^{m-1} + d_{m-2} \cdot C_1^{m-2} = b_{m-2}$$

$$d_{m+1} \cdot C_5^{m+1} - d_m \cdot C_4^{m} + d_{m-1} \cdot C_3^{m-1} - d_{m-2} \cdot C_2^{m-2} + d_{m-3} \cdot C_1^{m-3} = b_{m-3}$$

$$\vdots$$

$$d_{m+1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot C_i^{m+1} + d_m \cdot (-1)^{i} \cdot C_{i-1}^{m} + d_{m-1} \cdot (-1)^{i-1} \cdot C_{i-2}^{m-1} + \cdots + d_{m+4-i} \cdot C_3^{m+4-i}$$

$$- d_{m+3-i} \cdot C_2^{m+3-i} + d_{m+2-i} \cdot C_1^{m+2-i} = \sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j} \cdot (-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j} = b_{m+2-i}$$

$$\vdots$$

$$d_{m+1} \cdot (-1)^{m} \cdot C_{m-1}^{m+1} + d_m \cdot (-1)^{m-1} \cdot C_{m-2}^{m} + d_{m-1} \cdot (-1)^{m-2} \cdot C_{m-3}^{m-1} + \cdots + d_5 \cdot C_3^5$$

$$- d_4 \cdot C_2^4 + d_3 \cdot C_1^3 = b_3$$

$$d_{m+1} \cdot (-1)^{m+1} \cdot C_{m}^{m+1} + d_m \cdot (-1)^{m} \cdot C_{m-1}^{m} + d_{m-1} \cdot (-1)^{m-1} \cdot C_{m-2}^{m-1} + \cdots + d_4 \cdot C_3^4$$

$$- d_3 \cdot C_2^3 + d_2 \cdot C_1^2 = b_2$$

$$d_{m+1} \cdot (-1)^{m+2} \cdot C_{m+1}^{m+1} + d_m \cdot (-1)^{m+1} \cdot C_{m}^{m} + d_{m-1} \cdot (-1)^{m} \cdot C_{m-1}^{m-1} + \cdots + d_5 \cdot C_5^5$$

$$- d_4 \cdot C_4^4 + d_3 \cdot C_3^3 - d_2 \cdot C_2^2 + d_1 \cdot C_1^1 = b_1$$

[E]. 解上述這組含有 $m+1$ 列等式的聯立方程式其所需必備的運算準則

比對檢視(5)式與(6)式的 $\sum_{i=1}^{m+1} \left\{ [\sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j} \cdot (-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j}] \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i} \right\}$

$= \sum_{i=1}^{m+1}$ [$b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$]等式，可確定歸納出其等號右側的所有 $m+1$ 項 $b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ 中僅需保留第 1 個 $b_{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m}$ 這一項，其餘的 m 項都要消失歸零，此因本次主題的標的物就是只有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m}$，而不需要再有 $\sum_{k=1}^{n} k^{m-1}$、$\sum_{k=1}^{n} k^{m-2}$、$\sum_{k=1}^{n} k^{m-3}$ 、…、$\sum_{k=1}^{n} k^{2}$ 、$\sum_{k=1}^{n} k$ 等多餘的項。因此，為了滿足 $\sum_{i=1}^{m+1}$ { [$\sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j} \cdot (-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j}$] $\cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ } $= \sum_{i=1}^{m+1}$ [$b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$]等式成立，要先指定選取 $b_m = b_{m-1} = b_{m-2} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = 0$，而針對整組聯立方程式運算言，欲使計算過程更簡化順暢，則需再選取第 1 列等式 $d_{m+1} \cdot C_1^{m+1} = b_{m+1}$ 的 $d_{m+1} = 1$，接著即可一貫脈絡的順勢逐步推算出 b_{m+1}與 d_m、d_{m-1}、d_{m-2}、…、d_3、d_2、d_1的各數值，因而得到等式 $\sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i} = b_{m+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m}$ ，進一步得到 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \frac{1}{b_{m+1}} \cdot \sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i}$ ，從而應用這群已求的數值推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^{m} = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i}$ 的精確完整多項式函數表示式。

所以，欲解[D].節內含有 $m+1$ 列等式的聯立方程組所需具備的運算準則為：

※　先指定選取 $b_m = b_{m-1} = b_{m-2} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = 0$ 且 $d_{m+1} = 1$　※

因此，代入聯立方程式運算得 $b_{m+1} = C_1^{m+1} = m+1$ ，$d_m = C_2^{m+1} / C_1^{m} = (m+1)/2$ ，$d_{m-1} = -[\, C_3^{m+1} - C_2^{m} \cdot (m+1)/2 \,] / (m-1) = (m+1)\, m/12$，
$d_{m-2} = \{ C_4^{m+1} - [\, C_3^{m} \cdot (m+1)/2] - C_2^{m-1} \cdot [\, C_3^{m+1} - C_2^{m} \cdot (m+1)/2 \,] / (m-1) \} / (m-2)$ ，
… …，持續運算到 d_3、d_2、d_1等，可全面完整的計算出所有個別 d 各數值。

[F]. 在[E].節有關連到迭代遞迴運算，眼見有點繁複，若變換成具體的矩陣式運算就可清晰精簡地排列出 b_{m+1}與 d_m、d_{m-1}、d_{m-2}、…、d_3、d_2、d_1的各數值。所以，引進※運算準則並將[D].節內的聯立式鋪排成矩陣運算式如下：

$$
\begin{bmatrix}
C_1^{m+1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-C_2^{m+1} & C_1^m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
C_3^{m+1} & -C_2^m & C_1^{m-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
-C_4^{m+1} & C_3^m & -C_2^{m-1} & C_1^{m-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots \\
(-1)^m C_{m-1}^{m+1} & \cdots & -C_4^6 & C_3^5 & -C_2^4 & C_1^3 & 0 & 0 \\
(-1)^{m+1} C_m^{m+1} & \cdots & \cdots & -C_4^5 & C_3^4 & -C_2^3 & C_1^2 & 0 \\
(-1)^{m+2} C_{m+1}^{m+1} & \cdots & \cdots & C_5^5 & -C_4^4 & C_3^3 & -C_2^2 & C_1^1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ d_m \\ d_{m-1} \\ d_{m-2} \\ \vdots \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_{m+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

檢視表列的 $m+1$ 階方陣式中見到幾個特徵；(#1.) 第 1 行由上到下各位置依序排列出 C_1^{m+1}、$-C_2^{m+1}$、C_3^{m+1}、$-C_4^{m+1}$、$\cdots$ 等各數值。第 2 行由上到下各位置依序排列出 0、C_1^m、$-C_2^m$、C_3^m、$-C_4^m$、$\cdots$ 等各數值。第 3 行由上到下各位置依序排列出 0、0、C_1^{m-1}、$-C_2^{m-1}$、C_3^{m-1}、$-C_4^{m-1}$、$\cdots$ 等各數值。$\cdots$。第 $m+1$ 行由上到下各位置依序排列出 0、0、0、$\cdots$、0、C_1^1 等各數值。(#2.) 各列或各行的正負符號都是交錯出現的規律性！(#3.) b_i 的單行矩陣只有第 1 數 b_{m+1} 不為 0，其餘都為 0 數。(#4.) 此 $m+1$ 階方陣運算式中非 0 數值位置處的各數其也出現數字分佈的規律性；即自右下角起在最末位置處先填上 $1=C_1^1$，緊接著向左逐行排列出 2、1，3、3、1，4、6、4、1，5、10、10、5、1，$\cdots$ 等顯現出巴斯卡三角形數，很容易列出所有數值，然後再交錯式的填上正負符號，而迅速完成方陣列表。這樣一目了然又亮麗的矩陣運算式型態確實比聯立方程式結構來得更簡要，計算起來也更貼切、快捷、順利！最後再推算出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 為 n 的 $m+1$ 次多項式函數。

矩陣運算的用途就是用來連結各未知數 b_i 與 d_i 及 $(-1)^{i+2-j} \cdot C_{i+1-j}^{m+2-j}$ 之間的正確整合關係式，使 $m+1$ 列等式的聯立方程組被集合成整齊、精簡的運算式。當指定 m 值時，透過矩陣運算式的標準形式即能立刻寫出對應的矩陣運算式列表，進而逐一計算出各 d_i 數值，從而推演出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的各係數 a_{m+2-i} 完整正確數值。所以，這矩陣運算式就是能滿足計算出各 d_i 數值的生成矩陣運算式！

[G]. 範例演示

[範例 1.] $m = 10$ ， $\sum_{i=1}^{11} d_{12-i} \cdot n^{12-i} = \sum_{i=1}^{11} [\ b_{12-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{11-i}\ ] = b_{11} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{10}$

操作演算仿效[F].節內容型態編製出 $m=10$ 的矩陣運算式列表如下；

$$\begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -55 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 165 & -45 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -330 & 120 & -36 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 462 & -210 & 84 & -28 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -462 & 252 & -126 & 56 & -21 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 330 & -210 & 126 & -70 & 35 & -15 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -165 & 120 & -84 & 56 & -35 & 20 & -10 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 55 & -45 & 36 & -28 & 21 & -15 & 10 & -6 & 3 & 0 & 0 \\ -11 & 10 & -9 & 8 & -7 & 6 & -5 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ d_{10} \\ d_9 \\ d_8 \\ d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

解出 b_{11}與d_{10}、d_9、d_8、…、d_3、d_2、d_1的各數值。流程如下； $d_{11}=1$ ，$b_{11}=11$ ，$-55+10\,d_{10}=0 \Rightarrow d_{10}=11/2$ ，$165-45\,d_{10}+9\,d_9=0 \Rightarrow d_9=55/6$ ，$-330+120\,d_{10}-36\,d_9+8\,d_8=0 \Rightarrow d_8=0$ ，$462-210\,d_{10}+84\,d_9-28\,d_8+7\,d_7=0 \Rightarrow d_7=-11$， $-462+252\,d_{10}-126\,d_9+56\,d_8-21\,d_7+6\,d_6=0 \Rightarrow d_6=0$ ，$330-210\,d_{10}+126\,d_9-70\,d_8+35\,d_7-15\,d_6+5\,d_5=0 \Rightarrow d_5=11$ ，$-165+120\,d_{10}-84\,d_9+56\,d_8-35\,d_7+20\,d_6-10\,d_5+4\,d_4=0 \Rightarrow d_4=0$ ，$55-45\,d_{10}+36\,d_9-28\,d_8+21\,d_7-15\,d_6+10\,d_5-6\,d_4+3\,d_3=0 \Rightarrow d_3=-11/2$ ，$-11+10\,d_{10}-9\,d_9+8\,d_8-7\,d_7+6\,d_6-5\,d_5+4\,d_4-3\,d_3+2\,d_2=0 \Rightarrow d_2=0$ ，$1-d_{10}+d_9-d_8+d_7-d_6+d_5-d_4+d_3-d_2+d_1=0 \Rightarrow d_1=5/6$ ，
求出了上述所需的正確各數值，$d_{11}=1$ 與 $b_{11}=11$ ，$d_{10}=11/2$ ，$d_9=55/6$ ，$d_8=0$ ，$d_7=-11$，$d_6=0$ ，$d_5=11$ ，$d_4=0$ ，$d_3=-11/2$ ，$d_2=0$ ，$d_1=5/6$，再代入等式 $\sum_{i=1}^{11} d_{12-i}\cdot n^{12-i}=b_{11}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{10}$ 中，使

$$\sum_{k=1}^{n} k^{10}=\frac{1}{b_{11}}\sum_{i=1}^{11} d_{12-i}\cdot n^{12-i} \quad ,$$

以得出清晰分明、簡潔細緻，各項奇妙規律分佈的下列運算式；

$$n^{11}+\frac{11}{2}n^{10}+\frac{55}{6}n^9-11n^7+11n^5-\frac{11}{2}n^3+\frac{5}{6}n=11\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{10} \Rightarrow \text{再整理} \Rightarrow$$

$\sum_{k=1}^{n} k^{10} = f(n) = \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^{9} - n^{7} + n^{5} - \frac{1}{2}n^{3} + \frac{5}{66}n$，此刻已經獲得 a_i 各數值如下；$a_{11} = \frac{1}{11}$，$a_{10} = \frac{1}{2}$，$a_9 = \frac{5}{6}$，$a_8 = 0$，$a_7 = -1$，$a_6 = 0$，$a_5 = 1$，$a_4 = 0$，$a_3 = -\frac{1}{2}$，$a_2 = 0$，$a_1 = \frac{5}{66}$，計算完成且又如所預期精準得到 $\sum_{k=1}^{n} k^{10} = f(n) = \sum_{i=1}^{11} a_{12-i} \cdot n^{12-i}$ 為 n 的 11 次多項式函數且常數項為 0。

[範例 2.] $m = 13$，$\sum_{i=1}^{14} d_{15-i} \cdot n^{15-i} = \sum_{i=1}^{14} \left[b_{15-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{14-i} \right] = b_{14} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{13}$

操作演算仿效[F].節內容型態編製出 $m = 13$ 的矩陣運算式列表如下；

$$
\begin{bmatrix}
14 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-91 & 13 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
364 & -78 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1001 & 286 & -66 & 11 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2002 & -715 & 220 & -55 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3003 & 1287 & -495 & 165 & -45 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3432 & -1716 & 792 & -330 & 120 & -36 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-3003 & 1716 & -924 & 462 & -210 & 84 & -28 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2002 & -1287 & 792 & -462 & 252 & -126 & 56 & -21 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1001 & 715 & -495 & 330 & -210 & 126 & -70 & 35 & -15 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
364 & -286 & 220 & -165 & 120 & -84 & 56 & -35 & 20 & -10 & 4 & 0 & 0 & 0 \\
-91 & 78 & -66 & 55 & -45 & 36 & -28 & 21 & -15 & 10 & -6 & 3 & 0 & 0 \\
14 & -13 & 12 & -11 & 10 & -9 & 8 & -7 & 6 & -5 & 4 & -3 & 2 & 0 \\
-1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 \\ d_{13} \\ d_{12} \\ d_{11} \\ d_{10} \\ d_9 \\ d_8 \\ d_7 \\ d_6 \\ d_5 \\ d_4 \\ d_3 \\ d_2 \\ d_1 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} b_{14} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

解出 b_{14}、d_{13}、d_{12}、d_{11}、⋯、d_3、d_2、d_1 的各數值。流程如下；$d_{14} = 1$，$b_{14} = 14$，$-91+13\,d_{13} = 0 \Rightarrow d_{13} = 7$，$364-78\,d_{13}+12\,d_{12} = 0 \Rightarrow d_{12} = 91/6$，$-1001+286\cdot 7-66\cdot(91/6)+11\,d_{11} = 0 \Rightarrow d_{11} = 0$，$2002-715\cdot 7+220\cdot(91/6)+10\,d_{10} = 0 \Rightarrow d_{10} = -1001/30$，$-3003+1287\cdot 7-495\cdot(91/6)-45\cdot(-1001/30)+9\,d_9 = 0 \Rightarrow d_9 = 0$，$3432-1716\,d_{13}+792\,d_{12}+120\,d_{10}+8\,d_8 = 0 \Rightarrow d_8 = 143/2$，$-3003+1710\,d_{13}-924\,d_{12}-210\,d_{10}-28\,d_8+7\,d_7 = 0 \Rightarrow d_7 = 0$，$2002-1287\,d_{13}+792\,d_{12}+252\,d_{10}+56\,d_8+6\,d_6 = 0 \Rightarrow d_6 = -1001/10$，

$-1001+715\,d_{13}-495\,d_{12}-210\,d_{10}-70\,d_8-15\,d_6+5\,d_5=0 \quad\Rightarrow\quad d_5=0$ ，
$364-286\,d_{13}+220\,d_{12}+120\,d_{10}+56\,d_8+20\,d_6+4\,d_4=0 \quad\Rightarrow\quad d_4=455/6$ ，
$-91+78\,d_{13}-66\,d_{12}-45\,d_{10}-28\,d_8-15\,d_6-6\,d_4+3\,d_3=0 \quad\Rightarrow\quad d_3=0$ ，
$14-13\,d_{13}+12\,d_{12}+10\,d_{10}+8\,d_8+6\,d_6+4\,d_4+2\,d_2=0 \quad\Rightarrow\quad d_2=-691/30$ ，
$-1+d_{13}-d_{12}-d_{10}-d_8-d_6-d_4-d_2+d_1=0 \quad\Rightarrow\quad d_1=0$ ，

求出了上述所需的正確各數值，分別為 $d_{14}=1$ ，$b_{14}=14$ 與 $d_{13}=7$ ，$d_{12}=91/6$ ，$d_{11}=0$ ，$d_{10}=-1001/30$，$d_9=0$ ，$d_8=143/2$ ，$d_7=0$ ，$d_6=-1001/10$ ，$d_5=0$ ，$d_4=455/6$ ，$d_3=0$ ，$d_2=-691/30$ ，$d_1=0$ ，再代入等式 $\sum_{i=1}^{14} d_{15-i}\cdot n^{15-i} = b_{14}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{13}$ 中，使得 $\sum_{k=1}^{n} k^{13} = \frac{1}{b_{14}}\sum_{i=1}^{14} d_{15-i}\cdot n^{15-i}$ ，得明確簡潔下述運算式；

$$n^{14}+7\,n^{13}+\frac{91}{6}n^{12}-\frac{1001}{30}n^{10}+\frac{143}{2}n^{8}-\frac{1001}{10}n^{6}+\frac{455}{6}n^{4}-\frac{691}{30}n^{2}=14\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{13}$$

$$\Rightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} k^{13}=\frac{1}{14}n^{14}+\frac{1}{2}n^{13}+\frac{13}{12}n^{12}-\frac{143}{60}n^{10}+\frac{143}{28}n^{8}-\frac{143}{20}n^{6}+\frac{65}{12}n^{4}-\frac{691}{420}n^{2}$$

，至此已經獲得 a_i 各數值如下；$a_{14}=\frac{1}{14}$ ，$a_{13}=\frac{1}{2}$ ，$a_{12}=\frac{13}{12}$ ，$a_{11}=0$ ，$a_{10}=-\frac{143}{60}$ ，$a_9=0$ ，$a_8=\frac{143}{28}$ ，$a_7=0$ ，$a_6=-\frac{143}{20}$ ，$a_5=0$ ，$a_4=\frac{65}{12}$ ，$a_3=0$ ，$a_2=-\frac{691}{420}$ ，$a_1=0$ ，計算完成且又嚴謹、精準得到上述 $\sum_{k=1}^{n} k^{13}=\sum_{i=1}^{14} a_{15-i}\cdot n^{15-i}$ 為 n 的 14 次多項式函數且常數項為 0。

參、結論

(I). 主題演繹內容的流程是先推算出 $n^{m+2-i}=\sum_{r=1}^{m+2-i}(-1)^{r+1}\cdot C_r^{m+2-i}\cdot(\sum_{k=1}^{n} k^{m+2-i-r})$ 各恆等式，再代入 $\sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i}\cdot n^{m+2-i}$ 表示式中，將其各項展開來。其次，再把含有同一類成份的 $\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ 所有項結合相加起來以形成 $b_{m+2-i}\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}$ 項，而變換成下列新創形式：

$$\sum_{i=1}^{m+1}\left\{\left[\sum_{j=1}^{i} d_{m+2-j}\cdot(-1)^{i+2-j}\cdot C_{i+1-j}^{m+2-j}\right]\cdot\sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i}\right\}=\sum_{i=1}^{m+1} d_{m+2-i}\cdot n^{m+2-i}$$

$= \sum_{i=1}^{m+1} \left[\, b_{m+2-i} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^{m+1-i} \,\right]$ 。接著，採用操作的運算準則為：

※　先指定選取 $b_m = b_{m-1} = b_{m-2} = \cdots = b_3 = b_2 = b_1 = 0$ 且 $d_{m+1} = 1$ ※

並搭配具體的矩陣式運算，就可清晰精簡地計算出 b_{m+1} 與 d_m、d_{m-1}、d_{m-2}、⋯、d_3、d_2、d_1 的各數值。最終即能完成如[範例 1.、2.]節的 $m+1$ 次數多項式公式。

(II). $\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{i=1}^{m+1} a_{m+2-i} \cdot n^{m+2-i}$ 多項式公式中的各項係數都具有下列規律性：

i. 首項係數 a_{m+1} 必等於 $\dfrac{1}{m+1}$，數值隨 m 值變動。是個正值。

ii. 第 2 項係數 $a_m = \dfrac{1}{2}$，是個固定值，不隨 m 值變動。是個正值。

iii. 第 3 項係數 $a_{m-1} = \dfrac{m}{12}$，數值隨 m 值變動。是個正值。

iv. 第 4、6、8、10、12、⋯項等係數 $a_{m-2s} = 0$，即當 m 值是偶數時，
$a_{m-2} = a_{m-4} = a_{m-6} = \cdots = a_6 = a_4 = a_2 = a_0 = 0$；當 m 值是奇數時，
$a_{m-2} = a_{m-4} = a_{m-6} = \cdots = a_5 = a_3 = a_1 = a_0 = 0$，0 與非 0 係數值的出現是按著
$a_{m-2} = 0$，a_{m-3}，0，a_{m-5}，0，a_{m-7}，0，a_{m-9}，0，⋯ 次序連續交替排列出相互間隔位置的特性呈現。

v. 不為 0 的係數自第 5 項 a_{m-3} 開始，a_{m-5}、a_{m-7}、a_{m-9}、⋯ 依次出現 $-+-+-+\cdots$ 的負號、正號等連續交錯符號。以上也都是相關伯努利數的特徵。

vi. 自第 5 項起與之後非 0 的係數值其與 m 值的關係漸趨複雜，因此，不易寫出 $\sum_{k=1}^{n} k^m$ 的一般化公式。

(III). 應用矩陣運算式求取 $\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{i=1}^{m+1} a_i n^i$ 的多項式函數，直覺又簡潔，容易領會、計算，又實際，且可求得 m 的任何確定值所形成的公式。只要完整正確鋪排出 $m+1$ 階方陣，美妙的是這類 $m+1$ 階方陣內各位置元素數值的分佈也呈現巴斯卡三角形數的規律。本文為作者自我發想的研析作品，願與大眾分享。

參考資料:

李維昌，以遞迴關係式求 $\sum_{k=1}^{n} k^r$ 的公式解， 數學傳播 44 卷 1 期，p.94-96，2020 年 3 月。
李政豐，連續整數冪次和公式的另類思考，數學傳播 26 卷 2 期，p.73-82，2002 年 6 月。
余文卿，級數求和法，數學傳播 15 卷 4 期，p.73-78， 1991 年 12 月。
余文卿，一些發散級數的求和法，數學傳播 22 卷 4 期，p.43-49， 1998 年 12 月。
鍾承道，Bernoulli 多項式與連續冪次和探討， 數學傳播 35 卷 2 期，p.23-31，2011 年 6 月。
吳松霖、李國寧、胡豐榮、許天維，連續整數冪次和公式之指數生成函數探討，數學傳播 31 卷 3 期，p.13-16，2007 年 9 月。
E. W. Weisstein (2016), *"Bernoulli Number",* MathWorld, Wolfram, retrieved 2 July 2017.