從一道向量幾何題的另解談起(上)

連 威 翔

山城人力資源管理顧問有公司派遣人員(投稿期間派遣至苗栗縣政府環境保護局)

壹、前言

在 108 學年度學科能力測驗(底下簡稱 108 學測)數學試題[1]當中，第貳部分的選填題 G 是其中最後一道試題，問題的敘述如下：

選填題 G：如圖（此為示意圖），A,B,C,D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan\angle BAD=$ ________。

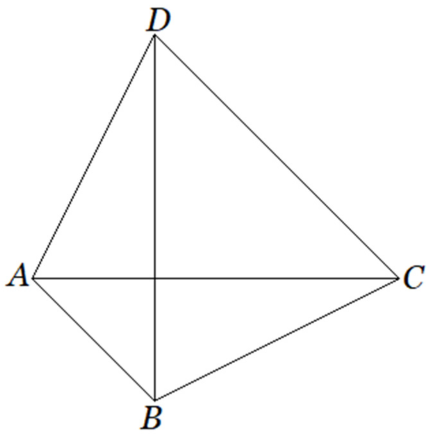

圖 1

若上網搜尋「108 年學測數學選填題 G」這段關鍵字，可找到許多不同的解法。其中有些老師在解題前，將上述問題評為困難的問題，顯示出它相當具有挑戰性。而在[2]的試題解析中，鳳山高中的張簡瑞璨老師提出一個簡鍊的解法，值得我們學習。

筆者發現上述問題後，起初透過一個全程使用向量的方法得到解答，其解題過程比[2]中的解法複雜不少。不過，後來發現在同樣的假設下，只要稍微改變一下探討的方向，即可改以平面幾何求解。此外也發現，只要適當運用複數的工具，則同樣也能解出上述問題。

在底下第二節中，筆者將介紹使用平面向量與平面幾何的解法。接著的第三節中，則將仔細探討上述問題的條件如何決定圖 1 中四邊形 $ABCD$ 的形狀。而第四節的內容，則會介紹如何使用複數來求解上述問題。

貳、從假設向量 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 出發的解法

找出第一個解法：

首先，介紹自己最初的解法如下：

解法 1：在圖 1 中，可看出 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ 不為零向量。假設

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{v_1},\qquad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v_2},$$

因此 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 不為零向量，且可依題意可先寫下

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}. \tag{1}$$

此時可參考下圖。

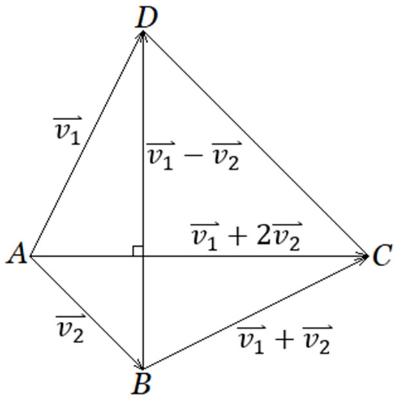

圖 2

上圖中，我們使用向量分解法寫出

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}, \tag{2}$$

並配合(1)式寫出

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}. \tag{3}$$

因為 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長，故其長度的平方也相等，由(2), (3)兩式可知

$$|\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}|^2=|\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}|^2. \tag{4}$$

依據內積的定義，我們知道任意向量 $\vec{v}$ 滿足

$$\vec{v}\cdot\vec{v}=|\vec{v}||\vec{v}|\cos 0=|\vec{v}|^2. \tag{5}$$

因此(4)式可改寫為

$$(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2})\cdot(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2})=(\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2})\cdot(\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}). \tag{6}$$

展開上式、整理並化簡後得

$$2\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2}=0,$$

再配合(5)式的性質，將上式改寫為

$$2\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}+|\overrightarrow{v_2}|^2=0. \tag{7}$$

因為 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 兩向量互相垂直，故兩者的內積為零，由(2),(3)兩式可知

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2})\cdot(\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2})=0. \tag{8}$$

仿照我們將(6)式化簡為(7)式的過程，上式可化簡為

$$|\overrightarrow{v_1}|^2+\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}-2|\overrightarrow{v_2}|^2=0. \tag{9}$$

計算$(9)\times 2-(7)$，整理後得

$$|\overrightarrow{v_1}|^2=\frac{5}{2}|\overrightarrow{v_2}|^2, \tag{10}$$

這表示

$$|\overrightarrow{v_1}|=\frac{\sqrt{10}}{2}|\overrightarrow{v_2}|. \tag{11}$$

將(10)式代入(9)式，整理後得

$$\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}=-\frac{1}{2}|\overrightarrow{v_2}|^2. \tag{12}$$

令圖 2 中 $\angle BAD=\theta$，因此 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 之夾角為 θ。使用內積定義，配合(11),(12)兩式可知

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}||\overrightarrow{v_2}|}=\frac{-\frac{1}{2}|\overrightarrow{v_2}|^2}{\frac{\sqrt{10}}{2}|\overrightarrow{v_2}|^2}=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

因此 $90°<\theta<180°$，故 $\tan\theta<0$，且可推得

$$\tan\angle BAD=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3. \tag{13}$$

解題完畢。

雖然說，與張簡老師在[2]中的解法相比，上述解法顯得較為冗長，但它應不失為一種中規中矩的解法。在[2]中的解法，一開始就使用 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 互相垂直且等長的條件假設 $\overrightarrow{AC}=(1,0)$, $\overrightarrow{BD}=(0,1)$，此舉可謂一錘定音。接著假設 $\overrightarrow{AB}=(a,b)$，透過題目的條件得出關鍵的向量等式並比較等號兩側的兩分量後，即解得 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$。接著寫出 $\overrightarrow{AD}=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$，使用內積計算 $\cos\angle BAD$ 值之後，即可求得 $\tan\angle BAD$ 之值。一言以蔽之，張簡老師的解法就是以上述 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 的假設搭配 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ 的條件求解。

完成解法 1 之後，因為對於該解法還不夠滿意，所以仍持續研究，想找出其他的解法。研究之後發現其實圖 1 具備了 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ 的條件，利用此條件我們就可改以平面幾何的方式繼續討論，並得到解答。底下，將為大家介紹這個新解法。

一個平面幾何性質：

不過，在介紹新的解法之前，我們先看底下的性質 1 及其證明：

性質 1：已知梯形 $ABCD$ 的兩底為 $\overline{AB},\overline{CD}$，如下圖。

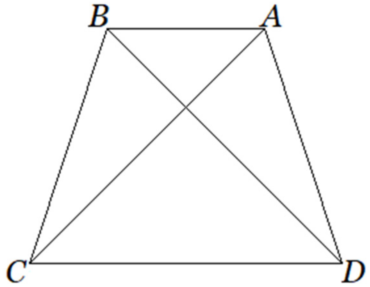

圖 3

若梯形兩對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 等長，則其兩腰 $\overline{AD},\overline{BC}$ 等長，且 $\angle ACD=\angle BDC,\ \angle ADC=\angle BCD$。

證明：圖 3 中，我們在 $\overline{CD}$ 的延長線上取 P 點滿足 $\overline{CP}=\overline{AB}$，其中 P,D 兩點在 C 點的異側，如下圖所示。

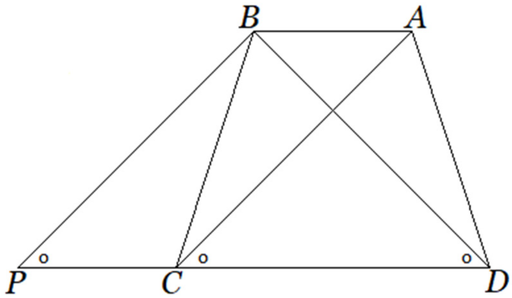

圖 4

上圖中，因為 $\overline{CP},\overline{AB}$ 平行且等長，故 $ABPC$ 為平行四邊形，因此知 $\overline{BP},\overline{AC}$ 平行且等長。接著，因為 $\overline{BD}=\overline{AC}=\overline{BP}$，故 ΔBPD 為等腰三角形，其兩底角相等，再配合 $\angle BPD,\angle ACD$ 為同位角的條件，可寫下

$$\angle BDC=\angle BDP=\angle BPD=\angle ACD.$$

此時，在 ΔACD 與 ΔBDC 中，因為 $\overline{AC}=\overline{BD},\angle ACD=\angle BDC,\overline{CD}=\overline{CD}$，可知 $\Delta ACD\cong\Delta BDC$ (SAS 性質)，得 $\overline{AD}=\overline{BC}$，且 $\angle ADC=\angle BCD,\angle ACD=\angle BDC$，證明完畢。

除了性質 1 所述之外，事實上，梯形 $ABCD$ 其對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 等長的條件和其兩腰 $\overline{AD},\overline{BC}$ 等長的條件等價。讀者若有興趣，不妨練習從後者推得前者(提示：使用圖 3 作輔助線，過 A 作 $\overline{BC}$ 的平行線交 CD 直線於 Q)。

使用新解法解題：

完成性質 1 的證明後，我們看原問題的另解如下：

解法 2：沿用解法 1 在圖 2 中令 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v_2}$ 的假設，但抹去圖 2 中對 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 兩向量的標示，如下圖。

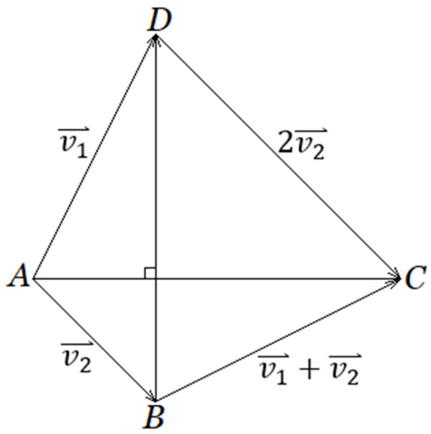

圖 5

利用上圖中對 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}$ 標示出的表達式，可知 $\overrightarrow{DC}$ 滿足

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=2\overrightarrow{v_2}=2\overrightarrow{AB}.$$

上式所得之 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ 的結果，告訴我們圖 5 中 $\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$ 且 $\overline{AB}\neq\overline{CD}$，因此 $ABCD$ 是一個梯形，其兩底長滿足 $\overline{CD}=2\overline{AB}$。

由原問題所給之 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長的條件，可知圖 5 中梯形 $ABCD$ 之對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 等長。此時利用性質 1，可知 $ABCD$ 為等腰梯形且滿足 $\overline{AD}=\overline{BC}$。接下來，我們改採平面幾何的方式繼續往下探討。首先，將圖 5 中的等腰梯形 $ABCD$ 轉一個角度，使其看起來如下圖。

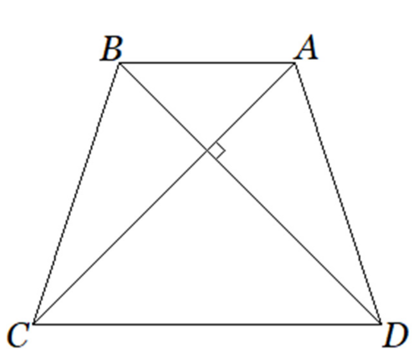

圖 6

因為上圖具備 $\overline{CD}=2\overline{AB}$ 的條件，我們可假設 $\overline{AB}=a,\overline{CD}=2a$，其中 a 為正數。回顧性質 1 的結論，可知圖 6 中具備 $\angle ACD=\angle BDC$ 的條件，利用 $\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$ 的條件及內錯角相等的性質，可再得 $\angle CAB=\angle DBA$。令 $\overline{AB},\overline{CD}$ 交於 E 點，如下圖。

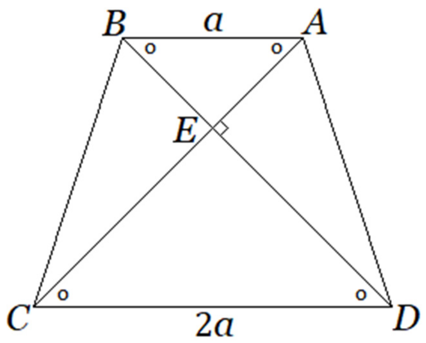

圖 7

由上圖中 $\angle CED=\angle AEB=90°$ 的條件，可知 ΔCED 與 ΔAEB 均為等腰直角三角形，因此可寫下

$$\overline{AE}=\overline{BE}=\frac{\overline{AB}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}a}{2},\qquad \overline{CE}=\overline{DE}=\frac{\overline{CD}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}a.$$

因 ΔADE 為直角三角形，由畢氏定理知

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{\frac{5}{2}a^2}=\frac{\sqrt{10}a}{2}. \tag{14}$$

圖 7 中，我們有 $\overline{BD}=\overline{BE}+\overline{DE}=\frac{3\sqrt{2}a}{2}$，此時對 ΔABD 使用餘弦定理，求出

$$\cos\angle BAD=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{AD}}=\frac{a^2+\frac{5}{2}a^2-\frac{9}{2}a^2}{\sqrt{10}a^2}=-\frac{1}{\sqrt{10}},$$

從而可再次得到 $\tan\angle BAD=-3$。值得一提的是，由(14)式與圖 7 知 $\overline{AD}=\frac{\sqrt{10}}{2}\overline{AB}$，此長度關係曾在解法 1 中的(11)式出現過。

完成上述解答後，想起曾在[3]的影片中看過葉晉宏老師使用 tan 的和角公式求得 $\tan\angle BAD=-3$。此處，我們也可使用此法求解，只要先利用圖 7 中的條件寫下

$$\tan\angle BAE=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=1,\qquad \tan\angle DAE=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}=2,$$

即可以上述兩式配合 tan 的和角公式，再次求得

$$\tan\angle BAD = \tan(\angle BAE + \angle DAE) = \frac{\tan\angle BAD + \tan\angle BAD}{1 - \tan\angle BAD \cdot \tan\angle BAD} = -3.$$

還有沒有其他方法可求得 $\tan\angle BAD$ 值呢？有的。利用性質 1 的結論中兩底角 $\angle ADC, \angle BCD$ 相等的條件，可知圖 6 同樣滿足 $\angle ADC = \angle BCD$。抹去圖 6 中 $ABCD$ 的對角線，並作 $\overline{AF}, \overline{BG}$ 分別垂直 $\overline{CD}$ 於 F, G 兩點，如下圖。

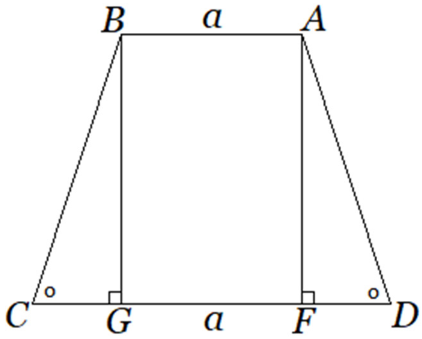

圖 8

因為 $ABGF$ 為矩形，可知 $\overline{GF} = \overline{AB} = a$ 且 $\overline{AF} = \overline{BG}$。接著，透過 RHS 全等性質證明 $\Delta ADF \cong \Delta BCG$，因此有 $\overline{DF} = \overline{CG}$。回顧在圖 6 底下假設的 $\overline{CD} = 2a$，可知在圖 8 中有

$$\overline{DF} = \overline{CG} = \frac{\overline{CD} - \overline{GF}}{2} = \frac{2a - a}{2} = \frac{a}{2}. \tag{15}$$

利用(14)式中 $\overline{AD} = \frac{\sqrt{10}a}{2}$ 的條件，因為 ΔADF 為直角三角形，使用畢氏定理可得

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3a}{2}. \tag{16}$$

配合圖 8，由(15), (16)兩式可知 $\tan\angle BAD = \tan\left(\frac{\pi}{2} + \angle DAF\right) = -\cot\angle DAF = -\frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = -3$，至次再次完成解答，而解法 2 至此結束。

看完上述解法 2 後，接著介紹一個有趣的發現。回顧解法 2，我們從原問題所敘述之 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 的條件出發，推導至圖 6 時得知 $ABCD$ 為梯形，其上下底為 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 且滿足 $\overline{CD} = 2\overline{AB}$。但是如果反過來看，我們也會有底下的性質：

性質 2：四邊形 $ABCD$ 為梯形且以 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 為兩底，若 $\overline{CD} = 2\overline{AB}$，則 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$，且 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$。

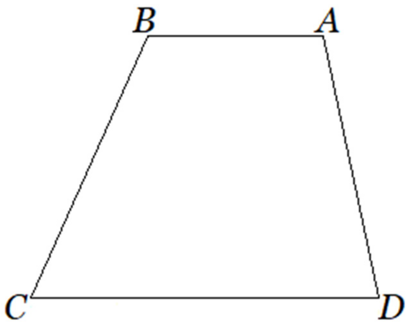

圖 9

證明：取 $\overline{CD}$ 的中點 M，連接 $\overline{AM},\overline{BM}$ 之後，結果如下圖。

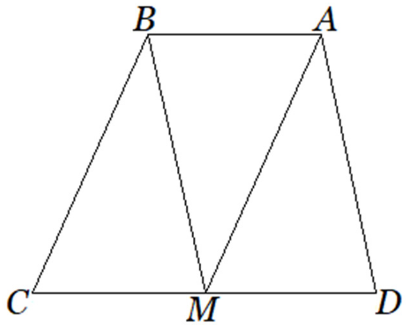

圖 10

上圖中，因為 $\overline{CD}=2\overline{AB}$，可知

$$\overline{CM}=\overline{DM}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{AB}.$$

因為 $\overline{CM},\overline{DM}$ 皆平行 $\overline{AB}$，配合上式可知四邊形 $ABCM,BADM$ 皆有一雙對邊平行且相等，因此兩者均為平行四邊形。此時，因為 $\overline{AM}$ 平行 $\overline{BC}$，使用平行四邊形法計算 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 後，可得

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}.$$

同理，計算 $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ 後可得

$$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AD}.$$

因此性質 2 結論中的兩條件確實成立，證明完畢。

而若回到第一節的原問題，並將問題所給的條件 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ 改為 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$，則只要假設 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{v_2}$ 並仿照解法 2 的討論方式，同樣可推得 $ABCD$ 為梯形、兩底為 $\overline{AB},\overline{CD}$ 且 $\overline{CD}=2\overline{AB}$ 的結果，這部分就留給讀者練習。

綜合以上討論，我們整理得到底下的性質：

性質 3：若 A,B,C,D 為平面上相異四點，且任三點都不共線，則以下四個性質是等價的：

(1) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$　(2) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$　(3) $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$

(4) $ABCD$ 為梯形，兩底為 $\overline{AB},\overline{CD}$，且 $\overline{CD}=2\overline{AB}$。

<u>使用向量性質再探</u>：

上述的解法 1 與解法 2 分別參考了圖 2 與圖 5 來解題，若將圖 2 與圖 5 中的資訊合起來，並假設 $\overline{AC},\overline{BD}$ 相交於 E，則可得下圖。

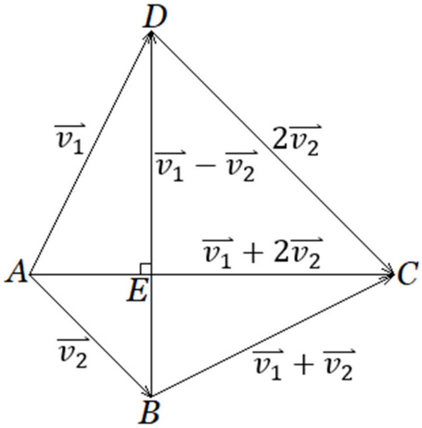

圖 11

由原本圖 1 可看出 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ 皆為非零向量且兩者不平行，因此圖 11 中 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 皆為非零向量且兩者不平行。我們可以問，若圖 11 中的 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 平行，則會有什麼問題嗎？若圖 11 中 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 平行，則存在實數滿足 $\overrightarrow{v_2}=k\overrightarrow{v_1}$，此時將有

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}=(1+2k)\overrightarrow{v_1},\qquad \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}=(1-k)\overrightarrow{v_1}.$$

由上兩式可看出 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{BD}$ 平行，但此與原問題題意不符，故 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ 不平行。

接下來，在圖 11 中假設 $\overrightarrow{AE}=s\overrightarrow{AC}$，則有

$$\overrightarrow{AE}=s\overrightarrow{v_1}+2s\overrightarrow{v_2}=s\overrightarrow{AD}+2s\overrightarrow{AB}.$$

因為 D,E,B 共線，可知 $s+2s=1$，得 $s=\frac{1}{3}$，因此 $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，從而有長度關係：$\overline{AE}=\frac{1}{3}\overline{AC},\overline{CE}=\frac{2}{3}\overline{AC}$。另一方面，在圖 11 中假設 $\overrightarrow{DE}=t\overrightarrow{DB}$，則有

$$\overrightarrow{DE}=-t\overrightarrow{BD}=-t\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)=t\overrightarrow{DA}+\frac{t}{2}\overrightarrow{DC}.$$

因為 A,E,C 共線，可知 $t+\frac{t}{2}=1$，得 $t=\frac{2}{3}$，因此 $\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$，從而有長度關係：$\overline{DE}=\frac{2}{3}\overline{DB},\overline{BE}=\frac{1}{3}\overline{DB}$。因為圖 11 中有 $\overline{AC}=\overline{BD}$ 的條件，透過以上討論，可知圖 11 滿

$\overline{AE}:\overline{BE}:\overline{CE}:\overline{DE}=1:1:2:2$ 的條件。再配合 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 的條件，可知 $\Delta AEB,\Delta CED$ 均為等腰直角三角形，而上述資訊在圖 7 中都曾出現過。因此，只要對圖 11 假設 $\overline{AB}=a,\overline{CD}=2a$，接著就可回頭利用圖 7 下方的解法繼續完成對原問題的解答。

小結：

回顧本節的討論過程，在一開始的解法 1 中，我們以較不具幾何直觀的算式來求解，直到在解法 2 中注意到重要的關係式 $\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AB}$ 之後，才發展出較直觀的平面幾何解題方式，並發現許多在解法 1 中並未得到的結果。而若利用(14),(16)兩式配合圖 7 與圖 8，我們即可確定圖 1 的四邊形 $ABCD$ 是一個上下底、兩腰與高的長度比為

$$1:2:\frac{\sqrt{10}}{2}:\frac{\sqrt{10}}{2}:\frac{3}{2}$$

的等腰梯形。注意上式中前四項滿足 $1+2\neq\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}$，這表示圖 1 中的四邊形 $ABCD$ 兩組對邊的長度和不相等，因此它沒有內切圓(可參考[4])。又因為等腰梯形任一底上的鄰角相等，且任一腰上的鄰角互補，故圖 1 中 $ABCD$ 滿足

$$\angle ABC+\angle ADC=\angle ABC+\angle BCD=180°,$$

故梯形 $ABCD$ 的對角互補，因此有外接圓(可參考[5])。讀者若有興趣，不妨可以算算看 $ABCD$ 的外接圓半徑。

回顧上述探討，我們之所以能得到許多與四邊形 $ABCD$ 有關的資訊，這一切應歸功於從解法 2 開始，我們將高中數學的向量及三角知識與國中數學的平面幾何知識適當地搭配運用後所討論得到的結果。而在討論過程中，我們也更加認識四邊形 $ABCD$ 所具備的幾何特性。下一節內容，我們將換個方式探討，先探討原問題的各條件如何決定圖 1 中四邊形 $ABCD$ 的形狀，完成後會再次求出 $\tan\angle BAD$ 值。

【待 續】