交換糖果：一個以同餘式解題的實例

蘇柏奇* 游淑媛

苗栗縣立興華高級中學

科學研習月刊[1]上，有一個名為「交換糖果」的題目：「有兩堆糖果放在左右兩盤，左盤有四個，右盤有五個。每一次都從偶數堆的糖果拿一半放到奇數堆去，然後反覆動作。經過三次動作後可以變成左邊五個，右邊四個，若一開始左盤 a 個，右盤 b 個，什麼樣的 (a, b) 可以經由若干次操作後變成 (b, a)？」此一有趣的問題在第 55 屆[2]及 61 屆[3]全國中小學科學展覽中均有相關的研究。本文藉由實例歸納，而後將問題轉換為同餘式求解。

壹、初探與歸納

為方便觀察，將左盤有 x 個，右盤有 y 個的情形記為 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 或 (x, y)。操作過程中，兩盤糖果總數不變，再令 $s = x + y$，顯然，x, y 為一奇數、一偶數且 s 為奇數。列出總數有 3~17 個的操作過程如下：

s	操作過程
3	$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
5	$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \arrow[d] \\ \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \arrow[u] & \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} \arrow[l] \end{tikzcd}$
7	$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} \arrow[ll, bend left] \end{tikzcd}$
9	$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix} \arrow[d] \\ \begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix} \arrow[u] \arrow[r] & \begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} \arrow[r] & \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix} \end{tikzcd}$ $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$

11	$\begin{tikzcd} \binom{1}{10} \arrow[r] & \binom{6}{5} \arrow[r] & \binom{3}{8} \arrow[r] & \binom{7}{4} \arrow[r] & \binom{9}{2} \arrow[d] \\ \binom{2}{9} \arrow[u] \arrow[r] & \binom{4}{7} \arrow[r] & \binom{8}{3} \arrow[r] & \binom{5}{6} \arrow[r] & \binom{10}{1} \end{tikzcd}$
13	$\begin{tikzcd} \binom{1}{12} \arrow[r] & \binom{7}{6} \arrow[r] & \binom{10}{3} \arrow[r] & \binom{5}{8} \arrow[r] & \binom{9}{4} \arrow[r] & \binom{11}{2} \arrow[d] \\ \binom{2}{11} \arrow[u] \arrow[r] & \binom{4}{9} \arrow[r] & \binom{8}{5} \arrow[r] & \binom{3}{10} \arrow[r] & \binom{6}{7} \arrow[r] & \binom{12}{1} \end{tikzcd}$
15	$\begin{tikzcd} \binom{3}{12} \arrow[r] & \binom{9}{6} \arrow[d] \\ \binom{6}{9} \arrow[u] & \binom{12}{3} \arrow[l] \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \binom{5}{10} \arrow[r, leftrightarrow] & \binom{10}{5} \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \binom{14}{1} \arrow[r] & \binom{7}{8} \arrow[r] & \binom{11}{4} \arrow[r] & \binom{13}{2} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \binom{1}{14} \arrow[r] & \binom{8}{7} \arrow[r] & \binom{4}{11} \arrow[r] & \binom{2}{13} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$
17	$\begin{tikzcd} \binom{1}{16} \arrow[r] & \binom{9}{8} \arrow[r] & \binom{13}{4} \arrow[r] & \binom{15}{2} \arrow[d] \\ \binom{2}{15} \arrow[u] \arrow[r] & \binom{4}{13} \arrow[r] & \binom{8}{9} \arrow[r] & \binom{16}{1} \end{tikzcd}$ $\begin{tikzcd} \binom{3}{14} \arrow[r] & \binom{10}{7} \arrow[r] & \binom{5}{12} \arrow[r] & \binom{11}{6} \arrow[d] \\ \binom{6}{11} \arrow[u] \arrow[r] & \binom{12}{5} \arrow[r] & \binom{7}{10} \arrow[r] & \binom{14}{3} \end{tikzcd}$

首先，不難得 (x, y) 及 (y, x) 的操作過程相似：

$$\begin{tikzcd} \binom{14}{1} \arrow[r] & \binom{7}{8} \arrow[r] & \binom{11}{4} \arrow[r] & \binom{13}{2} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \binom{1}{14} \arrow[r] & \binom{8}{7} \arrow[r] & \binom{4}{11} \arrow[r] & \binom{2}{13} \arrow[lll, bend left] \end{tikzcd}$$

另外，發現當 d 為奇數時，(x, y) 與 (dx, dy) 的操作過程亦相似，故後續僅討論 x, y 互質的情形。

$$\begin{tikzcd} \binom{1}{2} \arrow[r, leftrightarrow] & \binom{2}{1} \\ \binom{3}{6} \arrow[r, leftrightarrow] & \binom{6}{3} \\ \binom{5}{10} \arrow[r, leftrightarrow] & \binom{10}{5} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \binom{1}{4} \arrow[r] & \binom{3}{2} \arrow[d] \\ \binom{2}{3} \arrow[u] & \binom{4}{1} \arrow[l] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \binom{3}{12} \arrow[r] & \binom{9}{6} \arrow[d] \\ \binom{6}{9} \arrow[u] & \binom{12}{3} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

再者，發現給定總和 s 且 $\gcd(x,y)=1$，任意 (x,y) 皆經過相同次數操作後變成原來的狀態 (x,y)，例如：對 $x=1,2,3,4$，$(x,5-x)$ 皆經 4 次操作變回原來的狀態 $(x,5-x)$，將此操作次數稱「循環長度」；另外，(x,y) 皆經過相同次數操作後變成互換狀態 (y,x)，例如：對 $x=1,2,3,4$，$(x,5-x)$ 皆經 2 次操作變成互換狀態 $(5-x,x)$，將此操作次數稱為「互換次數」，列表如下：

s	3	5	7	9	11	13	15	17
循環長度	2	4	3	6	10	12	4	8
互換次數	1	2	×	3	5	6	×	4

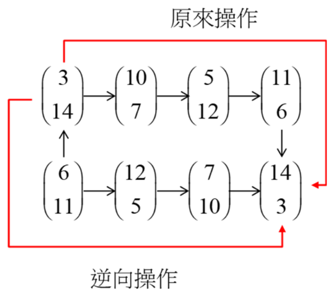
其中，假設(x, y)的互換次數為 t，則(x, y) 經 t 次操作為(y, x)，再經 t 次操作為(x, y)，即(x, y)的循環長度為 $2t$ (偶數)。但循環長度為偶數時，有時無法互換，如上表 $s=15$ 的情形。

貳、應用同餘式求解

本節將驗證「給定總和 s 且 $\gcd(x,y)=1$時，任意(x, y)循環長度均相等」，並探討其互換次數。

為了方便後續文章的說明，我們引用同餘的概念如下：對任兩個整數 m 與 n，當它們同除以正整數 s 有相同的餘數時，我們稱「m 與 n 除以 s 同餘」，記作 $m \equiv n \pmod{s}$ 或 $m-n \equiv 0 \pmod{s}$；亦即 $m-n$ 除以 s 的餘數為 0；例如：$101 \equiv 1 \pmod{10}$。

首先，相較於每次將偶數除以 2 的操作，注意到「逆向操作」是將其中一項乘以 2，計算上相對簡單，例如：(3,14)逆向操作 1 次為(6,11)，其中的 6 為將 3 乘以 2 的結果；此外，逆向操作的循環長度及互換次數跟原來的操作相同，如右圖中，(3,14)經操作 4 次或逆向操作 4 次皆得到互換的結果。綜上所述，以下將用逆向操作來替代原來的操作方式。



假設 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 經 n 次逆向操作後為 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$，以下求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$。令 $s=x_0+y_0$，若原始操作

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，不妨設 x 為偶數，得到 $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{2} \\ y' = \dfrac{x}{2} + y \end{cases}$，即

$$\begin{cases} x = 2x' \\ y = y' - \dfrac{x}{2} = y' - x' = 2y' - (x' + y') \end{cases},$$

故得 $\begin{cases} x \equiv 2x' \pmod{s} \\ y \equiv 2y' \pmod{s} \end{cases}$。因此，$\begin{cases} x_n \equiv 2x_{n-1} \pmod{s} \\ y_n \equiv 2y_{n-1} \pmod{s} \end{cases}$，再藉由同餘式的運算性質進而得 $\begin{cases} x_n \equiv 2^n \times x_0 \pmod{s} \\ y_n \equiv 2^n \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$。例如：(3,14)經 3 次逆向操作為 $\begin{cases} x_3 \equiv 2^3 \times 3 \pmod{17} \\ y_3 \equiv 2^3 \times 14 \pmod{17} \end{cases}$，計算得 $(x_3, y_3) = (7,10)$。

結論 1： 若 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ 經 n 次逆向操作後為 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 且 $s = x_0 + y_0$，則 $\begin{cases} x_n \equiv 2^n \times x_0 \pmod{s} \\ y_n \equiv 2^n \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$。

接著，我們討論循環長度及互換次數，設循環長度為 t，即 $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$，由結論 1 得 $\begin{cases} x_0 \equiv 2^t \times x_0 \pmod{s} \\ y_0 \equiv 2^t \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$，因 $\gcd(x_0, y_0) = 1$ 得 $\gcd(x_0, s) = \gcd(y_0, s) = 1$，故 $\begin{cases} x_0 \equiv 2^t \times x_0 \pmod{s} \\ y_0 \equiv 2^t \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$ 兩式皆可化簡為 $2^t \equiv 1 \pmod{s}$，亦即循環長度 t 與 x_0, y_0 無關，進而得證「給定總和 s 且 $\gcd(x, y) = 1$，任意(x, y) 的循環長度均相等」。

設互換次數為 k，即 $\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}$，得 $\begin{cases} y_0 \equiv 2^k \times x_0 \pmod{s} \\ x_0 \equiv 2^k \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$，得 $\begin{cases} s - x_0 \equiv 2^k \times x_0 \pmod{s} \\ s - y_0 \equiv 2^k \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$，化簡得 $\begin{cases} -x_0 \equiv 2^k \times x_0 \pmod{s} \\ -y_0 \equiv 2^k \times y_0 \pmod{s} \end{cases}$，又因 $\gcd(x_0, s) = \gcd(y_0, s) = 1$，可得 $2^k \equiv -1 \pmod{s}$。

結論 2： 給定總和 $s = x + y$ 且 $\gcd(x, y) = 1$，若 (x, y) 的循環長度為 t、互換次數為 k，則 $2^t \equiv 1 \pmod{s}$ 且 $2^k \equiv -1 \pmod{s}$。

藉由尤拉定理：「若 $\gcd(n, a) = 1$，則 $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$，其中 $\varphi(n)$ 為尤拉函數」及同餘式的性質可進一步得循環長度 t 為 $\varphi(s)$ 的因數，記為 $t \mid \varphi(s)$，因此，可快速得到循環長度，又因循環長度必為互換次數的兩倍，故可進而得互換次數。例如：$s = 17$ 時，$\varphi(17) = 16$，故循環長度為 16 的因數，將 $t = 1$、2、4、8、16 代入 $2^t \equiv 1 \pmod{17}$，得 $t = 8$、16 滿足上式，故得循環長度為 8，接著，因 $t = 4$ 滿足 $2^t \equiv -1 \pmod{17}$，故得互換次數為 4。再例如：$s = 15$ 時，得 $\varphi(15) = 15 \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 8$，同理得 $t = 4$ 滿足 $2^t \equiv 1 \pmod{15}$，得循環長度為 4，但此時 $t = 2$ 不滿足 $2^t \equiv -1 \pmod{15}$，故無法互換。

再探討一些特例，當 $s = 2^k - 1$ 時，解 $2^t \equiv 1 \pmod{2^k - 1}$ 得 $t = k$，若循環長度 k 為奇數，此時不存在互換次數；另外，當 $s = 2^k + 1$ 時，解 $2^t \equiv -1 \pmod{2^k + 1}$ 得 $t = k$，即互換次數為 k、循環長度為 $2k$。

結論 3：

1. 當 $s = x + y$ 且 $\gcd(x, y) = 1$ 時，則 (x, y) 循環長度 t 滿足 $t \mid \varphi(s)$。
2. 當 $s = 2^k - 1$ 且 $\gcd(x, y) = 1$ 時，(x, y) 無法互換。
3. 當 $s = 2^k + 1$ 且 $\gcd(x, y) = 1$ 時，(x, y) 的互換次數為 k、循環長度為 $2k$。

參、後記

本文之交換糖果與陳奕均等人[2]所討論的問題有異曲同工之妙，該問題為：「有左、右兩堆小石子，移動這些小石子，每次都從數量較多的那堆拿出當下較少那堆之個數的小石子，將其放到數量較少的那堆，反覆進行這種動作，直到兩堆的數量相等（稱為穩定狀態）」。例如：(3, 5) → (6, 2) →(4, 4)。陳奕均藉由觀察二進位的變化，得到「當 $x + y = 2^n$ 且 $\gcd(x, y) = 2^k$ 時，則 (x, y) 經過 $n - k - 1$ 次移動形成穩定狀態」。

本文最後提供另一種計算形成穩定狀態次數的方法。不妨設 $x < y$，移動小石子的操作方式可表示為 $(x, y) \to (2x, y - x)$，這樣的操作方式恰為本研究之逆向操作，故若 (x, y) 形成穩定狀態的次數為 t，即 $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} \\ 2^{n-1} \end{pmatrix}$，則有 $\begin{cases} 2^t \times x \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n} \\ 2^t \times y \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n} \end{cases}$。由 $\gcd(x, y) = 2^k$，可設 $x = p \times 2^k, y = q \times 2^k$ (其中 p, q 為兩互質之奇數)，代入解 $\begin{cases} 2^t \times p \times 2^k \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n} \\ 2^t \times q \times 2^k \equiv 2^{n-1} \pmod{2^n} \end{cases}$

得 $\begin{cases} p \times 2^{t+k} = 2^{n-1} + \alpha \times 2^n \\ q \times 2^{t+k} = 2^{n-1} + \beta \times 2^n \end{cases}$，即 $\begin{cases} p \times 2^{t+k} = 2^{n-1} \times (1 + 2\alpha) \\ q \times 2^{t+k} = 2^{n-1} \times (1 + 2\beta) \end{cases}$，兩式皆得 $t + k = n - 1$，即 $t = n - k - 1$。

參考文獻:

1. 游森棚 (2020)，森棚教官數學題—交換糖果。科學研習月刊 59-01。
2. 陳奕均(2015)，第 55 屆全國中小學科學展覽國中組數學科作品。從平分問題到動態穩定。
3. 尤子榕等(2021)，第 61 屆全國中小學科學展覽國小組數學科作品。奇偶互換---怎樣回到原位。