從一道向量幾何題的另解談起(下)

連 威 翔

山城人力資源管理顧問有公司派遣人員(投稿期間派遣至苗栗縣政府環境保護局)

參、四邊形 $ABCD$ 形狀的再探

在上一節中，我們證明了性質 1、2 與性質 3。本節一開始，先介紹另一個性質及其證明如下：

性質 4：已知梯形 $ABCD$ 的兩底為 $\overline{AB},\overline{CD}$，且 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中點分別為 M,N，如下圖。

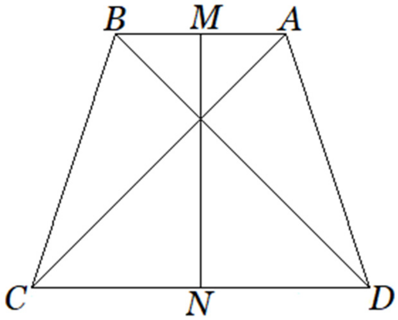

圖 12

若梯形的對角線 $\overline{AC},\overline{BD}$ 等長，則 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$。

證明：因為 $\overline{AC}=\overline{BD}$，利用性質 1 可知上圖中具備 $\overline{AD}=\overline{BC}$ 與 $\angle ADC=\angle BCD$ 兩條件。因為 N 為 $\overline{CD}$ 中點，可知 $\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$；又因為 M 為 $\overline{AB}$ 中點，我們可寫下

$$\overrightarrow{NM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{NC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}\right).$$

注意圖 12 中，$\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}$ 的夾角為 $\angle BCD$，而 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}$ 的夾角等於 $\angle ADC$，因此以上式之 $\overrightarrow{NM}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 作內積可得

$$\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{CB}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\angle BCD-\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AD}\right|\left|\overrightarrow{CD}\right|\cos\angle ADC$$

$$=\frac{1}{2}\overline{CD}\left(\overline{BC}\cos\angle BCD-\overline{AD}\cos\angle ADC\right)=\frac{1}{2}\overline{CD}\left(\overline{BC}\cos\angle BCD-\overline{BC}\cos\angle BCD\right)=0.$$

由上式之結果可知 $\overrightarrow{NM}$ 垂直 $\overrightarrow{CD}$，因此 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{CD}$。又因為 $\overline{AB}$ 平行 $\overline{CD}$，故 $\overline{MN}$ 垂直 $\overline{AB}$，證明完畢。

決定 $ABCD$ 形狀的三個步驟：

有了性質 4 之後，我們回顧原問題所給的條件，並逐步探討這些條件如何決定四邊形 $ABCD$ 的樣貌。首先第一步，以原問題中 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ 的條件配合性質 3，可知 $ABCD$ 為梯形，其兩底為 $\overline{AB}, \overline{CD}$，且滿足 $\overline{CD} = 2\overline{AB}$。令 $\overline{AB} = a, \overline{CD} = 2a$，其中 a 為固定的正數，則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的長度固定，但其位置則尚未固定，此時 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 就像是兩根套在兩條直線上可滑動的細管，如下圖。

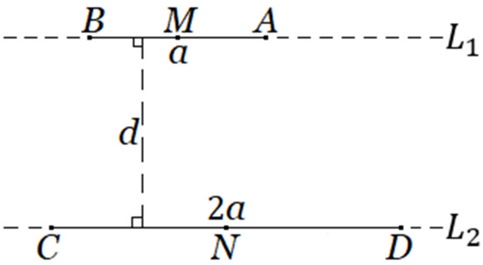

圖 13

上圖中，$\overline{AB}, \overline{CD}$ 分別落在 L_1, L_2 上，我們事先把 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 的中點 M, N 標出來。注意上圖中兩平行線 L_1, L_2 的距離 d 之值尚未確定。

接著第二步，先連接圖 13 中的 $\overline{AC}, \overline{BD}, \overline{AD}, \overline{BC}, \overline{MN}$，由原問題所給之 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ 等長的條件知 $\overline{AC} = \overline{BD}$，因此利用性質 4 可知 $\overline{MN} \perp \overline{CD}$，參考下圖。

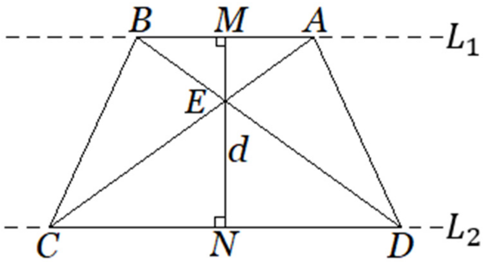

圖 14

若在圖 14 中先固定 $\overline{CD}$ 的位置，則 $\overline{AB}$ 的位置就必須使 $\overline{MN} \perp \overline{CD}$ 成立。將圖 14 中的 L_1, L_2 視為水平線，則直線 MN 為鉛直線，M 的位置恰好在 N 的正上方。此時在圖 14 中，尚未確定的條件就只剩下 L_1, L_2 兩直線距離 d 的大小。在圖 14 中以直觀看來，可發現當 d 變大時，$\angle AEB$ 會隨之變小；反之當 d 變小時，$\angle AEB$ 會隨之變大。而在圖 14 中，其實 $\overline{AC}, \overline{BD}$ 的交點 E 恰好會落在 $\overline{MN}$ 上，其證明不難。圖 14 中，假設 $\overline{AC}, \overline{MN}$ 交於 E 點，接著利用 AA 相似性質證明 $\Delta AEM \sim \Delta CEN$，因此有 $\overline{ME}:\overline{NE} = \overline{AM}:\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{AB}:\frac{1}{2}\overline{CD} = \overline{AB}:\overline{CD} = 1:2$，故 $\overline{ME} = \frac{1}{3}\overline{MN}$；另一方面，假設 $\overline{BD}, \overline{MN}$ 交於 E' 點，同理可證 $\overline{ME'} = \frac{1}{3}\overline{MN}$。因此 $\overline{ME} = \overline{ME'}$，即 E, E'

共點，這就表示 $\overline{AC},\overline{BD}$ 的交點 E 落在 $\overline{MN}$ 上。

第三步，由原問題中 $\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BD}$ 互相垂直的條件，可知 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$。此時觀察圖 14，應能看出圖中的 d 值大小必須調整，才能滿足 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 的條件。而該如何求出滿足 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 條件的 d 值呢？首先在圖 14 中，可透過 SAS 全等性質證明 $\Delta AME\cong\Delta BME$ 與 $\Delta CNE\cong\Delta DNE$，此時若令 $\angle AEB=\angle CED=2\theta$，則有

$$\angle AEM=\angle BEM=\ \angle CEN=\angle DEN=\theta,$$

因此可知

$$\overline{MN}=\overline{ME}+\overline{EN}=\overline{BM}\cot\theta+\overline{CN}\cot\theta=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\cot\theta=\frac{3}{2}a\cot\theta.$$

當我們調整圖 14 中的 d 值使 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 時，將有 $\angle AEB=2\theta=90°$，因此 $\theta=45°$，從而有

$$d=\overline{MN}=\frac{3}{2}a\cot 45°=\frac{3}{2}a.$$

除了使用三角函數的方法求出上式的 d 值之外，我們還可以使用平面幾何的方法。於圖 14 中作 $ABCD$ 的高 $\overline{AF}$ 後，則有 $\overline{AF}=\overline{MN}=d$；接著調整圖 14 中的 d 值，假設調整至 $d=h$ 時 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$ 成立，此時可參考下圖。

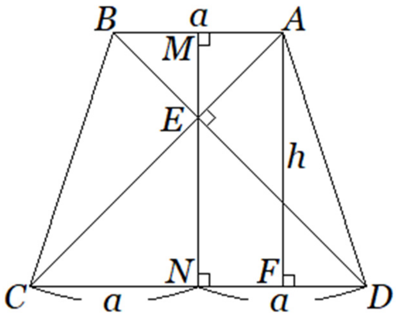

圖 15

利用圖 15，先計算出 $ABCD$ 的面積如下：

$$ABCD\text{面積}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\overline{AF}=\frac{1}{2}(a+2a)h=\frac{3}{2}ah. \tag{17}$$

回顧在圖 8 底下的(15)式可知圖 15 中同樣有 $\overline{DF}=\frac{a}{2}$，因為 ΔACF 為直角三角形，$\overline{CF}=\overline{CG}+\overline{GF}=\frac{3}{2}a$，使用畢氏定理可得

$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AF}^2+\overline{CF}^2}=\sqrt{h^2+\frac{9}{4}a^2}.$$

不難證明，若一個凸四邊形的對角線互相垂直，則其面積剛好等於兩對角線長的乘積之半。因圖 15 中 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 且 $\overline{AC} = \overline{BD}$，故 $ABCD$ 面積滿足

$$ABCD\text{面積} = \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \frac{1}{2}\left(h^2 + \frac{9}{4}a^2\right).$$

將上式與(17)式聯立，可得方程式

$$4h^2 - 12ah + 9a^2 = 0,$$

且可由上式解得 $h = \frac{3}{2}a$，因此 $\overline{AF} = h = \frac{3}{2}a$。當我們確定圖 15 中梯形 $ABCD$ 的高 $\overline{AF}$ 的大小為 $\frac{3}{2}a$ 後，就完全確定了梯形 $ABCD$。

在上述討論中的第三步，我們求出 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 時梯形 $ABCD$ 的高為 $\frac{3}{2}a$，其實此結果在上一節圖 8 底下的(16)式就已經求出過，此處只是藉著重新探討梯形 $ABCD$ 圖形的機會，配合圖 14 與圖 15 再介紹另兩種計算方式。其中，對於尚未學習到三角學知識的讀者來說，可利用搭配圖 15 的計算方式來理解。

有了圖 15，我們還可順便求出原問題所關心的 $\tan\angle BAD$ 值。在圖 15 中以 A 為原點、$\overrightarrow{AF}$ 方向為 y 軸負向置入直角坐標系，因為 $\overline{DF} = \frac{a}{2}, \overline{AF} = h = \frac{3}{2}a$，可得

$$\overrightarrow{AB} = (-a, 0), \overrightarrow{AD} = \left(\frac{a}{2}, -\frac{3a}{2}\right),$$

從而有

$$\cos\angle BAD = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AD}|} = \frac{-\frac{1}{2}a^2}{a \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}a} = -\frac{1}{\sqrt{10}}. \tag{18}$$

因此，可再次求出 $\tan\angle BAD = -3$。

肆、使用複數的解法

看完前兩節對原問題提出的另解後，本節將再介紹一個使用複數求解的新解法供讀者參考。不過在介紹新解法之前，我們先復習一些複數的基本知識。

令複數 $z_1 = a + bi$，其中 a, b 是不全為零的實數，則可先將 z_1寫成極式如下：

$$z_1 = r_1(\cos\alpha + i\sin\alpha), \tag{19}$$

其中 α 為 z_1 的輻角主值，$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2} > 0, \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$。此時若有另一複數 z_2，且已知其極式如下：

$$z_2 = r_2(\cos\beta + i\sin\beta), \tag{20}$$

其中 $r_2>0$ 且 β 為 z_2 的輻角主值，則 z_1 和 z_2 相乘的結果如下：

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)\cdot r_2(\cos\beta+i\sin\beta) \\ &= r_1r_2[(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)] \\ &= r_1r_2[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]. \end{aligned} \tag{21}$$

在上式最後一個等號的計算，我們用上了 cos 與 sin 的和角公式。上式清楚地告訴我們 z_1z_2 的長度為 r_1r_2，是 z_1 的長度 r_1 的 r_2 倍，而 z_1z_2 的輻角 $\alpha+\beta$ 等於 z_1 的輻角 α 加上 β。因此在幾何上，z_1z_2 所代表的向量就是 z_1 所代表的向量(底下簡稱向量)旋轉 β 角後將長度伸縮為 r_2 倍的結果。當 β 為正數時，上述旋轉為逆時針旋轉；而當 β 為負數時，則為順時針旋轉。特別地，當 $r_2=1$ 時，z_1z_2 向量是只原本的 z_1 向量旋轉 β 角的結果。

而上述兩非零複數 z_1,z_2 相除時又如何呢？注意在(19),(20)兩式中的 r_1,r_2 也可分別寫成 $|z_1|,|z_1|$，因此計算(19) ÷ (20)可得

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)}{r_2(\cos\beta+i\sin\beta)} = \frac{r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta-i\sin\beta)}{r_2(\cos\beta+i\sin\beta)(\cos\beta-i\sin\beta)} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\cdot[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]. \end{aligned} \tag{22}$$

在上式最後一個等號處的計算須用上差角公式，其細節留給讀者練習，從上式可看出 $\frac{z_1}{z_2}$ 的輻角 $\alpha-\beta$ 為 z_1,z_2 的輻角之差。

現在開始說明如何使用複數求解原本的問題，解法如下：

解法 3：分別以 z_1,z_2 表示圖 2 中的 $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$，取代原本解法 1 中的 $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$。觀察圖 2 中各向量的表示法，將其全部改以複數 z_1,z_2 表示後，可得下圖。

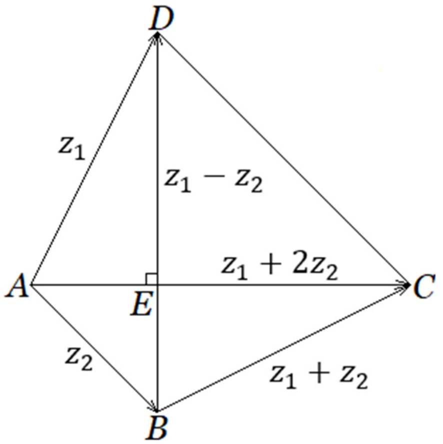

圖 16

其中，代表 $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}$ 的複數分別為 $z_1+2z_2,\ z_1-z_2$。因原題目設定 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{BD}$ 兩向量等長且互相垂直，參考圖 16 可知將 $\overrightarrow{AC}$ 逆時針旋轉 $90°$ 後所得的向量等於 $\overrightarrow{BD}$，因此根據公式(21)及其底下的討論內容，可得底下的關係式：

$$z_1-z_2=(z_1+2z_2)(\cos 90°+i\sin 90°)=iz_1+2iz_2.$$

上式整理後，可得

$$z_1(1-i)=z_2(1+2i). \tag{23}$$

不難發現，$z_1=z_2=0$ 是符合上式的一組解，但這組解在圖 16 中對應的圖形是 A,B,C,D 四點重合，這與原問題示意圖(圖 1)中 A,B,C,D 四點位置相異的情況不符。因此對於(23)式，我們只須考慮 z_1,z_2 均不為零的解。由(23)式可知

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+2i}{1-i}=\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i. \tag{24}$$

先利用上式求出 $\frac{|z_1|}{|z_2|}$ 之值如下：

$$\frac{|z_1|}{|z_2|}=\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}. \tag{25}$$

假設圖 16 中 z_1,z_2 的輻角主值分別為 α,β，滿足 $-\pi<\beta<\alpha<\pi$，則 $\alpha-\beta$ 就表示從圖 16 中 $\overrightarrow{AB}$ 的方向逆時針旋轉至 $\overrightarrow{AD}$ 的方向時所掃過的角度，因此我們有 $\angle BAD=\alpha-\beta$。此時依據(25)式所推得的結果並配合公式(22)，可知圖 16 中的 z_1,z_2 滿足

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)]=\frac{\sqrt{10}}{2}(\cos\angle BAD+i\sin\angle BAD). \tag{26}$$

比較(24), (26)兩式的實部與虛部後，可得

$$\cos\angle BAD=-\frac{1}{\sqrt{10}},\qquad \sin\angle BAD=\frac{3}{\sqrt{10}},$$

因此解得

$$\tan\angle BAD=\frac{\sin\angle BAD}{\cos\angle BAD}=-3.$$

解題完畢，以上就是使用複數的解法。

值得一提的是，上面比較(24), (26)兩式之實部與虛部的方法，應會使我們聯想到張簡瑞璨老師在[2]中對第一節學測選填題 G 的解法使用了「比較等號兩側向量之分量」的方法。其實，比較複數式等號兩側的實虛部與比較平面向量式等號兩側之兩分量，兩者在本質上應是同一件事。

伍、結語

本文內容是在解題後的心得分享。雖然在第貳、參、肆節當中對 108 學測選填題 G 所提出的解法都沒有特別簡單，但主要目的是希望透過分享本文，讓讀者明白當我們對一道問題感到有興趣時，即使一開始並沒有找到讓自己很滿意的解法，但只要願意繼續用心探討，就有機會看見一開始並未預期到的風景。

有句話說：「一沙一世界，一花一天堂」，只要願意專注用心，解一道數學題應該也是如此。讀者您認為呢？最後，在這條古往今來的數學大道上，願與各位讀者共勉之，也衷心感謝審稿者提出許多良善的建議，使本文更臻完善。

參考資料:

歷屆學測試題，大學入學考試中心 https://www.ceec.edu.tw/

108 學測數學試題解析，三民東大數學學習網 https://elearning.sanmin.com.tw/Learn/LearnIndex/Math

108 學測選填 G，葉晉宏歷屆學測試題影音詳解(101 年至今) https://www.youtube.com/watch?v=H_mebj4uAwQ

維基百科「內切圓」條目

維基百科「等腰梯形」條目

【完】