中學生通訊解題第 149-152 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號 14901

(1)　求方程組 $(x+1)^2+{y_1}^2=(x+2)^2+{y_2}^2=(x+3)^2+{y_3}^2$ 的一組整數解 (x,y_1,y_2,y_3)。

(2)　求最大正整數 n，使得方程組
$(x+1)^2+{y_1}^2=(x+2)^2+{y_2}^2=\cdots=(x+k)^2+{y_k}^2=\cdots=(x+n)^2+{y_n}^2$
有整數解 $(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)$。

【簡答】 (1) (-2, 0 , 1 , 0)　(2) 3

【詳解】

(1)　因為 $(-2+1)^2+0^2=(-2+2)^2+1^2=(-2+3)^2+0^2$，所以(－2, 0 , 1 , 0)為整數解。

$$a^2+b^2\equiv\begin{cases}2,1,5 \pmod 8；當 a\equiv\pm1 \pmod 4\\ 1,0,4 \pmod 8；當 a\equiv 0 \pmod 4\\ 5,4,0 \pmod 8；當 a\equiv 2 \pmod 4\end{cases}$$

(2)　①對整數 a, b，

②當 n＝4 時，設題中方程組有整數解，且

$$(x+1)^2+{y_1}^2=(x+2)^2+{y_2}^2=(x+2)^2+{y_3}^2=(x+2)^2+{y_4}^2=m$$

因為{x＋1, x＋2, x＋3, x＋4}模 4 下為{1,2,3,4}，所以 m 為{2,1,5}中之一數，且 m 為{1,0,4}中之一數，且 m 為{5,4,0}中之一數，矛盾。

③當 $n\geq 4$ 時，顯然方程組無解。

故所求最大正整數 n＝3。

問題編號
14902

已知二元二次方程式 $x^2+12xy+ay^2+2x+by+c=0$ 恰有一組解為 $x=p$，$y=p+22$，若其中 a,b,c 都是正整數，求 a,b,c 之值。

【簡答】 $a=37$，$b=6$，$c=10$

【詳解】

利用配方法，

$$x^2+12xy+ay^2+2x+by+c$$

$$=(x+6y)^2+2(x+6y)+(a-36)y^2+(b-12)y+c$$

$$=(x+6y+1)^2+(a-36)y^2+(b-12)y+(c-1)$$，

依題意可知，$p+6(p+22)+1=0$，解得 $p=-19$，$y=3$，

而得 $(a-36)y^2+(b-12)y+(c-1)=(a-36)(y-3)^2$，$a>36$，

比較係數，得 $(b-12)=-6(a-36)$，$(c-1)=9(a-36)$，a,b,c 都是正整數，

令 $a-36=t$，得 $b=12-6t$，$c=1+9t$，t 為正整數，故 $t=1$，

解得 $a=37$，$b=6$，$c=10$。

問題編號
14903

過圓外一點 P 作圓的兩條切線 $\overleftrightarrow{PA},\overleftrightarrow{PB}$，$A,B$ 為切點，再過點 P 作圓的一條割線分別交圓於 C,D 兩點，過切點 B 作 $\overleftrightarrow{PA}$ 的平行線分別交直線 $\overleftrightarrow{AC},\overleftrightarrow{AD}$ 於 E,F。

求證：$\overline{BE}=\overline{BF}$。

【證明】

如圖所示，連接 BC,BA,BD，則 $\angle ABC=\angle PAC=\angle E$，所以 $\triangle ABC \sim \triangle AEB$。從而

$\dfrac{BE}{BC}=\dfrac{AB}{AC}$，即 $BE=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}$ 。……(1)

又 $\angle ABF=\angle PAB=\angle ADB$ ，所以$\triangle ABF\sim\triangle ADB$。從而 $\dfrac{BF}{BD}=\dfrac{AB}{AD}$ ，

即 $BF=\dfrac{AB\cdot BD}{AD}$ 。…….(2)

另一方面，因為$\triangle PBC\sim\triangle PDB$ ，$\triangle PCA\sim\triangle PAD$ ，所以 $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{PC}{PB}$ ， $\dfrac{AC}{AD}=\dfrac{PC}{PA}$ ，而

$PA=PB$ ，所以 $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC}{AD}$ 。……(3)

於是 $\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{BD}{AD}$ 。故由式(1)(2)(3)知 $BE=BF$ 。

問題編號
14904

在某校舉辦的羽球友誼賽中，學生組的隊數比校友組的隊數多 7 隊，每兩隊之間只比一場，沒有和局，已知學生組贏的場數總和是校友組贏的場數總和的 7 倍，求校友組共有幾隊？

【簡答】 5

【詳解】

(1) 設有 x 支校友隊，則有 $x+7$ 支學生隊，校友組之間共進行 $\dfrac{x(x-1)}{2}$ 場比賽，

學生組之間共進行 $\dfrac{(x+7)(x+6)}{2}$ 場比賽，設學生組和校友組的比賽中，校友組贏得 k 場比賽，則學生組贏得 $x(x+7)-k$ 場比賽，由以知條件得

$7\cdot[\dfrac{x(x-1)}{2}+k]=\dfrac{(x+7)(x+6)}{2}+x(x+7)-k$ ，化簡得

$2x^2-17x+(8k-21)=0$ ，因為 x 為自然數，所以判別式 $457-64k$ 為完全平方數，故解得 $k=7$ ， $x=5$ 。因此校友組共有為 5 隊。

問題編號 14905

一棟 33 層的舊倉儲大樓僅有一部貨梯停在第一層，受到功能限制它最多能容納 32 個貨物而且每次只能在第 2 層至第 33 層選擇某一層停留一次，其餘每個貨物則需要往上或往下搬動，若往下搬動一層樓梯會需要用到 1 個人力，而往上走一層則需運用到 3 個人力。現有 32 個貨物在第一層，若要把這些貨物運送到第 2 層至第 33 層每層各一個，試問電梯停留在哪一層會使得整體人力運用到最少？又最少的人力需求為多少人次？(注意有些貨物可以不搭貨梯直接運用人力搬移)

【簡答】 電梯停留在第 27 層；最少的人力需求為 316 人次

【詳解】

假設貨梯停留在第 x 層，另有 y 件貨物不搭貨梯直接運用人力往上搬移，則運用人力搬遷的或需要最少人力為 $3(1+2+3+\cdots+y)$ 人次。

若貨梯停留在第 x 層需要下樓的貨物有 $x-y-2$，

則需要最少人力為 $(1+2+3+\cdots+(x-y-2))$ 人次，

且需要上樓的貨物為 $33-x$，

則需要最少人力為 $3(1+2+3+\cdots+(33-x))$ 人次。

因此總人力

$$
\begin{aligned}
S &= 3(1+2+3+\cdots+(33-x))+(1+2+3+\cdots+(x-y-2)) \\
&\qquad +3(1+2+3+\cdots+y) \\
&= 3\frac{(34-x)(33-x)}{2}+\frac{(x-y-1)(x-y-2)}{2}+3\frac{y(y+1)}{2} \\
&= 2x^2-xy+2y^2-102x+3y+1684 \\
&= 2x^2-(y+102)x+(2y^2+3y+1684) \\
&= 2(x-\frac{y+102}{4})^2+\frac{15}{8}y^2-\frac{45}{2}y+1684-\frac{51^2}{2} \\
&= 2(x-\frac{y+102}{4})^2+\frac{15}{8}(y-6)^2+316 \geq 316
\end{aligned}
$$

因此當 $x=27,\ y=6$ 需要 316 人次。

問題編號
15001

設 a,b 是正整數，且滿足 $2\left(\sqrt{\dfrac{10}{a}}+\sqrt{\dfrac{10}{b}}\right)$ 是整數，列出所有可能的有序數對 (a,b) 。

【簡答】 $(160,160),(90,360),(360,90),(40,40),(40,10),(10,40),(10,10)$

【詳解】

設 $\sqrt{\dfrac{10}{a}}+\sqrt{\dfrac{10}{b}}=\dfrac{k}{2}(k\in N)$ ，則 $\dfrac{10}{b}=\dfrac{k^2}{4}+\dfrac{10}{a}-k\sqrt{\dfrac{10}{a}}\Rightarrow\sqrt{\dfrac{10}{a}}$ 為有理數，

令 $\dfrac{10}{a}=\dfrac{q^2}{p^2}(p,q\in N)$ ，且 $(p,q)=1$ ，則 $aq^2=10p^2$ ，

故 $q^2\,|\,10\Rightarrow q=1$ ，所以 $\sqrt{\dfrac{10}{a}}=\dfrac{1}{p}$ ，

同理 $\sqrt{\dfrac{10}{b}}=\dfrac{1}{m}(m\in N)$ ，因此 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{k}{2}$ ，

又 $p\ge 1,m\ge 1$ ，則 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{k}{2}\le 2$ ，

所以 $k=1,2,3,4$ 。

(1)當 $k=1$ 時，有 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow(p-2)(m-2)=4$ ，

得 $(p,m)=(4,4)$ 或 $(3,6)$ 或 $(6,3)$ ；

(2)當 $k=2$ 時， $(p,m)=(2,2)$ ；

(3)當 $k=3$ 時， $(p,m)=(2,1)$ 或 $(1,2)$ ；

(4)當 $k=4$ 時， $(p,m)=(1,1)$ 。

因此這樣的有序數對 (a,b) 共有 7 對：

$(160,160),(90,360),(360,90),(40,40),(40,10),(10,40),(10,10)$ 。

問題編號
15002

設 a、b、c 為三正實數，滿足 $a+\dfrac{1}{b}=\dfrac{13}{6}$ 、 $b+\dfrac{1}{c}=\dfrac{8}{5}$ 、 $c+\dfrac{1}{a}=\dfrac{13}{4}$，則 abc 之值為何？

【簡答】 4 或 $\dfrac{1}{4}$

【詳解】

$$(a+\frac{1}{b})+(b+\frac{1}{c})+(c+\frac{1}{a})=\frac{13}{6}+\frac{8}{5}+\frac{13}{4}=\frac{421}{60}$$

$$(a+\frac{1}{b})(b+\frac{1}{c})(c+\frac{1}{a})=abc+\frac{1}{abc}+a+\frac{1}{b}+b+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}=\frac{13}{6}\times\frac{8}{5}\times\frac{13}{4}=\frac{169}{15}$$

$$\Rightarrow abc+\frac{1}{abc}=\frac{169}{15}-\frac{421}{60}=\frac{17}{4}$$

$$\Rightarrow abc=4\text{ 或 }\frac{1}{4}$$

問題編號
15003

$\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 是直角，該三角形的內切圓切 $\overline{AC},\overline{BC}$ 及 $\overline{AB}$ 於 M,K 及 N 點，從 K 點做直線垂直於線段 $\overline{MN}$，並交直角邊 $\overline{AC}$ 於 X 點。證明： $\overline{CK}=\overline{AX}$ 。

【證明】

如圖所示，設點 I 是 $\triangle ABC$ 的內切圓圓心，則 I 在 $\angle A$ 的內角平分線上。

因為 $\triangle AMN$ 是等腰三角形， AI 是它的高，所以 $AI\perp MN$ 。

根據條件 $KX\perp MN$ ，得 $AI//KX$ 。又 $IK\perp BC$ ，得 $IK//AC$ ，

所以四邊形 $AXKI$ 是平行四邊形，從而得知 $AX=KI$ 。

但是在矩形 $KIMC$ 中，邊 $IK=IM$ ，可知 $KIMC$ 是正方形，

故得 $CK=KI=AX$ 。

問題編號
15004

設 $a_1, a_2, a_3, ..., a_{101}$ 為 101 個自然數，若其和為 300，試證明：一定可以從其中找到若干個，使得其和為 100。

【證明】

令 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$

考慮數列 $S_1, S_2, S_3, ..., S_{101}$

(1)若有其中一個為 100，則得證

(2)若有其中一個為 200，則其他的和為 100，得證

(3)若沒有一個項為 100 或 200，

假設 $S_i < 100 < S_{i+1}, S_j < 200 < S_{j+1}$

考慮三群數列

$S_1, S_2, S_3, ..., S_i,$
$S_{i+1} - 100, ..., S_j - 100,$
$S_{j+1} - 200, ..., S_{101} - 200$

這 101 個數均為 1~100 的自然數，由鴿籠原理必有兩個數相等

若第一群與第二群有兩數相等，$S_p = S_q - 100$，則 $a_{p+1} + \cdots + a_q = 100$

(例如 $S_5 = S_{40} - 100$，則 $a_6 + \cdots + a_{40} = 100$)

若第一群與第二群有兩數相等，$S_p - 100 = S_q - 200$，則 $a_{p+1} + \cdots + a_q = 100$

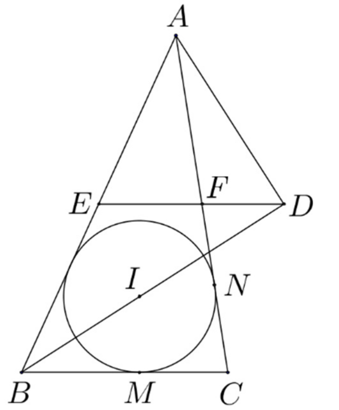
若第一群與第三群有兩數相等，$S_p = S_q - 200$，則 $a_{p+1} + \cdots + a_q = 200$，

則其他數的總和為 100

綜合以上，必可從其中找到若干個，使得其和為 100

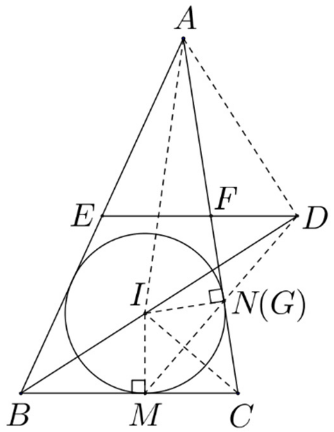
問題編號

15005



已知△ABC 的內心為 I，其內切圓分別切 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$ 於點 M、N，點 E、F 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 中點，D 為 $\overleftrightarrow{EF}$ 與 $\overleftrightarrow{BI}$ 的交點，證明：M、N、D 三點共線。

【證明】



作 $\overline{DM}$，$\overline{DM}$ 交 $\overline{AC}$ 於 G，

作 $\overline{AI}$、$\overline{AD}$、$\overline{IM}$、$\overline{IC}$、$\overline{IG}$，

因為$\triangle ABC$的內心為 I，所以$\angle CBD=\angle DBE$，

因為點 E、F分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 中點，所以 $\overline{ED}\,//\,\overline{BC}$，

故$\angle EDB=\angle DBC=\angle EBD$，

因此 $\overline{EA}=\overline{EB}=\overline{ED}$，

得 E 為$\triangle ADB$的外心，$\angle ADB=90^\circ$，

因為$\triangle ABD\sim\triangle IBM$ (AA 相似)，所以 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BD}}=\dfrac{\overline{IB}}{\overline{BM}}$，

得$\triangle ABI\sim\triangle DBM$ (SAS 相似)，因此$\angle DMB=\angle AIB=90^\circ+\dfrac{1}{2}\angle ACB$，

則$\angle IMG=\angle DMB-90^\circ=\dfrac{1}{2}\angle ACB=\angle GCI$，

故 I, M, C, G 四點共圓，

得 $\overline{IG}\perp\overline{AC}$，$N=G$，故 M、N、D 三點共線。

問題編號

15101

檢查 1000000 以內的所有自然數，只要它的數字和是 17 的倍數，就把其中所有的數統統疊加起來，試證明所得的總和也一定能被 17 整除。

【證明】

把所有這種正整數編成組：如果 $\overline{abcdef}$ 是某個符合題目條件的數，那麼可知：

$\overline{bcdefa},\overline{cdefab},\overline{defabc},\overline{efabcd},\overline{fabcde}$ 也都符合條件，於是把它們編在同一組內，這時某些數的前幾位有可能為 0，但是不難發現同一組的六數和一定等於 $111111\times(a+b+c+d+e+f)$，由此可見它們的總和一定是 17 的倍數。

問題編號 15102

已知二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$，$f(1)=2\times f(0)=3\times f(-1)$，

且 $(a+5):(b+5):(c+5)=2:3:4$，求此二次函數 $f(x)$ 的最小值為何？

【簡答】 10

【詳解】

$f(1)=2\cdot f(0)=3\cdot f(-1)\Rightarrow a+b+c=2c=3(a-b+c)$

$$\begin{cases}a+b=c\cdots(1)\\ a-2b=-c\cdots(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(1)-(2)\ 3b=2c\ \Rightarrow\ b:c=2:3\\ (1)+(2)\ 2a-b=0\ \Rightarrow\ a:b=1:2\end{cases}\qquad \begin{array}{ccccc}a&:&b&:&c\\ 1&:&2&&\\ &&2&:&3\\ \hline 1&:&2&:&3\end{array}$$

可設 $a=k,b=2k,c=3k$，$(a+5):(b+5):(c+5)=2:3:4$

$\Rightarrow(k+5):(2k+5):(3k+5)=2:3:4$

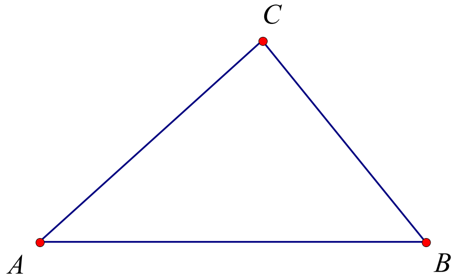
$\Rightarrow(k+5):(2k+5)=2:3\Rightarrow 4k+10=3k+15\Rightarrow k=5,a=5,b=10,c=15$

故答案為 $f(x)=ax^2+bx+c=5x^2+10x+15=5(x+1)^2+10$

$f(x)$ 的最小值為 10。

問題編號
15103

如下圖。$\triangle ABC$ 中，已知 $a<b<c$，試以尺規作圖，分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$、$\overline{AB}$ 三邊上各找一點 P、Q、R，使 $\triangle PQR$ 成為正三角形；並證明之。



【證明】

1. 作法：如右圖，

(1) 在 $\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 各找一點 X、Y；

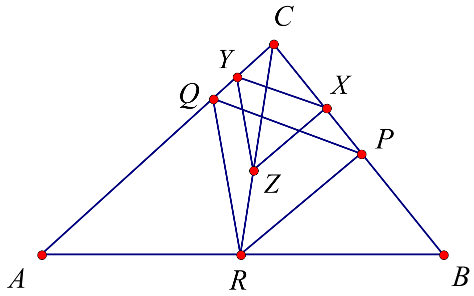
(2) 以 $\overline{XY}$ 為一邊向內作正三角形 XYZ；

(3) 作直線 CZ 交 $\overline{AB}$ 於點 R；

(4) 過 R 作 $\overline{RP}\,//\,\overline{ZX}$ 交 $\overline{BC}$ 於點 P；

(5) 過 R 作 $\overline{RQ}\,//\,\overline{ZY}$ 交 $\overline{CA}$ 於點 Q；

(6) $\triangle PQR$ 即為 $\triangle ABC$ 之內接正三角形。



2. 證明：

(1) $\because \overline{RP}\,//\,\overline{ZX}$，$\overline{RQ}\,//\,\overline{ZY}$，

$\therefore \overline{CX} : \overline{XP} = \overline{CZ} : \overline{ZR} = \overline{CY} : \overline{YQ}$，

而知 $\overline{XY}\,//\,\overline{PQ}$；

(2) $\because \overline{RP}\,//\,\overline{ZX}$ 且 $\overline{PQ}\,//\,\overline{XY}$，$\therefore \angle RPQ = \angle ZXY$；

(3) 同理，$\angle PQR = \angle XYZ$；$\angle PRQ = \angle XZY$；而知 $\triangle PQR \sim \triangle XYZ$；

(4) 由於 $\triangle XYZ$ 是正三角形，得證 $\triangle PQR$ 是正三角形。

問題編號
15104

任給 5 個相異正整數，試問從這 5 個數中是否一定能選出 3 個數，使得此 3 個數之和為 3 的倍數？若可以，請證明，若不行，請舉反例。

【簡答】 可以

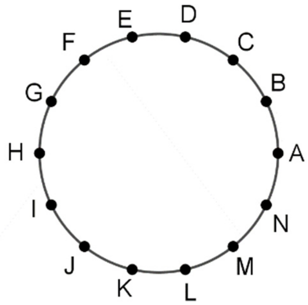
【詳解】

任意一個正整數被 3 除時，餘數只可能是 0，1，2

(1) 若此 5 數被 3 除時，有 3 種餘數，此時，把餘數分別為 0，1，2 的 3 數相加，其和即為 3 的倍數。
(2) 若此 5 數被 3 除時，至多有兩種餘數，由鴿籠原理知，至少有 3 個數的餘數相同，則將此 3 數相加，其和即為 3 的倍數。

問題編號
15105

14 個人圍成一個圓圈玩遊戲，遊戲的規則是：每個人心裡都想好一個數，並把自己想好的數如實地告訴他兩旁的兩個人，然後每個人將它兩旁的兩個人告訴他的數的平均報出來。若報出來的數如圖所示由 $A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N$ 分別為 $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14$，則報 5 的人心裡想的數是多少？



【簡答】 12

【詳解】

設報 5 的人心裡想的數是 x，則

報 7 的人心裡想的數應是 $2\times6-x=12-x$，

報 9 的人心裡想的數應是 $2\times8-(12-x)=4+x$，

報 11 的人心裡想的數應是 $2\times10-(4+x)=16-x$，

報 13 的人心裡想的數應是 $2\times12-(16-x)=8+x$，

報 1 的人心裡想的數應是 $2\times14-(8+x)=20-x$，

報 3 的人心裡想的數應是 $2\times2-(20-x)=-16+x$，

報 5 的人心裡想的數應是 $2\times4-(-16+x)=24-x$，

所以 $24-x=x$，故 $x=12$。

問題編號
15201

試證：數字「 $7\underbrace{11...1}_{(n-1)個}2\underbrace{88...8}_{(n-1)個}9$ 」必為完全平方數。

【證明】

假設 $n=1$ 時，1 和 8 皆出現 0 次，此時數字為 $729=27^2$

假設 $n=2$ 時，1 和 8 皆出現 1 次，此時數字為 $71289=267^2$

$$7\underbrace{11...1}_{(n-1)個}2\underbrace{88...8}_{(n-1)個}9=7\times10^{2n}+\frac{1}{9}(10^{2n}-10^{n+2})+2\times10^{n+1}+\frac{8}{9}(10^{n+1}-10)+9$$

$$=\frac{1}{9}(64\times10^{2n}-10^{n+2}+18\times10^{n+1}+8\times10^{n+1}+1)$$

$$=\frac{1}{9}(64\times10^{2n}+16\times10^{n+1}+1)$$

$$=(\frac{8\times10^n+1}{3})^2$$

$$=8\underbrace{00...0}_{(n-1)個}1\div3$$

$$=2\underbrace{66...6}_{(\mathrm{n}-1)個}7$$

問題編號
15202

2017 可寫成五個自然數的平方和，而這五個數的和為 97，且其中有一個數是 25，試寫出這五個自然數。

【簡答】 25, 26, 14, 14, 18 或 25, 10, 22, 22, 18

【詳解】

另外四個數的和為 72，可令四數為 $18+a, 18+b, 18+c, 18+d$，

其中 $a+b+c+d=0$

又由 $(18+a)^2+(18+b)^2+(18+c)^2+(18+d)^2+25^2=2017$

得 $a^2+b^2+c^2+d^2=96$

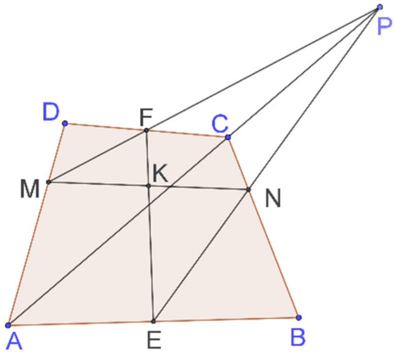
簡單檢驗可得四數可為 $8,-4,-4,0$ 或 $-8,4,4,0$

可得原來的五數為 25, 26, 14, 14, 18 或 25, 10, 22, 22, 18

問題編號
15203

如圖，在四邊形 $ABCD$ 中，E,F 分別是邊 $\overline{AB},\overline{CD}$ 的中點，P 為對角線 $\overline{AC}$ 延長線上的任意一點，$\overleftrightarrow{PF}$ 交 $\overline{AD}$ 於 M 點，$\overline{PE}$ 交 $\overline{BC}$ 於 N 點，$\overline{EF}$ 交 $\overline{MN}$ 於 K 點。

求證：K 點是 $\overline{MN}$ 的中點。



【證明】

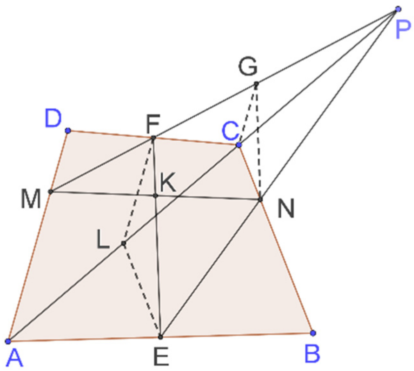
如圖，在 $\overline{PF}$ 上取點 G，使得 $\overline{GF}=\overline{FM}$，$\overline{CG}//\overline{DM}$，

又取 $\overline{CA}$ 的中點 L，連接 $\overline{GC},\overline{GN},\overline{LE},\overline{LF}$，

則 $\overline{LE},\overline{LF}$ 分別為 $\Delta ABC,\Delta ACD$ 的中位線，

有 $\overline{LF}//\overline{AD},\overline{LE}//\overline{CB}$，得 $\angle GCN=\angle FLE$，

$\dfrac{\overline{CG}}{\overline{LF}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{PL}}=\dfrac{\overline{CN}}{\overline{LE}}$。



故 $\Delta CNG \sim \Delta LEF, \overline{NG} // \overline{EF}$ 。

於是，$\overline{FK}$ 是 ΔMNG 的中位線。所以，K 點是 $\overline{MN}$ 的中點。

問題編號
15204

在一個 3×3 的方格表中填有 1~9 這 9 個數字。現將每行中數字最大的那個方格塗紅色，數字最小的那個方格塗綠色。設 M 為三個紅色方格中數字最小的那個數，m 是三個綠色方格中數字最大的那個數。則 $M-m$ 可以有多少個不同的值？

【簡答】 8

【詳解】

由條件可知，m, M 的值為 3~7 中的正整數(含 3 和 7)。
顯然，$m \neq M$ ，所以，$M-m$ 的值為 $1,2,3,4,-1,-2,-3,-4$ 。
故 $M-m$ 可以有 8 種不同的值。
如下:

9	8	7
6	5	4
3	2	1

$M-m$=4

9	8	6
7	5	4
3	2	1

$M-m$=3

9	8	5
7	6	4
3	2	1

$M-m$=2

9	8	5
7	6	3
4	2	1

$M-m$=1

9	6	3
8	5	2
7	4	1

$M-m$=－4

9	7	3
8	5	2
6	4	1

$M-m$=－3

9	7	3
8	6	2
5	4	1

$M-m$=－2

9	7	4
8	6	2
5	3	1

$M-m$=－1

問題編號
15205

小建算出了所有不大於 2019 的連續七個正整數的總和，小中算出了所有不大於 2019 的連續八個正整數的總和，在兩人算出的這麼多個總和當中，有 n 個總和是相同的，試求 n 的值。

【簡答】 251

【詳解】

設小建算出的連續七個正整數的總和

$=a+a+1+a+2+a+3+a+4+a+5+a+6=7a+21$，

設小中算出的連續八個正整數的總和

$=b+b+1+b+2+b+3+b+4+b+5+b+6+b+7=8b+28$，

因 $7a+21=8b+28$，$7a=8b+7$，$a=\dfrac{8b+7}{7}=b+1+\dfrac{b}{7}$，

取 $b=7$ 與 $a=9$ 為特殊項，

則一般項 $\begin{cases} a=9+8k \\ b=7+7k \end{cases}$，其中 k 為整數。

又 $\begin{cases} a\geq 1 \\ a+6\leq 2019 \\ b\geq 1 \\ b+7\leq 2019 \end{cases}$，則 $\begin{cases} 1\leq a\leq 2013 \\ 1\leq b\leq 2012 \end{cases}$，則 $\begin{cases} 1\leq 9+8k\leq 2013 \\ 1\leq 7+7k\leq 2012 \end{cases}$，則 $\begin{cases} -8\leq 8k\leq 2004 \\ -6\leq 7k\leq 2005 \end{cases}$，

則 $\begin{cases} -1\leq k\leq 250 \\ 0\leq k\leq 286 \end{cases}$，

則 $0\leq k\leq 250$，則 $k=0,1,2,\cdots,250$，共 251 個解。