從一個趣味問題談等價類與高中數學相關的概念

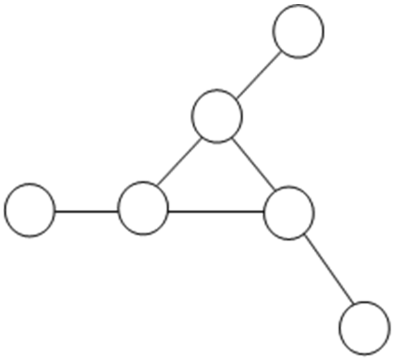
陳昱成

高中退休數學教師

壹、前言:

本文是因為一題 Line 群組上的數學趣味問題而引發的，因為整個過程中，跟學生的數學學習過程，有不少雷同之處。當解題者發現一組解答時，會充滿喜悅的想向別人分享，但也常忽略所提供的答案是否為唯一。如果不是唯一時，又該如何確認已經全部發現了？而當答案的表示相對繁瑣時，找到一個簡明的替代方案應該是可以考慮的，但要注意到哪些？化繁為簡本來就是數學的強項，藉由這個解題過程，提供實際的例子，希望讀者能理解，看似抽象的表徵下，會有實際的事物與之對應，能領略到這點，學習面對的不會只是數字或公式而已。當然若面對數學問題，都能像解趣味數學一樣自動自發，就更令人喜悅了！

問題:



請將 1,2,3,4,5,6 分別(不可重複)填入○內，使得三條由 3 個○構成的直線總和都相等。基本上這樣的題目，只要會加法就可以嘗試，讀者可以試著挑戰，作者是在 Line 群組上看到這題，就順勢傳到別的群組，很快就有一位朋友回傳答案如下圖。

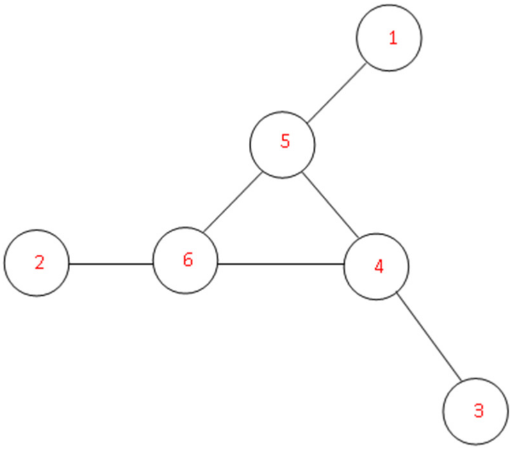


圖 1：一個解

三個直線加起來皆為 12，數字都沒重複，符合解題要求，恭喜!答案正確!

貳、 等價類(equivalence class)

當找到一個答案後，在數學解題上會問是否是唯一?如果不是，其他的解又是哪些？將圖 1 以中心為旋轉點，順時針旋轉 120^0 與 240^0，得到圖 2 與圖 3，如果順時針旋轉 360^0，又會回到圖 1。

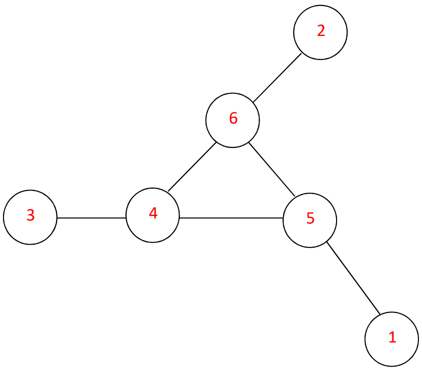


圖 2：圖 1 旋轉 120^0

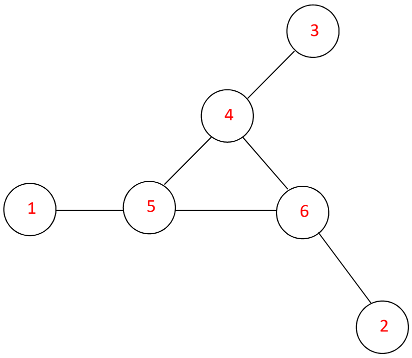


圖 3：圖 1 旋轉 240^0

也就是說圖 1、2、3 可以藉由旋轉讓其圖形完全重合，我們可以將其視為同一類，在數學的觀點來看，在旋轉的運作下，圖 1、2、3，三圖是在同一個等價類(equivalence class)，簡單的講，視為同一解，選其中的一個來表示即可，其他另兩個，旋轉後即可得。

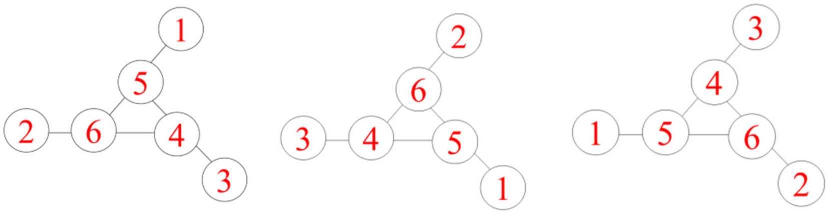


圖 4：三圖視為同一解

我們以圖 5 來表示圖 4 中三個圖形的等價類。

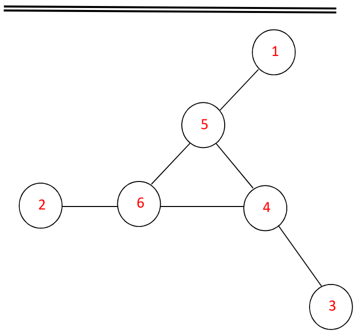


圖 5：圖 4 三圖的等價類表示

在高中排列組合的討論上，有一種**環狀排列**，就是等價類的概念。只考慮事物的相對位置，而不討論個別物件的實際位置，可旋轉但不可翻轉。將圖 6 第一個圖順時針旋轉轉 120^0 得到第二個圖，再轉 120^0 度得第三個圖，再轉 120^0 度又回到本身，環狀排列將圖 6 的三個圖，視為一種。事實上，經由旋轉可以一樣，就視為同一種答案，即為等價類的意義，所以在討論環狀排列，基本上已經應用等價類的概念了。

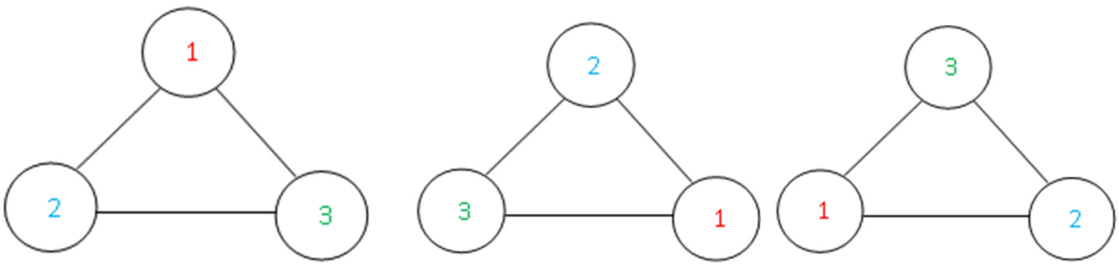


圖 6：環狀排列

當然，在高中數學裏，等價類的應用不僅只有環狀排列。例如證明 $\sqrt{3}$ 為無理數中，常利用反證法假設 $\sqrt{3}$ 為有理數，則可設成 $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$,其中 $(p,q)=1$，平方得 $3=\frac{p^2}{q^2}\Rightarrow 3q^2=p^2\Rightarrow 3|p^2$，接著會推論 $3|p$，再推論出 q 亦是 3 的倍數，如此 $(p,q)\neq 1$，與原假設 $(p,q)=1$ 矛盾，故得證 $\sqrt{3}$ 為無理數。

這其中的關鍵是證明命題: $3|p^2\Rightarrow 3|p$ 為真。我們將整數，利用任兩數相減是 3 的倍數關係，亦即同餘(Congruence modulo)的概念，二數除以 3 得相同餘數者，是在同一等價類。可以將整數分成三個相異的等價類:

[0]= [3]= [6]={…,-3,0,3,6,9,12,…}
[1]= [4]= [7]={…,-2,1,4,7,10,13,…}
[2]= [5]= [8]={…,-1,2,5,8,11,14,…}

任意整數必定屬於其中一個等價類，且任兩個等價類的交集必為空集合。而整數 Z=[0]U[1]U[2]，即{[0],[1],[2]}是整數 Z 的一組分割(partition)。

於是要證明命題: $3|p^2\Rightarrow 3|p$，等價類的概念便用上了。假設 p 不是 3 的倍數，因為整數被分成此 3 個相異的等價類，$p\in[1]$ or $p\in[2]$，故 p 可設成 $3k\pm 1, k\in Z$，則 $p^2=9k^2\pm 6k+1$，不是 3 的倍數。上述過程，證明了「若 p 不是 3 的倍數，則 p^2 不是 3 的倍數」為真，則等價命題「若 p^2 是 3 的倍數，則 p 是 3 的倍數」亦為真。

顯然，整數有無限多個，但透過等價類，整數就被分成三個相異的類，其中不是 3 的倍數，僅需討論其中的「兩個」，充分顯示出由繁化減的功效來。

參、不同等價類的兩個解

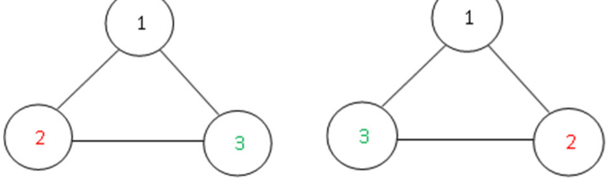


圖 7：水平翻轉

圖 7 的兩個圖，無論如何旋轉都不會讓兩個圖重合，但如果允許翻轉，則兩個圖就是一樣的，但考慮圖 8 將圖翻轉(水平翻轉)後不會得到與原本同樣的樣式，因此在考慮解答時，我們僅考慮旋轉，即環狀排列。

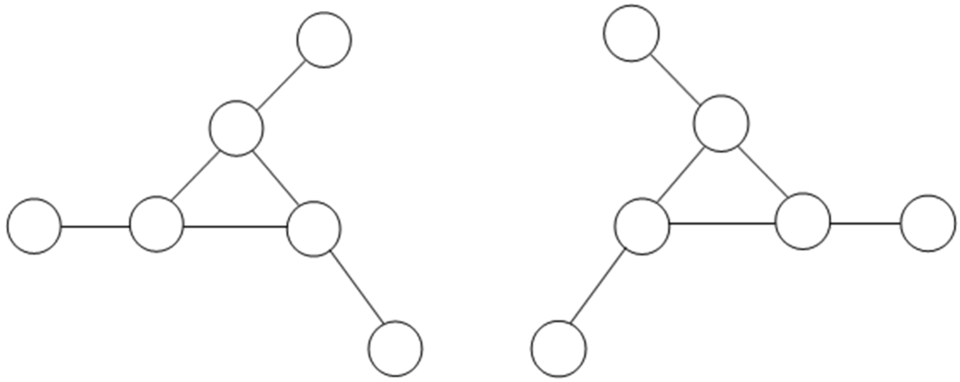


圖 8：翻轉後不同的圖樣

當清楚說明考慮環狀排列後，圖 1 正三形上的 4，5，6 僅剩下順時針順序是 456 的情形(當然亦可表示成 564，645)，我們以[456]來表這一等價類，而且[456]= [564]= [645]，所以擇一表示即可。內圈確定後，1，2，3 的位置在外圍三個圈任意放，共有 6 種不同的放法，但又要三線總和相同，恰有一種，如圖 9，這裡就不再描述另兩個同價的旋轉圖解了。

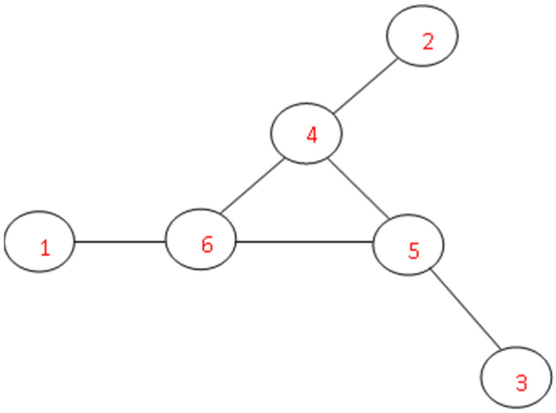
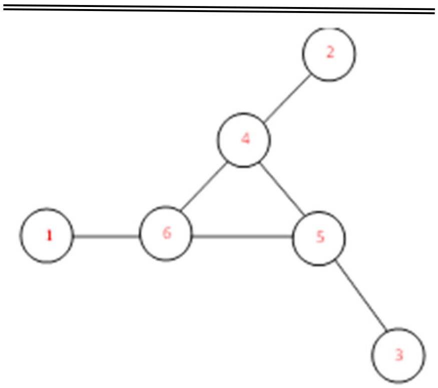


圖 9：另一組解

到目前為止，已經發現兩組解了。還有沒有其他解？



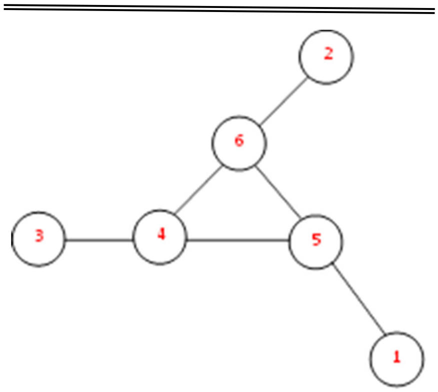


圖 10：已知的兩組解

肆、從已知解來探討解的特性

現已知的兩個解，共同特性都是內圈為 456 三數，外圍是 123 三數，內外圈 3 數由小到大差距皆為 1(i.e.等差數列)，因為題目要求要三線總和相同，這樣的分布才有機會讓三線總和相同，至於為什麼內外圈一定要公差相等的等差數列，說明如下:

假設內圈三數由小至大分別為 A1，A2，A3，而外圈三數由小到大分別為 B1，B2，B3，在不失一般性下，三線總和相同要相等，必須要圖 11 的配置才可能。因為內圈三數任兩數相加以 A1+A2 最小，必定要配上 B3，而 A3+A2 最大，搭配 B1，而 A1+A3 居中，則需與 B2 來組合，才可能三線總和一樣。

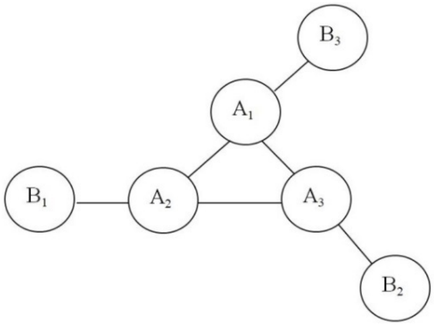


圖 11：三線總和相同

接著假設 A_1，A_2，A_3，兩間隔的差距分別為 d_1 與 d_2，即 $A_2= A_1+d_1$，$A_3= A_2+ d_2$，則 $A_1+A_3= A_1+A_2+d_2$，而 $A_2+A_3= A_1+A_2+ d_1+d_2$，為了讓 $A_1+A_2+ B_3= A_1+A_3+ B_2 =A_2+A_3+ B_1$，外圈數列也必須滿足 B_1，B_2，B_3，兩間隔的差距分別為 d_1 與 d_2，(i.e. $B_2= B_1+d_1$，$B_3= B_2+ d_2$)。

接著說明 d_1 必須與 d_2 相等，否則三線總和不可能相等。假設 $d_1=1$，$d_2=2$，則 A_1，A_2，A_3 可能為 1,2,4，或是 2,3,5，3,4,6，對應的 B_1，B_2，B_3 分別為 3,5,6，1,4,6，與 1,2,5，兩間隔差距均非 $d_1=1$，$d_2=2$，因此不成立，而當 $d_1=2$，$d_2=1$ 時，一樣不成立。

同理，$d_1=1$，$d_2=3$；$d_1=1$，$d_2=4$；$d_1=2$，$d_2=3$；$d_1=3$，$d_2=1$；$d_1=4$，$d_2=1$；$d_1=3$，$d_2=2$，都無法讓三線總和相等。於是可以確認，必定是內外圈為等差數列，三線總和相等的情況才可能出現。

因此考慮將 123 放內圍，而 456 在外，也符合內外圈皆為等差的要求，而為了總和一樣，12 這線要和 6 連，23 則搭配 4，可以得到圖 12 的解，為[132]所對應的解。

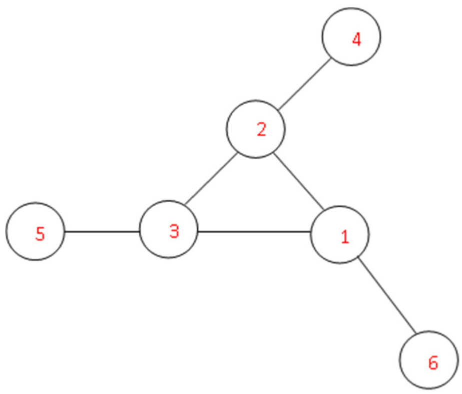


圖 12：內圈[132]所對應的解

再比照圖 1 跟圖 9 的關係，很快可以得到另一個解，圖 13 為[123]所對應的圖解。

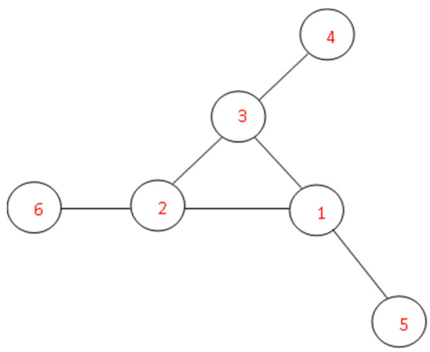


圖 13：內圈[123]所對應的解

伍、 更簡潔的新表示法

到目前為止，共找到四個解，分別為圖 10、圖 12、圖 13。用圖表示，一目了然，但佔空間。因此會思考有否較簡潔的表示法，而此種表示法必須不會造成模糊不清，即所謂好的定義(well-defined)。首先，這四個答案，分成兩類，一是內圈為 123，另一為內圈 456，因為全部數字只有 123456，內圈選定後，外圈自然被確定，所以只要強調內圈是哪三個數字即可。以圖 1 為例，選內圈 456，外圈自然就是 123。又因為 456 的環狀排列有 2 種，我們定義[456]為順時針 4 然後 5 接著是 6，所以圖 1 的內圈用[465]表示。當[465]表示內圈，雖然在三線總和相同的條件下，圖 5 的等價類是唯一符合的對應答案，但由於外圍 123 的排列共有六種，需要一些時間去驗證，才能確定唯一對應到圖 5，因此[465]來表示答案，雖符合明確與簡潔的要求，但卻不容易和圖解直接對應出來。

因為題目要求三線相同，將此條件引入，以數對([465]，12)來表示圖 5，前項表示內圈順時針 465，後面的 12 表示各線之和，如此就很容易將([456]，12)與圖 5 對應在一起，清楚也不會混淆，基本上就是我們熟悉的函數對應，如圖 14 所示。

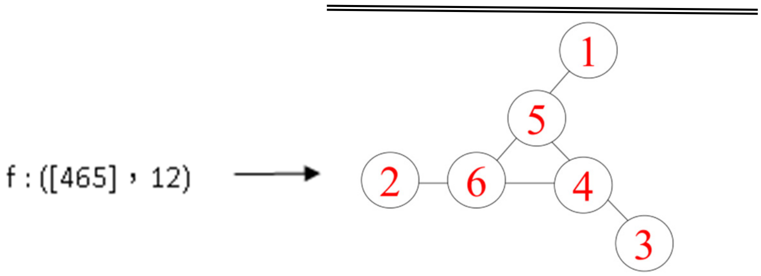


圖 14：數對與圖解的對應

於是現有的四個解以新的表示法，分別為([465],12)，([456],12)，([132],9)，([123],9)分別對應到圖 5、圖 9 與圖 12 與圖 13，簡潔多了吧！

陸、 解答都找完了嗎？

根據上面的分析，要內外圈皆為等差的形式，三線總和才有相等的可能。於是內圈 135，外圈 246，可以嘗試，很快發現([135],10)是一解，當然([153],10)也是一解。再將內外圈互換，可發現([246],9)，([264],9)兩個解。

目前為止，共發現八組解: ([465],12)，([456],12)，([132],9)，([123],9)，([135],10)，([153],10)，([246],9)，([264],9)。還有沒有其他解？

如果答案就這八組，在數學上要證明其他的組合不會是解答，本題才算完成，否則

就要繼續找其他的解。內圈需要 3 個數，總共有 6 數，不管排列，總共會有 C_3^6=20 種組合，這種組合是不管前後順序，把 123 跟 132 的組合視為同一種，但([132],9)，([123],9)我們視為不同解，因為每一種組合都會有此情況，所以內圈必須考慮有 20*2=40 種情況。

柒、簡化討論的數目

先不急著確定這 40 組，觀察已知的八組解，發現如果有([465],12)，就會有([456],12)，([132],9)伴隨著([123],9)出現，因此不必管 123 會有兩種不同類型的呈現，只要利用其中一種來檢查，若無解，另一型態也不會有解，若有解，則相對的另一解也會出現。於是只要討論 20 組的內圈組合即可。

再觀察([465],12)，([456],12)，([132],9)，([123],9)這四組解，當內圈有 465 的解，就會對應到內圈有 123 的解，集合{1,2,3}是{4,5,6}的補集(complementary set)，利用此互補性，內圈 20 組的組合基本上只要討論 10 組即可。

也就是說[(123),(456)]，[(124),(356)]，[(125),(346)]，[(126),(345)]，[(134),(256)]，[(135)，(246)]，[(136),(245)]，[(145),(236)]，[(146),(235)]，[(156),(234)]共有 10 組[　]，每個[　]有 2 個組合，而我們只要討論每個[　]中的任一個即可，再根據前面所述解的特性來檢驗，確定了:

([465],12)，([456],12)，([132],9)，([123],9)，([135],10)，([153],10)，([246],9)，([264],9)就是全部的解了。

捌、結語

本文一開始並沒有有強調如何發現第一個解答，每個人會有不同的思考方向，也許是在嘗試錯誤下，發現曙光接著找出第一個解答，這類題目最基本的需求只要會加法即可，每個人都可以試，可藉由不同的途徑而得到相同的答案，這也是數學解題迷人之處。

會著手寫下此文，是發現解出答案者，都很高興地傳回答案，但幾乎都是回傳一個解。互相比較後，才發現原來答案不止一組，其中有一人，將回傳的答案整理一下，寫道:「目前為止共有這些答案，不知還有沒有其他的答案？」後面就沒有下文了，大家都找不到其他解，但又不敢斷言沒有其他解，趣味問題引發的討論，就此停了一段時間，最後有出來回應跟他們做一簡單的說明。

這個過程，有教學經驗的讀者應該不陌生，常有數學題目，解答不只一個，就會有學生只寫出其中一個解，然後來詢問，要不要給分，如何給分，這種評量上的問題屢見不鮮。就單純的教學觀點，無論是 Line 上的群組，或者是學生的解題，求出一個答案來，固然

高興，但接著都要問還有沒有其他的可能，是不是唯一的(unique)，是否為「唯一」在數學上是很重要的概念。如果無法確認或證明，解題尚未圓滿，既使最後費了洪荒之力，發現了許多解，都還要回過頭來證明，在現有的情境要求下，解答的確到此為止了。

如果都找不到解，可能是能力不及或思考不周，以至於無法發現解答，但也可能題目本身就是無解，那麼我們就必須證明，在現有的條件要求下，這個題目是無解的，才算功德圓滿。

本文中，把所有的可能的組合通通列出來，一個一個檢查，最終證明這八個解，就是所有的解，這種方法在數學上稱為**窮舉法**(proof by exhaustion)。直觀、簡單，但最好是可能解不太多，讓一個個列出，不是大工程的情境，譬如本文的 20 組。但當可能性是無窮的時候，一個個列出，是不可能的事，這時等價類的觀念便可派上用場，譬如要證明某重要性質對所有整數都成立時，可將整數分成偶數跟奇數兩類，分別加以檢驗，如果不管奇數或偶數對該性質皆成立，則對所有的整數皆成立。當然數學證明的方法，有很多種，窮舉法只是其中之一。

面對可能要舉出多不勝數的例子，數學當然有應對的法。等價類便是用來化繁為簡的工具之一，本文利用等價類來表示旋轉下相同的解，便是很好的例子，整數分成偶數、奇數兩大類，更是大眾熟悉的方式。基本上，等價類將多轉化成少，讓我們能集中在討論少數的可能方案上，而不必要浪費多餘的精力於重複的同質性的事物上。而將原本的圖解，對應到數對，也是常用的簡化方式，只是要注意到，當引進新的表示法或定義時，必須確認是不是一個好的定義(well-defined)，也就是本文的數對解與圖解之間的對應，會不會造成混淆，如果不明確，就不會是一個好的表示法了。

圖形很直觀，容易讓人一看就懂，簡化成數對是抽象化的過程，雖然犧牲了直觀的優點，但從數對中卻容易觀察出內圈的 3 個數字都是等差數列，暗示解的特性，這又是圖形較難體會出來的。數學常在將問題抽象化後，可以推廣到更大的範疇上，應用到更多的領域，讓人讚嘆其威力，但也因為少了類似圖形的直觀，讓人卻步，對數學產生敬畏之心。而就個人的教學經驗，學生是畏多於敬!本文主要的目的，即是利用淺顯易懂的題目，闡述一些常見的數學概念，讓學生體會抽象的背後有「實體」的東西與之呼應，而非完全與生活無關的冷冷數字跟公式，希冀能稍微減少學生對數學的畏懼之心!

玖、 參考文獻:

胡守仁譯(2006):**數學家怎麼思考的**。第一版。台北市:天下遠見。

方世榮譯(1988):**線性代數原理及題解**。第二版。台北市:曉園出版社。