中學生通訊解題第 153-154 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
15301

設 p 是大於 2 的質數，數列 $< a_n >$ 滿足 $na_{n+1}=(n+1)a_n-\left(\frac{p}{2}\right)^4$。

求證：當 $a_1=5$ 時，a_{81} 是 16 的倍數。

【證明】

由條件得 $\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}-\frac{p^4}{16}\cdot\frac{1}{n(n+1)}$。則有(⋯⋯缺漏)，

即 $a_n=na_1-\frac{1}{16}(n-1)p^4$。

當 $a_1=5$ 時，$a_{81}=81\times5-5p^4=5(81-p^4)$。

因此，只須證 p^4-81 是 16 的倍數。

因為 $p^4-81=(p^2+9)(p-3)(p+3)$，而 p 是大於 2 的質數，

所以 p^2+9，$p-3$，$p+3$ 都是偶數，且 p 用 4 除，得餘數為 1 或 3，

即 $p=4k+1$ 或 $p=4k+3$。

當 $p=4k+1$ 時，$4\,|\,(P+3)$；

當 $p=4k+3$ 時，$4\,|\,(p-3)$。

因此 $16\,|\,(p^4-81)$。故 $16\,|\,a_{81}$。

問題編號
15302

四個正整數構成一個遞增的數列，其中前三項為等差數列，後三項為等比數列，若該數列的末項與首項的差為 42，求此四個正整數的和。

【簡答】 126

【詳解】

設數列的項為 $a, a+d, a+2d, a+42$，其中 a、d 為正整數，

則 $(a+d)(a+42)=(a+2d)^2$，得 $3a(14-d)=2d(21-2d)$，

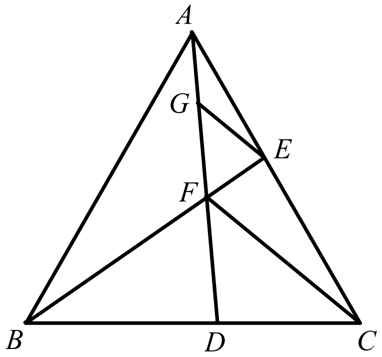
因此 $(14-d)(21-2d)>0$，得 $\frac{21}{2}<d<14$，

因此 $d=11, a=\frac{22}{9}$(不合)， $d=12, a=12$， $d=13, a=\frac{130}{3}$(不合)，

所以此數列為 $12, 24, 36, 54$，所求為 126。

問題編號
15303

已知 ΔABC 為正三角形，D、E 分別是 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$ 上一點，滿足 $\overline{CD}=\overline{AE}$，設 $\overline{BE}$ 與 $\overline{AD}$ 交於點 F，G 是 $\overline{AF}$ 上一點，滿足 $\overline{AG}=\overline{EF}$，證明 $\overline{GE}//\overline{CF}$。



【證明】

因為 $\overline{CD}=\overline{AE}$ 、 $\overline{AC}=\overline{AB}$ 、 $\angle ACD=\angle BAE$，所以 $\Delta ACD \cong \Delta BAE$，

得 $\angle AEB=\angle ADC$，所以 $\Delta AFE \sim \Delta ACD$，得 $\Delta AFE \sim \Delta BAE$。

因為 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}$，又 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 、 $\overline{EF}=\overline{AG}$，所以 $\frac{\overline{AF}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AG}}{\overline{AE}}$，

得 $\Delta AGE \sim \Delta AFC$，所以 $\overline{GE}//\overline{CF}$。

問題編號
15304

有美國人、英國人與法國人各四人，合計共 12 人，現在玩遊戲需要每兩個人配對成一組，共配對成六組，但同一國籍的人不能在同一個組裏，且此六組不管排列順序，則共有多少種配對方法？

【簡答】 1728

【詳解】

令美國籍為 A，英國籍為 E，法國籍為 F，由於同國籍者不能在同一組，

所以分組的方式為：$(A,B),(A,B),(A,C),(A,C),(B,C),(B,C)$ 這樣六組分法。

其中 $(A,B),(A,B)$ 的分法為 $(4\times4)\times(3\times3)\div2=72$ (種)

同理 $(A,C),(A,C)$ 的分法為 $(2\times4)\times(1\times3)\div2=12$ (種)

而且 $(B,C),(B,C)$ 的分法為 $(2\times2)\times(1\times1)\div2=2$ (種)

故共有 $72\times12\times2$ =1728(種)

問題編號
15305

設 a 與 b 是兩個相異實數，$a<b$，若函數 $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+\frac{49}{4}$ 在 $a\le x\le b$ 範圍內的最小值為 $2a$，最大值為 $2b$，求 a、b 之值。

【簡答】 $a=3,b=5$ 或 $a=-4-\sqrt{65},b=\frac{49}{8}$

【詳解】

(1) 若 $0\le a<b$，則最大值為 $f(a)$，最小值為 $f(b)$，

得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{49}{4}=2b\\ -\dfrac{1}{4}b^2+\dfrac{49}{4}=2a\end{cases}$，兩式相減得 $a+b=8$，令 $a=8-b$ 代入解得 $\begin{cases}a=3\\ b=5\end{cases}$。

(2) 若 $a<0<b$，則最大值為 $f(0)=2b$，得 $b=\dfrac{49}{8}$。

因為 $f(b)=f(\dfrac{49}{8})>0$，所以 $f(b)$ 不是最小值，得 $f(a)=2a$，

由 $-\dfrac{1}{4}a^2+\dfrac{49}{4}=2a$ 解得 $a=-4\pm\sqrt{65}$ (正不合)，所以 $a=-4-\sqrt{65},b=\dfrac{49}{8}$

(3) 若 $a<b\le 0$，則最大值為 $f(b)$，最小值為 $f(a)$，

得 $f(b)=2b$，$f(a)=2a$，又方程式 $-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{49}{4}=2x$ 兩根異號，不合。

由(1)(2)(3)知 $a=3,b=5$ 或 $a=-4-\sqrt{65},b=\dfrac{49}{8}$。

問題編號 15401

建仔心裡想著一個小於 2019 的正整數，他將此數除以 13，並將所得的餘數再乘以 9，得到第一個數；又將心裡想著的此數除以 7，並將所得的餘數再乘以 10，得到第二個數。建仔只告訴我們，這兩個數的和是 91，則建仔心裡想著的數有幾種可能？

【簡答】 22

【詳解】

假設建仔心裡想的數是 x，x 除以 13 的餘數是 r_{13}，x 除以 7 的餘數是 r_7

則 $r_{13}*9+r_7*10=91$

這裡 $0\le r_{13}\le 12$，$0\le r_7\le 6$ 而且 r_{13},r_7 都是整數

觀察 r_7*10 的個位數一定是 0，所以 r_{13}*9 的個位數是 1

於是 r_{13} 只能是 9，推得 $r_7 = 1$，所以 x 除以 13 餘 9，x 除以 7 餘 1

除以 13 餘 9 的正整數由小到大分別是：

9, $\boxed{22}$, 35, 48, 61, 74, 87, 100, $\boxed{113}$, 126, 139, …

除以 7 餘 1 的正整數由小到大分別是：

1, 8, 15, $\boxed{22}$, 29, 36, 43, 50, 57, 64, 71, 78, 85, 92, 99, 106, $\boxed{113}$, 120, …

$\Rightarrow$ x 的最小可能值= 22，而且下一個可能值= 113= 22+ 91，

再下一個是 22+91+91，…(91 是 13 與 7 的最小公倍數)

因為 $x < 2019$，

$\Rightarrow$ x 的最大可能 = 1933= 22 + 91*21

$\Rightarrow$ x 的所有可能值 = 22, 22+91*1, 22+91*2, 22+91*3, …, 22+91*21，

共 22 個。

問題編號 15402

設 x, y 為兩實數且滿足 $\sqrt{x+3}+\sqrt{y-7}=6$，若 $2x+y$ 的最大值為 M，最小值為 m，求數對 (M, m)。

【簡答】 $(73, 25)$

【詳解】

令 $x+3=A^2, y-7=B^2$，則 $A+B=6$ 且 A, B 皆為非負實數

$$2x+y=2(A^2-3)+(B^2+7)=2A^2+B^2+1$$

$$=2A^2+(6-A)^2+1=3A^2-12A+37=3(A-2)^2+25$$

當 $A=2$ 時 $2x+y$ 有最小值 25，此時 $x=1, y=23$

當 $A=6$ 時 $2x+y$ 有最大值 73，此時 $x=33, y=7$

問題編號
15403

已知圓內接四邊形 $ABCD$ 的對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 相交於 M ，證明： $\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{BC}\cdot\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{CM}}$ 。

【證明】

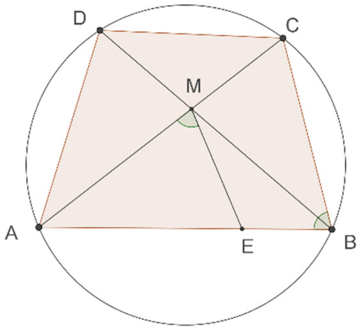
作 ME 交 AB 於 E ，使 $\angle AME=\angle ABC$ ，則 $\triangle ABC \sim \triangle AME$ ，

從而 $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AM}{ME}\cdots(1)$ ，

連接 CE ，由 $\angle AME=\angle ABC$ 知 $BCME$ 四點共圓，

從而 $\angle ACE=\angle ABD=\angle ACD$ 。

又 $\angle ADC=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-\angle AME=\angle CME$，所以 $\triangle ADC \sim \triangle EMC$，於是 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{EM}{CM}\cdots(2)$，將(1)(2)兩式相乘即得證。



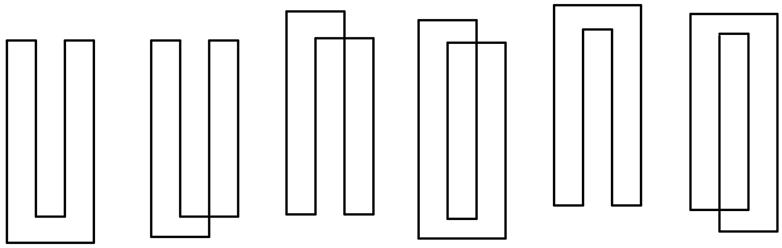
問題編號
15404

一個人把四根繩子緊握在手中，僅在兩端露出它們的頭和尾，然後隨機地把一端的四個頭中的某兩個相接，另兩個相接，把另一端的四個尾中的某兩個相接，另兩個相接。則放開手後，四根繩恰好連成一個圈的機率為何？

【簡答】 $\dfrac{2}{3}$

【詳解】

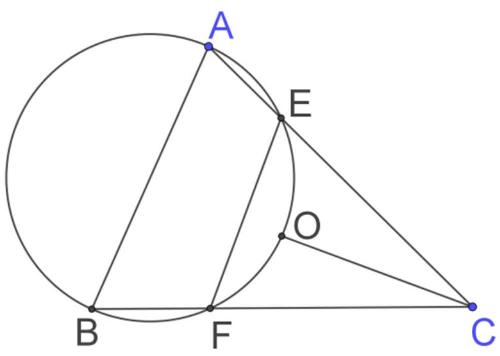
符合題意的接法共有 9 種，而能連接成一個圈的如下圖 6 種方法。故四根繩子恰好連成一個圈的機率是 $\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}$ 。



問題編號
15405

已知點 O 是銳角 ΔABC 的外心，過 A,B,O 三點的圓交 $\overline{AC},\overline{BC}$ 於點 E,F ，且 $\overline{EF}=\overline{OC}$ 。

求證： $\overline{OC}\perp\overline{EF}$ ，且 $\angle ACB=45°$ 。



【證明】

連接 $\overline{EO},\overline{FO}$ 並分別延長交 $\overline{BC},\overline{AC}$ 於 M,N 點，連接 $\overline{BO}$，

因為點 O 是 ΔABC 的外心，所以 $\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC$。

因為 A,B,O,E 四點共圓，故 $\angle BOM=\angle A$，

所以 $\angle BOM=\dfrac{1}{2}\angle BOC$，故 $\angle BOM=\angle COM$。

因為 $\overline{OB}=\overline{OC}$，所以 $\overline{OM}\perp\overline{BC}$，即 $\overline{EM}\perp\overline{BC}$。

同理，$\overline{FN}\perp\overline{AC}$。

故點 O 是 ΔCEF 的垂心，所以，$\overline{OC}\perp\overline{EF}$。

因為 A,B,F,E 四點共圓，故 $\angle A=\angle EFM$，所以 $\angle EFM=\angle COM$。

因為 $\angle EMF=\angle CMO=90°$，$\overline{EF}=\overline{CO}$，所以 $\Delta EFM\cong\Delta COM$。

所以，$\overline{EM}=\overline{CM}$。

故 $\angle ECM=45°$。