

正五邊形的藝術饗宴

李祐宗

澎湖縣立文光國民中學

正多邊形向來是學習幾何的基本素材。筆者教學至今，發現生活中有許多正五邊形的元素，以及其涵蓋許多的奧秘，由正五邊形延伸出的立體幾何甚至也可應用在燈具上。現在就讓我們來探索吧！

正五邊形內角和為 540° ，每個內角為 108° 。對角線一共 5 條，此五條對角線構成的圖形就是五芒星。由於五芒星的奇點數為 0，故為一筆畫圖形。現在我們利用 5 條扣條組成一五芒星(圖 5)，我們發現可以在不拆解扣條的情況下將之調整為正五邊形(圖 5→圖 1，紅色箭頭方向)。反之，也可從正五邊形的狀態在不拆解扣條的情況下變回五芒星(圖 1→圖 5，藍色箭頭方向)。此小小魔數每回筆者在班級實施時皆引來學生的好奇心，隨後讓學生自行操作，操作成功的同學每每高興不已。

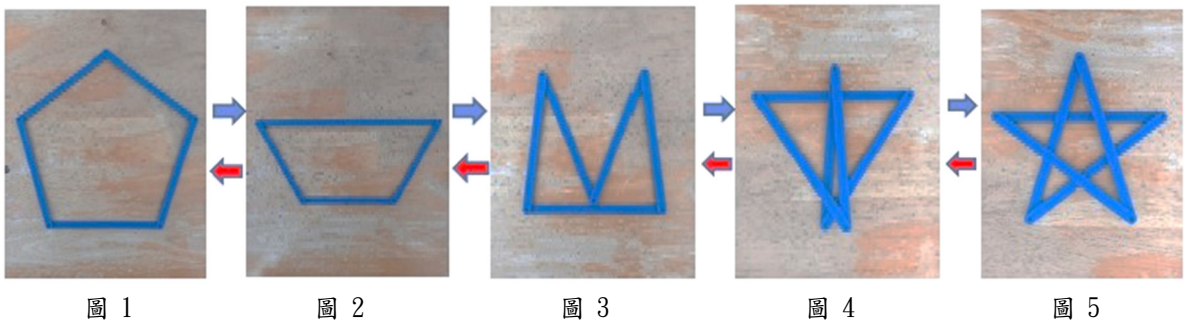


圖 1

圖 2

圖 3

圖 4

圖 5

教學現場常見將長條矩形的紙張打一個結便能夠出現正五邊形(圖 6、圖 11)。廟宇在日本稱為神社，在台灣廟宇是開放民眾入內參拜的，但日本的神社是不開放的。摺紙在日本是相當風行、普遍的活動。舉凡神社內外、商店內、飯店大廳等，時常可見摺紙藝術(圖 8、圖 9)。在日本神社外，經常可見到用白色紙張在繩索上打個結成正五邊形(圖 6)，用意在於祈福。除了打結之外，亦有其他方式的剪紙、摺紙等祈福飾品(此部分亦為很好的幾何教材)。

為何一條等寬的長方形紙打一個單結就是正五邊形呢?在圖 7 中，兩三角形 $\triangle ALB$ 與 $\triangle CKB$ ， $\overline{AL} = \overline{CK}$ 、 $\angle ALB = \angle CKB$ 、 $\angle ABL = \angle CBK$ ，因此 $\triangle ALB \cong \triangle CKB \rightarrow \overline{AB} = \overline{BC}$ 。同理可證得 $\overline{CD} = \overline{DE} = \overline{AE} = \overline{AB} = \overline{BC}$ 。

接著，由於 $\triangle BCA$ 、 $\triangle CDB$ 、 $\triangle DEC$ 、 $\triangle EAD$ 及 $\triangle ABE$ 皆為等腰三角形，故這五個三角形的兩底角相等(如圖中相同記號者為相同角度， $\angle ABE = \angle AEB$ 、 $\angle CBD = \angle CDB$ 、...等)。另外四邊形 $ABHE$ 、四邊形 $AGDE$ 、四邊形 $FCDE$ 、四邊形 $BCDJ$ 及四邊形 $ABCI$ 皆為平行四邊形，故圖中的每個標示記號的角度相等($\angle AEB = \angle EBH$ 、 $\angle FEC = \angle ECD$ 、 $\angle CED = \angle FCE$...等) $\rightarrow \angle BAE = \angle CBA = \angle DCB = \angle EDC = \angle AED$ ，因此可得證 $ABCDE$ 為正五邊形。



圖 6：日本神社外的祈福摺紙

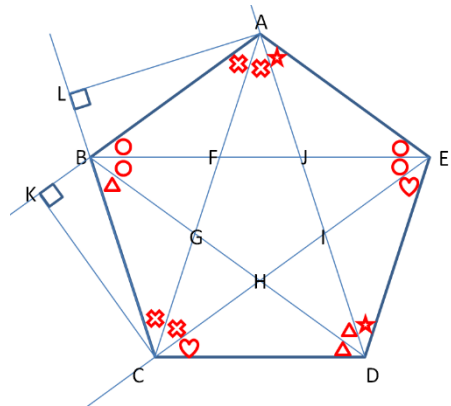


圖 7：長方形紙打結成正五邊形示意圖

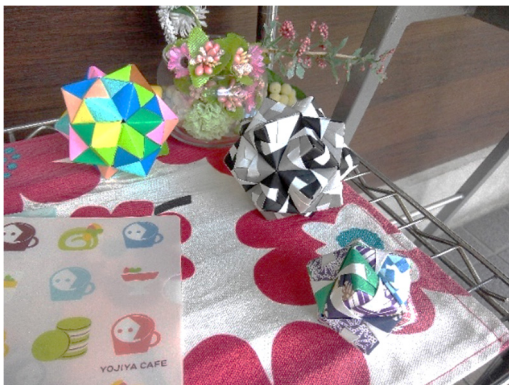


圖 8



圖 9

正十二面體即是由十二個正五邊形組成的五種柏拉圖多面體之一，與正二十面體互為對偶多面體。那麼正五邊形和正十邊形有關係嗎？正五邊形每個內角為 108° ，正十邊形每個內角為 144° ，兩個正五邊形的內角加上一個正十邊形的內角正好為 360° 。所以我們發現連接十個正五邊形成環狀時，其內部正好為正十邊形(圖 10)；連接十二個正五邊形即可組成正十二面體(圖 11~圖 13)。

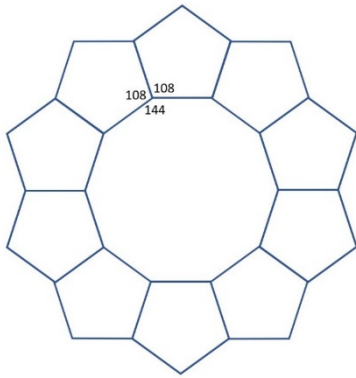


圖 10



圖 11

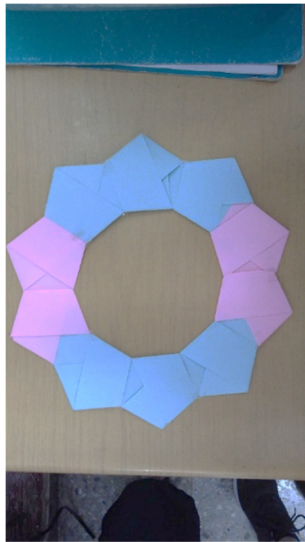


圖 12



圖 13

IKEA 為世界知名居家用品專賣店，筆者經常在燈飾區發現幾何造型的燈具，這對於幾何控或數學人來說總是吸睛的焦點。前陣子又去逛了一遍，發現燈飾區有了兩種新的幾何燈飾，從外觀約略可知與正十二面體有關(因為每個面的造型都有正五邊形的影子)，且這兩種燈飾皆可透過拉繩轉變不同的造型。筆者好奇地來回變換此燈飾的造型，並一探其中的奧妙。果然，這兩種燈飾中心都有十二個支架，每個支架均連接一個正五邊形的燈飾葉片。當繩子拉到底，可發現圖 18 的造型漸漸浮現出小行星十二面體。小星形十二面體是一種星形正多面體，由 12 個五角星面組成，為三種星形十二面體之一。



圖 14：拉繩居中，呈現正十二面體



圖 15：拉繩內縮，成凹五角錐十二面體

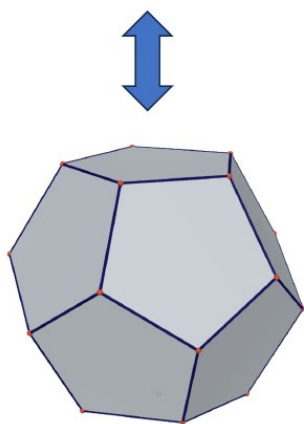


圖 16：正十二面體

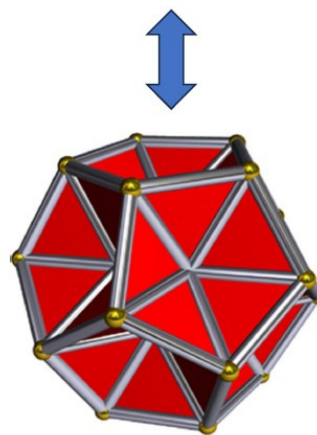


圖 17：凹五角錐十二面體
(摘自維基百科)



圖 18：拉繩向外，成小行星十二面體



圖 19：燈具內的十二個支架

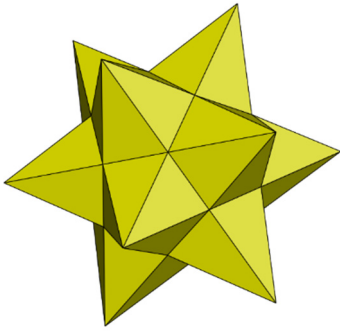


圖 20：小行星十二面體(摘自維基百科)



圖 21：小行星十二面體燈飾

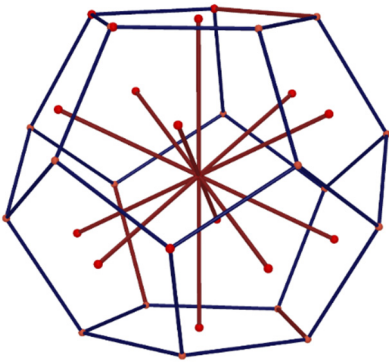


圖 22：鏤空正十二面體及其骨架

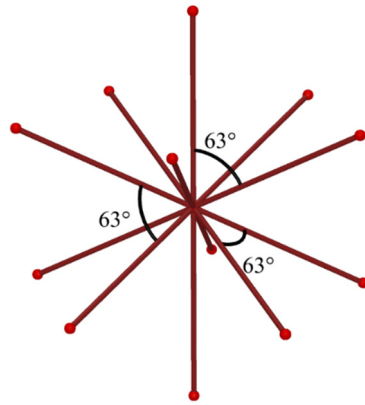


圖 23：正十二面體骨架

圖 22 為鏤空的正十二面體及其骨架。骨架的定義為正十面體的中心點至每個面中心點的線段，一共十二個骨架。從圖 23 得出正十二面體的十二條骨架中，相鄰兩條骨架間的夾角皆約為 63° ，此角度可供製作實體模型時參考。圖 24~圖 27 為另一款式的正十二面體燈具。



圖 24：另一款正十二面體造型燈具



圖 25：骨架內縮，變出美麗的花朵



圖 26：含苞待放的花朵



圖 27：燈具內部的支架

在日本街頭，偶爾可見建築外牆或大門有正五邊形的複合幾何造型藝術，頗具美感。圖 28 為日本大阪免稅店外牆的幾何造型，圖 29 中除了正五邊形外，讀者還可看到那些圖形嗎？可以試著找找看。



圖 28：日本免稅店大樓外牆



圖 29：大阪市某商店門面

從圖 28 中，筆者立刻聯想起日本學者亦有正十二面體速成的模型創作。首先準備如圖 30 的厚紙板兩組（筆者建議使用白玉卡，白玉卡為雙面白色厚紙板），每組造型為相同的六個正五邊形梅花花瓣，接著按照照片的圖說來操作可輕易組成正十二面體，且可輕鬆卸下變回平面教具，容易收納。

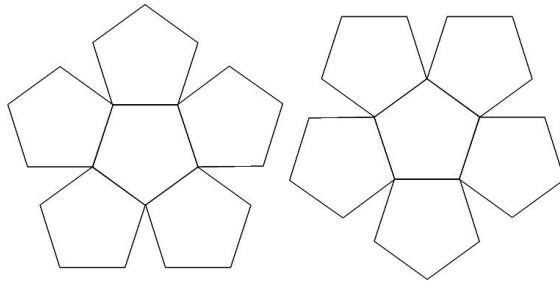


圖 30：正十二面體厚紙板

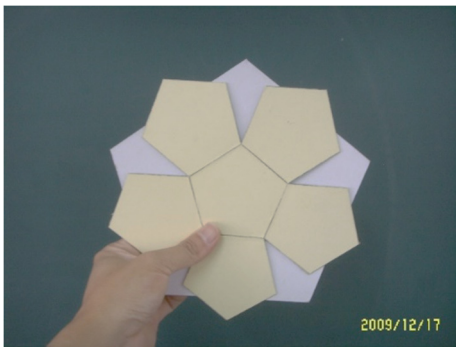


圖 31：重疊兩片厚紙板

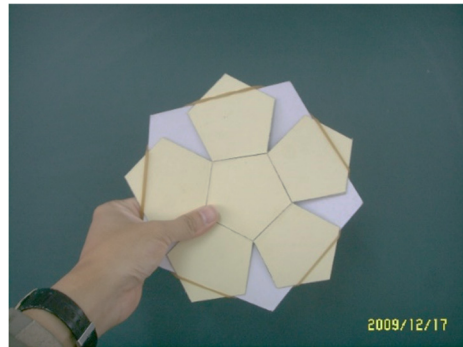


圖 32：套上橡皮筋

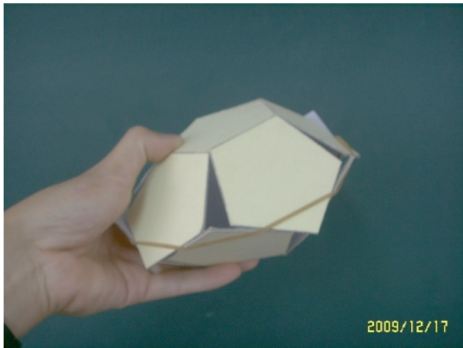


圖 33：鬆開手，逐漸成型

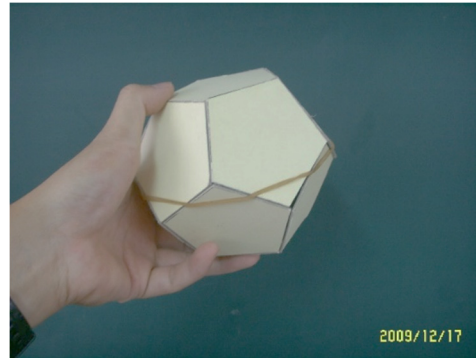


圖 34：完成正十二面體模型

凡具有規律、對稱的幾何圖形或數列就是一種美，生活中有太多美的元素等待我們發掘。讓我們繼續探索這美麗的幾何世界吧！

參考文獻：

李祐宗(民 110)。談數學素養－生活中的數學記憶。科學研習月刊，60(02)。
岡部恆治。桃崎剛壽(民 96)。數學腦。新北市：世茂。