從角平分線定理的另證談起

連 威 翔

山城人力資源管理顧問有公司派遣人員(投稿期間)

壹、前言

在維基百科中文條目[1]中介紹了角平分線定理的敘述與證明，該證明使用了相似形的性質。而在與[1]對應的英文條目[2]中，則可看到另外四種證法。除了[1]與[2]中的證法以外，常見的還有作輔助線利用平行線截比例線段性質的證法，我們先畫出下圖。

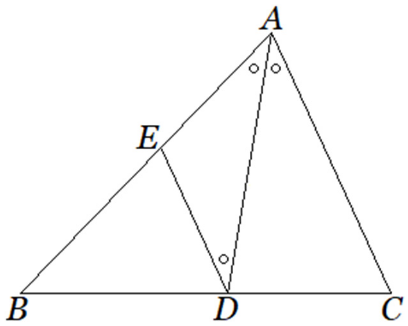

圖 1

上圖中 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的平分線，$\overline{DE}$ 平行 $\overline{AC}$，此時即可透過下式完成證明：

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}.$$

除了以上所提到的幾種證法以外，是否有其他方式可完成證明呢？答案是肯定的。在底下第二節中，筆者將介紹如何使用正弦定理與向量工具來證明角平分線定理，接著的兩節則會介紹角平分線長公式的另證，並進行一些相關的探討。隨後的第五節，則會從兩個有趣的不等式談起。

貳、角平分線定理的另證

許多人都熟知的角平分線定理，其敘述如下：

定理 1：如下圖，已知 ΔABC 中 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的平分線，D 為 $\overline{BC}$ 上的一點。

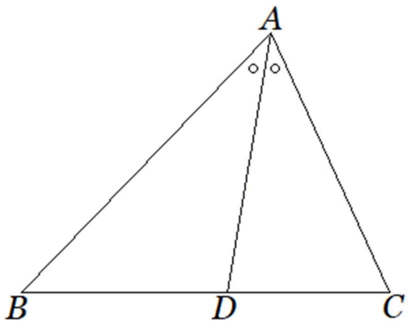

圖 2

則在上圖中我們有 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$。

底下的內容，將分別介紹如何使用正弦定理與向量工具證明角平分線定理。首先介紹使用正弦定理的證明如下：

證明：參考圖 2 後，我們先利用正弦定理寫下

$$\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}. \tag{1}$$

接著在圖 2 中作 $\overline{DE}\perp\overline{AB},\overline{DF}\perp\overline{AC}$ 於 E,F，如下圖。

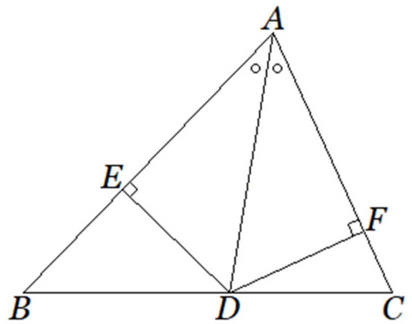

圖 3

上圖中利用 AAS 全等性質可證明 $\Delta ADE\cong\Delta ADF$，因此 $\overline{DE}=\overline{DF}$。此時以(1)式搭配圖 3 的資訊以及 $\overline{DE}=\overline{DF}$ 的條件，即可推得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sin C}{\sin B}=\frac{\frac{\overline{DF}}{\overline{CD}}}{\frac{\overline{DE}}{\overline{BD}}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\times\frac{\overline{DF}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}.$$

注意上式的推導過程適用於 $\angle B,\angle C$ 均為銳角的圖 3，不過當 $\angle B,\angle C$ 之中有一個角為直角或鈍角時，我們仍可另外畫圖並仿照上式推得 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}$ 成立，這部分的證明就留給讀者練習。而透過以上的討論，我們就知道 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}$ 恆成立，證明完畢。

接下來介紹如何使用向量工具證明角平分線定理，不過在介紹該證明之前，我們先看底下的重要性質及其證明：

性質 1：若非零向量 $\vec{u},\vec{v}$ 兩者不平行且等長，則 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u},\vec{v}$ 兩者的夾角相等。

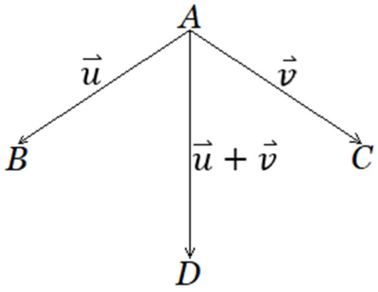

圖 4

證明：將 $\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}$ 三向量的始點放在同一點 A，此時令 $\vec{u},\vec{v},\vec{u}+\vec{v}$ 兩向量的終點分別為 B,C,D。因為 $\vec{u},\vec{v}$ 不平行，依照向量加法的定義可知圖 4 中 $ABDC$ 為平行四邊形且 $\overline{AD}$ 為其對角線。

因為 $\vec{u},\vec{v}$ 兩者等長，故圖 4 中平行四邊形 $ABDC$ 的鄰邊 $\overline{AB},\overline{AC}$ 等長，因此 $ABDC$ 為菱形，而菱形的對角線平分其兩端點所在的一組菱形的對角，因此圖 4 中 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，故 $\vec{u}+\vec{v}$ 與 $\vec{u},\vec{v}$ 的夾角相等，性質 1 證明完畢。

有了性質 1 之後，令圖 2 中 $\overline{AC},\overline{AB}$ 的長度分別為 b,c，如下圖。

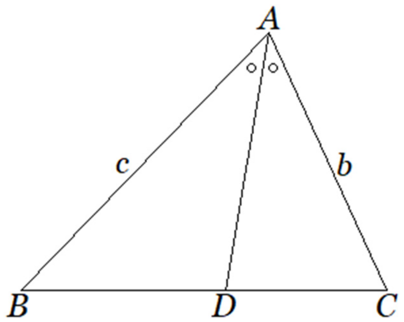

圖 5

配合上圖，我們看定理 1 的向量證明如下：

證明：圖 5 中因 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的平分線，故 $\overrightarrow{AD}$ 與 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夾角相等。又因為

$$\left|\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}\right| = \frac{1}{\overline{AB}}\left|\overrightarrow{AB}\right| = 1,$$

$$\left|\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{\overline{CA}}\left|\overrightarrow{AC}\right| = 1,$$

故 $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ 兩向量等長，因此由性質 1 知 $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ 與 $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ 兩者的夾角相等，即與

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夾角相等，故圖 5 中 $\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AD}$ 平行，即存在實數 t 滿足

$$\overrightarrow{AD}=t\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{b}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{t}{c}\overrightarrow{AB}+\frac{t}{b}\overrightarrow{AC}. \tag{2}$$

由於圖 5 中 B,D,C 三點共線，可知(2)式中 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的係數滿足

$$\frac{t}{c}+\frac{t}{b}=1,$$

從而可解得 $t=\frac{bc}{b+c}$。將 $t=\frac{bc}{b+c}$ 代入(2)式得

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}, \tag{3}$$

上式的係數告訴我們圖 5 中有

$$\overline{BD}:\overline{CD}=\frac{c}{b+c}:\frac{b}{b+c}=c:b=\overline{AB}:\overline{AC},$$

因此定理 1 再次得證。

參、從角平分線長公式的另證談起

看完上一節中角平分線定理的另證後，接著我們關心圖 5 中角平分線 $\overline{AD}$ 長以 ΔABC 之三邊長 a,b,c 寫成的公式，此公式的證明，讀者可先參考[3]。底下將介紹一個有別於[3]中證明的另證，請見底下的性質 2 及其證明：

性質 2：ΔABC 中，已知 $\overline{AD}$ 為 $\angle A$ 的平分線，D 為 $\overline{BC}$ 上一點。令 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c，$\overline{AD}=d$，如下圖。

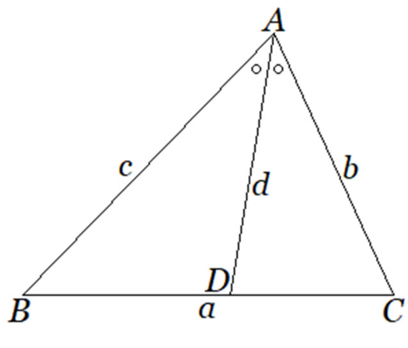

圖 6

則上圖中有

$$d=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}. \tag{4}$$

證明：觀察圖 6，由於 $\Delta ABD, \Delta ACD$ 兩者之面積和等於 ΔABC 之面積，且依題意知 $\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle A$，因此我們可寫下

$$\frac{1}{2}cd\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bd\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}bc\sin A=bc\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}, \tag{5}$$

其中，上式最後的等號使用了正弦的倍角公式。注意我們有

$$0<\angle A<\angle A+\angle B+\angle C=\pi,$$

因此 $0<\frac{1}{2}\angle A<\frac{\pi}{2}$，從而得 $\sin\frac{A}{2}>0$。取(5)式的兩端消去非零項 $\sin\frac{A}{2}$ 後再同乘 2，整理後可得

$$d(b+c)=2bc\cos\frac{A}{2},$$

因此可知

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{d(b+c)}{2bc}. \tag{6}$$

另一方面，因為 $0<\frac{1}{2}\angle A<\frac{\pi}{2}$，故 $\cos\frac{A}{2}>0$，利用半角公式配合餘弦定理可知

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}. \tag{7}$$

比較(6), (7)兩式，可得

$$\frac{d(b+c)}{2bc}=\sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}},$$

上式化簡後得

$$d=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c},$$

故(4)式成立，性質 2 得證，證明完畢。

本節後半，筆者將介紹兩個與角平分線有關的簡單性質。其中，第一個性質的敘述及其證明如下：

性質 3：已知 $0<\angle A<\pi$，點 D 為 $\angle A$ 平分線上的定點，且過 D 的一條直線 L 與 $\angle A$ 的兩邊交於 B, C 兩點，如下圖。

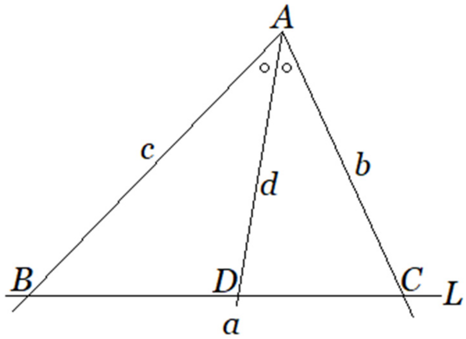

圖 7

若 $\angle A$ 的大小固定，則無論過定點 D 且與 $\angle A$ 兩邊交於 B, C 兩點的直線 L 如何變化，下式計算的結果恆為定值：

$$\frac{1}{\overline{BD}}+\frac{1}{\overline{CD}}.$$

證明：首先如圖 7 所標示，我們令 $\overline{BC}=a, \overline{CA}=b, \overline{AB}=c, \overline{AD}=d$，此時讀者應該會覺得圖 7 有些眼熟。沒錯，圖 7 具備的條件基本上與性質 2 所參考的圖 6 相同，因此由圖 7 我們可推得先前所有出自圖 6 的結果。回顧性質 2 證明過程中的(6)式，可知(6)式對圖 7 亦成立，即圖 7 具備下述條件：

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{d(b+c)}{2bc}.$$

由上式可知

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{b+c}{bc}=\frac{2}{d}\cos\frac{A}{2}.$$

由題意知 $\angle A$ 的大小與 $\overline{AD}$ 的長度 d 皆為定值，因此上式中 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ 恆為定值，即

$$\frac{1}{\overline{BD}}+\frac{1}{\overline{CD}}$$

恆為定值，故性質 3 的結論成立，證明完畢。

接下來，我們看底下的第二個與角平分線有關的性質及其證明：

性質 4：已知平面上有一 $\angle A$，滿足 $0<\angle A<\pi$，且有一個直線族 S，在 S 中的每條直線皆滿足下述兩條件：(a)與 $\angle A$ 的兩邊交於 B, C 兩點；(b) $\overline{AB}, \overline{AC}$ 兩線段長的倒數和為定值，則直線族 S 中每條直線皆通過 $\angle A$ 平分線上的同一點。

證明：令直線族 S 中的直線 L 與 $\angle A$ 的兩邊交於 B, C 兩點且與 $\angle A$ 之平分線交於 D 點，如圖 **7**，且令 $\overline{AB}=c, \overline{AC}=b, \overline{BC}=a, \overline{AD}=d$。注意因圖 7 提供了與圖 6 完全相同的條件，故先前

對圖 6 所推得的(6)式在此處亦成立，我們可寫下

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{d(b+c)}{2bc}=\frac{d}{2}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \tag{8}$$

令直線族 S 中另一條直線 L' 與 $\angle A$ 的兩邊交於 B',C' 兩點且與 $\angle A$ 之平分線交於 D' 點，且令 $\overline{AB'}=c',\overline{AC'}=b',\overline{B'C'}=a',\overline{AD'}=d'$，參考下圖。

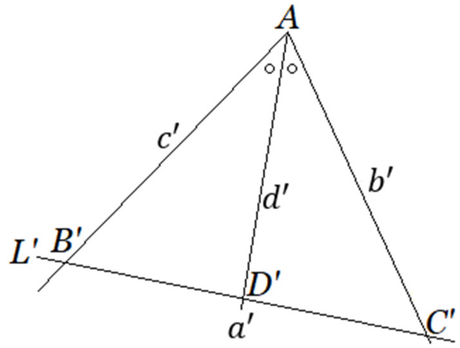

圖 8

同理由(6)式可知下式成立：

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{d'(b'+c')}{2b'c'}=\frac{d'}{2}\left(\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}\right). \tag{9}$$

由性質 4 前提中直線族 S 之所有直線皆滿足的條件(b)，我們知道 $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}$，因此利用(8), (9)兩式可知

$$d=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{2\cos\frac{A}{2}}{\frac{1}{b'}+\frac{1}{c'}}=d'.$$

上式告訴我們圖 7 與圖 8 中的 $\overline{AD},\overline{AD'}$ 滿足 $\overline{AD}=\overline{AD'}$，即 D,D' 兩點在 $\angle A$ 平分線上的位置重合。透過以上討論過程，我們知道直線族 S 中每條直線皆通過 $\angle A$ 平分線上的同一點，故性質 4 的結論成立，證明完畢。

肆、角平分線長公式的向量證明

看完上一節前半所介紹之角平分線長公式(4)的證明後，其實我們也可以利用第二節中的(3)式提出公式(4)的另證。此處先寫下(3)式的結果如下：

$$\overrightarrow{AD}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC},$$

請參考圖 6，其中 $\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$，因此可計算得

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}\right|^2=\frac{b^2}{(b+c)^2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{c^2}{(b+c)^2}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{2bc}{(b+c)^2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}. \quad (10)$$

另一方面，利用餘弦定理可知

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos A=bc\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

將上式代入(10)式可得

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{AD}\right|^2&=\frac{b^2}{(b+c)^2}c^2+\frac{c^2}{(b+c)^2}b^2+\frac{2bc}{(b+c)^2}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}=\frac{2b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{bc(b^2+c^2-a^2)}{(b+c)^2}\\&=\frac{bc(b^2+c^2+2bc-a^2)}{(b+c)^2}=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}, \quad (11)\end{aligned}$$

因此有

$$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\frac{\sqrt{bc(b+c+a)(b+c-a)}}{b+c}. \quad (12)$$

至此我們就完成了角平分線長公式(4)的另證。

除了角平分線長公式以外，讀者也可仿照上述證明，利用向量法推導三角形的中線長公式，其推導過程並不難，因此就留給讀者練習。本節最後，值得一提的是，在[4]文第三節中，筆者利用向量法證明了歐拉定理，有興趣的讀者不妨參考。

伍、從兩個趣味的不等式談起

在前兩節的內容中，我們討論了 ΔABC 內角平分線 $\overline{AD}$ 的長度公式，其實我們還可利用前兩節的內容進一步求得 $\overline{AD}$ 長的上下界。利用(11)式的結果，並將 $\left|\overrightarrow{AD}\right|$ 記為 $\overline{AD}$，我們知道

$$\overline{AD}^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}. \quad (13)$$

其中 $\overline{BC}=a,\overline{CA}=b,\overline{AB}=c$。由於三角形任兩邊長度和大於第三邊，且任兩邊長度差的絕對值小於第三邊，因此可寫下

$$|b-c|<a<b+c. \tag{14}$$

上式取平方後可得

$$(b-c)^2<a^2<(b+c)^2, \tag{15}$$

因此知

$$(b-c)^2-(b+c)^2<a^2-(b+c)^2<0,$$

所以有

$$0<(b+c)^2-a^2<4bc.$$

由上式可知

$$0<\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}<\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2},$$

再搭配(13)式即得

$$0<\overline{AD}^2<\frac{4b^2c^2}{(b+c)^2},$$

也就是說我們有底下的不等式：

$$0<\overline{AD}<\frac{2bc}{b+c}, \tag{16}$$

其中 $\frac{2bc}{b+c}$ 為 b,c 的調和平均數。因此，我們可使用不等式(16)來確定圖 6 中角平分線 $\overline{AD}$ 長的大小範圍。

若仔細回顧推導得(16)式之前的每一個步驟，則我們會知道當(14)式中 a 趨近於 $|b-c|$ 時，(16)式中的 $\overline{AD}$ 長會趨近於 b,c 的調和平均數 $\frac{2bc}{b+c}$；而當(14)式中 a 趨近於 $b+c$ 時，(16)式中的 $\overline{AD}$ 長則會趨近於 0。

除了透過上述討論過程得到與三角形角平分線長有關的不等式(16)以外，我們也可對三角形的中線長作類似的探討。將圖 6 中的角平分線 $\overline{AD}$ 抹去，並畫上過 A 點的中線 $\overline{AM}$，其中 M 為 $\overline{BC}$ 中點，如下圖。

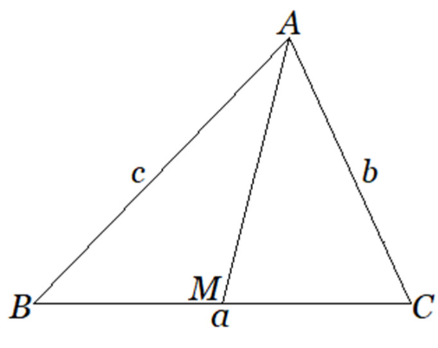

圖 9

注意上圖中有 $\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{a}{2}$，且有

$$\cos\angle AMB=\cos(\pi-\angle AMC)=-\cos(\angle AMC),$$

使用餘弦定理，由上式兩端可知圖 9 中有

$$\frac{\overline{AM}^2+\frac{a^2}{4}-c^2}{2\cdot\overline{AM}\cdot\frac{a}{2}}=-\frac{\overline{AM}^2+\frac{a^2}{4}-b^2}{2\cdot\overline{AM}\cdot\frac{a}{2}},$$

上式化簡後可得

$$\overline{AM}^2=\frac{b^2+c^2-\frac{a^2}{2}}{2}=\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}. \tag{17}$$

此時先回顧(14)式，再利用(15)式寫下

$$-\frac{(b+c)^2}{4}<-\frac{a^2}{4}<-\frac{(b-c)^2}{4},$$

上式中的三項同加 $\frac{b^2+c^2}{2}$ 後，結果如下：

$$\frac{2b^2+2c^2-(b+c)^2}{4}<\frac{2b^2+2c^2-a^2}{4}<\frac{2b^2+2c^2-(b-c)^2}{4}.$$

上式兩端的式子經化簡後，配合(17)式可得

$$\frac{(b-c)^2}{4}<\overline{AM}^2<\frac{(b+c)^2}{4},$$

也就是說我們有底下的不等式：

$$\frac{|b-c|}{2}<\overline{AM}<\frac{b+c}{2}, \tag{18}$$

其中 $\frac{b+c}{2}$ 為 b,c 的算術平均數。因此，我們可使用不等式(18)來確定圖 9 之中線 $\overline{AM}$ 長的大小範圍。

若仔細回顧推導得(18)式之前的每一個步驟，則我們會知道當(14)式中 a 趨近於 $|b-c|$ 時，(18)式中的 $\overline{AM}$ 長會趨近於 b,c 的算術平均數 $\frac{b+c}{2}$；而當(14)式中 a 趨近於 $b+c$ 時，(18)式中的 $\overline{AM}$ 長則會趨近於 $\frac{|b-c|}{2}$。

不過筆者後來發現，其實(18)式有一個更好的證明方式。我們可在圖 9 中的直線 AM

上取異於 A 的一點 A' 滿足 $\overline{A'M}=\overline{AM}$，連接 $\overline{A'B},\overline{A'C}$ 後，結果如下圖。

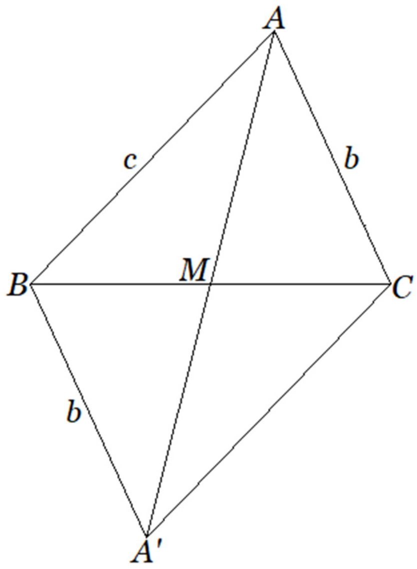

圖 10

因為上圖中四邊形 $ABA'C$ 的對角線互相平分，故 $ABA'C$ 為平行四邊形，滿足 $\overline{A'B}=\overline{AC}=b$。由 $\Delta ABA'$ 三邊所滿足的長度關係，我們可寫下 $|\overline{A'B}-\overline{AB}|<\overline{A'A}<\overline{A'B}+\overline{AB}$，又因為 $\overline{A'A}=2\overline{AM},\overline{AB}=c,\overline{A'B}=b$，故上述 $\Delta ABA'$ 三邊長度的關係式可改寫為 $|b-c|<2\overline{AM}<b+c$，利用此結果即可推得(18)式。

比較(16),(18)兩式，可發現兩式的右端分別是 b,c 的調和平均數 $\frac{2bc}{b+c}$ 與算術平均數 $\frac{b+c}{2}$；此外，(16)式的左端為零，而(18)式的左端則為 $\frac{|b-c|}{2}$。以上所述關於(16),(18)兩式的差異，日後待筆者研究清楚後再為大家介紹，讀者若有興趣亦可自行研究看看。

完成上述與(16),(18)兩式有關的討論後，我們發現從(16),(18)兩式無法直接看出圖 6 中的角平分線 $\overline{AD}$ 與圖 9 中的中線 $\overline{AM}$ 兩者長度的大小關係。不過沒關係，只要回頭利用(13),(17)兩式，即可計算得

$$\overline{AM}^2-\overline{AD}^2=\frac{b^2+c^2-\frac{a^2}{2}}{2}-\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}-bc+\frac{bca^2}{(b+c)^2}$$
$$=\frac{b^2+c^2-2bc}{2}+\frac{a^2[4bc-(b+c)^2]}{4(b+c)^2}=\frac{(b-c)^2}{2}-\frac{a^2(b-c)^2}{4(b+c)^2}$$
$$=\frac{(b-c)^2}{4}\times\left[2-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right]=\frac{(b-c)^2}{4}\times\left[1+\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}\right]$$
$$=\frac{(b-c)^2}{4}\times\left[1+\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}\right]\geq 0. \tag{19}$$

因此圖 6 中的 $\overline{AD}$ 與圖 9 中的 $\overline{AM}$ 兩者的長度滿足 $\overline{AM} \geq \overline{AD}$ 的條件。注意(19)式中

$$1+\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}>0,$$

其中 $b+c-a>0$ (三角形任兩邊長度和大於第三邊)，因此由(19)式知圖 6 與圖 9 中 ΔABC 的中線與角平分線長滿足 $\overline{AM}=\overline{AD}$ 若且唯若 $b=c$，即有 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 的條件。

還有另一個方法可證明 $\overline{AM} \geq \overline{AD}$ 的結果，我們可在圖 9 中畫上在圖 6 中出現的角平分線 $\overline{AD}$，並加上高 $\overline{AH}$，結果如下圖。

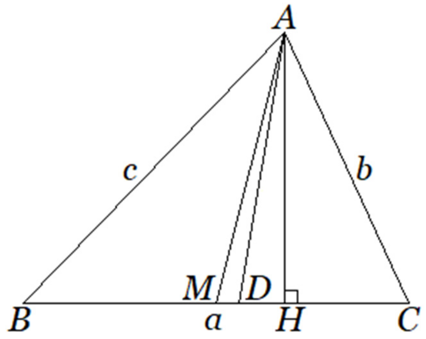

圖 11

不失一般性，上圖中我們令 $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ (註 1)，即 $c \geq b$，則我們有

$$\overline{BD}-\overline{BM}=\frac{c}{b+c}\overline{BC}-\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{c-b}{2(b+c)}\overline{BC} \geq 0.$$

因此知 $\overline{BD} \geq \overline{BM}$，且此式等號成立若且唯若 $b=c$。另一方面，因為 $\overline{AB} \geq \overline{AC}$，由大邊對大角及等邊對等角的性質，可知圖 11 中 $\angle C \geq \angle B$，因此可知

$$\angle B=\frac{2\angle B}{2} \leq \frac{\angle B+\angle C}{2}<\frac{\angle A+\angle B+\angle C}{2}=90°,$$

故 $\angle B$ 為銳角。此時，可確定圖 11 中高 $\overline{AH}$ 的垂足 H 落在 BC 直線上的位置與 M,D 兩點一樣，都在 B 點右側。接著利用餘弦定理與角平分線定理，我們可計算得

$$\overline{BH}-\overline{BD}=\overline{BA}\cos B-\frac{c}{b+c}\overline{BC}=c\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}-\frac{ca}{b+c}=\frac{c^2-b^2+a^2}{2a}-\frac{ca}{b+c}$$

$$=\frac{c^2-b^2}{2a}+a\left(\frac{1}{2}-\frac{c}{b+c}\right)=\frac{(c+b)(c-b)}{2a}+a\times\frac{b-c}{2(b+c)}$$

$$=\frac{(c-b)[(c+b)^2-a^2]}{2a(c+b)}=\frac{(c-b)(c+b+a)(c+b-a)}{2a(c+b)} \geq 0,$$

其中 $c-b \geq 0, c+b-a>0$。因此 $\overline{BH} \geq \overline{BD}$，且此式等號成立若且唯若 $b=c$。

完成上述討論後，可知 $\overline{BM} \leq \overline{BD} \leq \overline{BH}$，當 $b=c$ 時圖 11 中 M,D,H 三點重合；而當 $c>$

b時，圖 11 中 M,D,H 三點在 BC 直線上的位置相異且由左至右出現的順序為 M,D,H。因此，圖 11 中具備 $\overline{MH} \geq \overline{DH}$ 的條件，觀察圖 11 並利用畢氏定理可得

$$\overline{AM}^2 - \overline{AD}^2 = (\overline{AH}^2 + \overline{MH}^2) - (\overline{AH}^2 + \overline{DH}^2) = \overline{MH}^2 - \overline{DH}^2 \geq 0,$$

至此再次確定有 $\overline{AM} \geq \overline{AD}$ 的結果，此即筆者所想要介紹的另證。

陸、結語

筆者寫作本文的初衷，是想要介紹自己對角平分線定理的另證，也因此有本文第二節的內容。但因為過程中也研究了角平分線長公式，所以才在第三與第四節中介紹該公式的證明。而第五節前半利用(11)式推得與角平分線長有關的不等式(16)，則是出自撰文過程中靈光一閃的想法，也因此繼續作討論並推得與中線長有關的不等式(18)，注意三角形的內角平分線與中線都具有「落在三角形內部」的特性；至於第五節後半的內容，則是想到可利用推導(16), (18)兩式之過程中的(13), (17)兩式比較角平分線長與中線長的大小。

本文開始寫作的時間是 2021 年 8 月的盛夏，能夠完成本文，首先要感謝母親在日常生活中對筆者的照顧，同時也要感謝審稿者所提供的修改建議，使本文內容在修改後得以更臻完善。最後無論如何，希望讀者在閱讀本文後能有所收穫。

註 1：當圖 11 中三角形的頂點 A 確定之後，比較 $\angle A$ 之兩鄰邊的長度，並將較長的邊命名為 $\overline{AB}$、較短者命名為 $\overline{AC}$。依此方式命名，則圖 11 中的 ΔABC 即具備 $\overline{AB} \geq \overline{AC}$ 的條件。

參考文獻:

[1]角平分線定理，維基百科。
[2]Angle bisector theorem, Wikipedia.
[3]角平分線長公式，維基百科。
[4]連威翔。歐拉不等式的另證。數學傳播季刊，第 180 期，43-49，2021。