中學生通訊解題第 155-157 期題目參考解答及評註

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
15501

設正整數 a,b,m,n 滿足 $a^2=m(n+17)$，$b^2=m(n-17)$，求 n 的所有可能值。

【簡答】 145

【詳解】

設 $(a,b)=d$，令 $a=dh$、$b=dk$，其中 $(h,k)=1$，

因為 $\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{c(d+17)}{c(d-17)}=\dfrac{d+17}{d-17}=\dfrac{h^2}{k^2}$，

令 $d+17=th^2$、$d-17=tk^2$，其中 t 為正整數。

兩式相減得 $t(h^2-k^2)=34$，所以 t 為 34 的因數，

又 $h+k,h-k$ 為兩個不相等且奇偶性相同的正整數，所以 $t=2$，

得 $h+k=17,h-k=1$，所以 $h=9,k=8$，因此 $(a,b,m,n)=(18,16,2,145)$，

所以 n 的值為 145。

問題編號
15502

若 n 為正整數，定義 $n!$（讀作 n 的階乘）為從 1 到 n 的所有正整數之連乘積，即 $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n$，設 $0\le a_k<k$，其中 a_k 為整數，已知 $\dfrac{a_2}{2!}+\dfrac{a_3}{3!}+\dfrac{a_4}{4!}+\dfrac{a_5}{5!}+\dfrac{a_6}{6!}+\dfrac{a_7}{7!}=\dfrac{4}{7}$，求 $a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ 之值。

【簡答】 11

【詳解】

等號兩邊同乘以 $7!$，

$a_2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+a_3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+a_4\cdot5\cdot6\cdot7+a_5\cdot6\cdot7+a_6\cdot7+a_7=2880=7\cdot411+3$，

因 $(a_2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+a_3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7+a_4\cdot5\cdot6\cdot7+a_5\cdot6\cdot7+a_6\cdot7)$ 是 7 的倍數且 $0\le a_7<7$，故 $a_7=3$，

代入上式化簡得 $a_2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+a_3\cdot4\cdot5\cdot6+a_4\cdot5\cdot6+a_5\cdot6+a_6=411=6\cdot68+3$，

因 $(a_2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6+a_3\cdot4\cdot5\cdot6+a_4\cdot5\cdot6+a_5\cdot6)$ 是 6 的倍數且 $0\le a_6<6$，

故 $a_6=3$，

代入上式化簡得 $a_2\cdot3\cdot4\cdot5+a_3\cdot4\cdot5+a_4\cdot5+a_5=68=5\cdot13+3$，

因 $(a_2\cdot3\cdot4\cdot5+a_3\cdot4\cdot5+a_4\cdot5)$ 是 5 的倍數且 $0\le a_5<5$，故 $a_5=3$，

代入上式化簡得 $a_2\cdot3\cdot4+a_3\cdot4+a_4=13=4\cdot3+1$，

因 $(a_2\cdot3\cdot4+a_3\cdot4)$ 是 4 的倍數且 $0\le a_4<4$，故 $a_4=1$，

代入上式化簡得 $a_2\cdot3+a_3=3$，

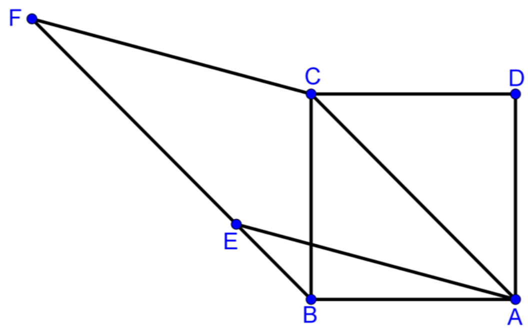
因 $(a_2\cdot3)$ 是 3 的倍數且 $0\le a_3<3$，故 $a_3=0$，

代入上式化簡得 $a_2=1$，

$\therefore a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=1+0+1+3+3+3=11$。

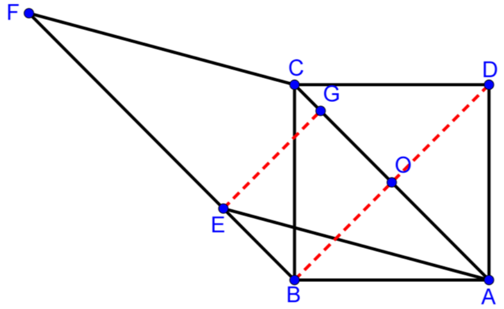
問題編號
15503

如下圖所示，四邊形 $ABCD$ 為一邊長為 2 的正方形，$\overline{BF}$ 平行 $\overline{AC}$，且四邊形 $AEFC$ 是菱形。求 $AEFC$ 的面積。



【簡答】 4

【詳解】



連接 $\overline{BD}$，交 $\overline{AC}$ 於 O，則 $\overline{BO}\perp\overline{AC}$，且 $\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AC}=\frac{1}{2}\overline{AE}$ ($AEFC$ 是菱形)，

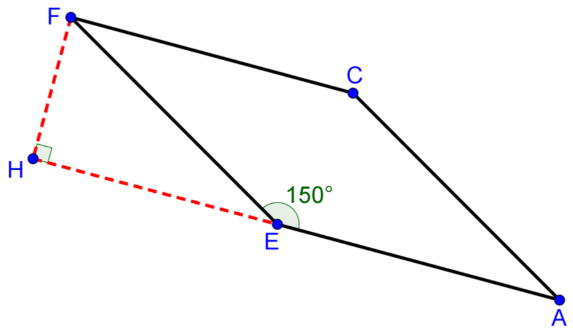
過 E 作 $\overline{EG}//\overline{BO}$，又 $\overline{BF}$ 平行 $\overline{AC}$，所以 $EGOB$ 為平行四邊形，

則 $\overline{EG}=\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AE}$，

在直角 ΔAEG 中，因為 $\overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{AE}$，所以 $\angle EAG=30^0$，

又 $AEFC$ 是菱形，如下圖所示，則 $\angle FEH=30^0$，

可得 $\overline{FH}=\frac{1}{2}\overline{EF}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}=\sqrt{2}$，所以 $AEFC$ 的面積為 $2\sqrt{2}\times\sqrt{2}=4$。



問題編號
15504

已知 n 為正整數，若在 $1,2,\cdots,n$ 的任意一個排列中，總可找到連續六個數之和大於 2019，求 n 的最小值。

【簡答】 673

【詳解】

首先證明 673 符合題目要求。對$1,2,\cdots,673$的任意一個排列$b_1,b_2,\cdots,b_{673}$，

若$b_1=673$，則從b_1開始將其依次分成 112 組，其中每組六個數，即

$(b_1,b_2,\cdots b_6),(b_7,b_8,\cdots,b_{12}),\cdots,(b_{666},\cdots b_{671},b_{672})$，

若$b_1\neq 673$，則從b_2開始將其依次分成 112 組，其中每組六個數，即

$(b_2,b_3,\cdots b_7),(b_8,b_9,\cdots,b_{13}),\cdots,(b_{667},\cdots b_{672},b_{673})$，

則這 112 組之和的平均值必大於$\dfrac{1+2+\cdots+672}{112}=2019$，

因此必有其中一組數之和大於 2019，從而 673 符合題目要求。

其次將$1,2,\cdots,672$的排列成

$672,671,670,1,2,3,669,668,667,4,5,6,\cdots,339,338,337,334,335,336$，

其連續六個數之和為$2019-3k,k=0,1,2,3$之一，

因此當$n<673$時不符合題目要求。所以 n 的最小值為 673。

問題編號
15505

將 5 顆相同的黑棋、5 顆相同的白棋任意排成一列，則其中有連續 3 顆棋子依序為「黑白黑」的排列方法共有幾種？

【簡答】 182

【詳解】

●●●●●○○○○○排成一列，共$\dfrac{10!}{5!5!}=252$種方法。

先考慮沒有「黑白黑」的方法數，

先將 5 顆黑棋排成一列●●●●●，再將白棋插入 6 個空隙，

沒有「黑白黑」 $\Leftrightarrow$ 不可將單獨 1 白棋插入中間 4 個空隙

分成 5 類：

插入「○○○○○」: 共$C_1^6=6$方法；

插入「○○○○」、「○」：共 $C_1^2 C_1^5 = 10$ 方法；

插入「○○○」、「○○」：共 $P_2^6 = 30$ 方法；

插入「○○○」、「○」、「○」：共 $C_1^4 = 4$ 方法；

插入「○○」、「○○」、「○」：共 $C_1^2 C_2^5 = 20$ 方法；

沒有「黑白黑」的方法共 6+10+30+4+20=70 種，故有「黑白黑」的方法共 252-70=182 種。

問題編號 15601

在一張紙上寫上一些正整數(可以有相同的數)，且需滿足以下三個條件：

(1) 一定要寫 77 這個數

(2) 這張紙上的各數之算術平均數為 57

(3) 如果把 77 這個數去掉，剩下的各數之算術平均數則降為 55

則可能在紙上出現之最大的數是多少？

【簡答】 541

【詳解】

設 n 為紙上正整數的個數，它的 n 個數為 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 77$，

由題意知 $\begin{cases} \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + 77}{n} = 57 \\ \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} = 55 \end{cases}$，

可得 $55(n-1) = 57n - 77$，推得 $n = 11$，則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 550$，

為使 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 中出現一個最大的正整數，就應使其它 9 個數盡可能的小，即 10 個數中取 9 個 1，則另一個數 $550 - 9 = 541$ 就是紙上可能出現最大的數。

問題編號
15602

是否存在一個二次函數 $f(x)$ 使得對任意的正整數 n，當 $x=\underbrace{55\cdots5}_{n個5}$ 時都有 $f(x)=\underbrace{55\cdots5}_{2n個5}$ 成立？請給出結論並加以證明。

【簡答】 $f(x)=\dfrac{9}{5}x^2+2x$

【詳解】

設 $f(x)=ax^2+bx+c$，則當 $n=1,2,3$ 時有

$f(5)=25a+5b+c=55$，

$f(55)=3025a+55b+c=5555$，

$f(555)=308025a+555b+c=555555$，

聯立上述三式解得 $a=\dfrac{9}{5},b=2,c=0$，於是 $f(x)=\dfrac{9}{5}x^2+2x$。

下面證明：二次函數 $f(x)=\dfrac{9}{5}x^2+2x$ 符合條件。

因為 $\underbrace{55\cdots5}_{n個5}=5(1+10+100+\cdots+10^{n-1})=\dfrac{5}{9}(10^n-1)$，

同理 $\underbrace{55\cdots5}_{2n個5}=\dfrac{5}{9}(10^{2n}-1)$，則

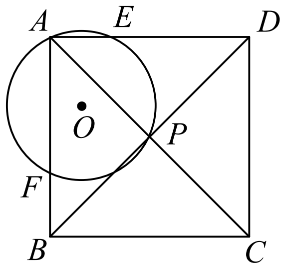
$$f(\underbrace{55\cdots5}_{n個5})=f(\frac{5}{9}(10^n-1))=\frac{9}{5}[\frac{5}{9}(10^n-1)]^2+2\times\frac{5}{9}(10^n-1)$$

$$=\frac{5}{9}(10^n-1)^2+2\times\frac{5}{9}(10^n-1)=\frac{5}{9}(10^n-1)(10^n+1)$$

$$=\frac{5}{9}(10^{2n}-1)=\underbrace{55\cdots5}_{2n個5}$$

故所求的二次函數 $f(x)=\dfrac{9}{5}x^2+2x$ 符合條件。

問題編號
15603



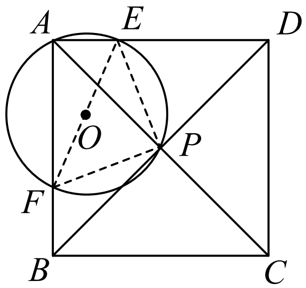
如圖，設有一圓 O 其圓心為 O，圓 O 過正方形 $ABCD$ 的頂點 A 和對角線的交點 P，分別交 $\overline{AB},\overline{AD}$ 於點 F,E。

求證：$\overline{DE}=\overline{AF}$；

若圓 O 的半徑為 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，求 $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$ 之值。

【簡答】 (1) 略 (2) $\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【詳解】



(1) 如圖，聯結 $\overline{PE},\overline{PF},\overline{EF}$。因為 $\angle EAF=90^\circ$，
所以 $\overline{EF}$ 為圓 C 的直徑。於是 $\angle FPE=90^\circ$。
又 $\angle APD=90^\circ$，所以 $\angle EPD=\angle APF$。
顯然 $\overline{PD}=\overline{PA}$，$\angle PAF=\angle PDE=45^\circ$。
因此 $\Delta PDE\cong\Delta PAF$。故 $\overline{DE}=\overline{AF}$。

(2) 因 $\overline{DE}=\overline{AF}$，所以 $\overline{AE}+\overline{AF}=\overline{AD}=\sqrt{2}+1$。
又 $\overline{AE}^2+\overline{AF}^2=\overline{EF}^2=3$，
即 $(\overline{AE}+\overline{AF})^2-2\overline{AE}\cdot\overline{AF}=3$。故 $\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\sqrt{2}$。
於是 $\overline{AE}$，$\overline{AF}$ 的長是方程式 $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}=0$ 的兩個根。
解得 $\overline{AE}=\sqrt{2}$，$\overline{AF}=1$ 或 $\overline{AE}=1$，$\overline{AF}=\sqrt{2}$。
所以 $\frac{\overline{AE}}{\overline{ED}}=\sqrt{2}$ 或 $\frac{\sqrt{2}}{2}$。

問題編號
15604

有一張 8×8 的方格表，表中填入 64 個非負整數（每格一數）。所謂進行一次操作是指：從表中任取一個 3×3 或 4×4 的子方格表（所取的各行、各列必須是相連的），並將這個子方格表中的 9 個或 16 個數都加 1。

證明：存在一張填了非負整數的 8×8 方格表，使得無論經過多少次操作都不能把表中的 64 個數全變成 10 的倍數。

【證明】

一個數為 10 的倍數等價於其末位數為 0，因此只要考慮每個數的末位數即可，這樣問題即為：在填上 64 個一位數(即 $0,1,2,\cdots,9$)的 8×8 方格表中，一定存在一個，使得無論進行多少次操作，都不能把表中的數都變成 0。或是反過來看：從一張全 0 表格(即 64 個數都是 0)出發不可能得到上述的所有方格表。

由於每個方格可取十個數($0,1,2,\cdots,9$)之一，所以 8×8 方格表共有 10^{64} 種。而易知 8×8 表格中有 36 個 3×3 子方格與 25 個 4×4 個子方格，即共有 61 個子方格表。又每張子方格表只能進行 10 次(在模 10 意義下)。於是從全 0 表出發，最多只能得到 10^{61} 種不同的一位數表。因為 $10^{61}<10^{64}$ ，所以必有某個 8×8 方格表不從全 0 表得到。

問題編號
15605

已知有 k 個數列，每個數列都是由至少兩個以上的連續正整數所組成，且每個數列的總和均為 5000，設這些數列當中首項最小者為 m ，試求數對 (k,m) 。

【簡答】 $(4,23)$

【詳解】

設數列為 $a,a+1,\cdots,b-1,b$ ，

由等差級數的公式可知 $\dfrac{(a+b)(b-a+1)}{2}=5000$ ，

則 $(b+a)(b-a+1)=10000=2^4\cdot5^4$ ，

因 $b+a,b-a+1$ 必為一奇數與一偶數，且 $b+a\geq b-a+1$，

則 $\begin{cases}b+a=10000\\b-a+1=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=625\\b-a+1=16\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=125\\b-a+1=80\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=400\\b-a+1=25\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b+a=2000\\b-a+1=5\end{cases}$，

則 $\begin{cases}2a-1=9999\\2b+1=10001\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=609\\2b+1=641\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=45\\2b+1=205\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=375\\2b+1=425\end{cases}$ 或 $\begin{cases}2a-1=1995\\2b+1=2005\end{cases}$，

則 $\begin{cases}a=5000\\b=5000\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=305\\b=320\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=23\\b=102\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=188\\b=212\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=998\\b=1002\end{cases}$，

但 $\begin{cases}a=5000\\b=5000\end{cases}$ 不合題意，

故 $k=4$，$m=23$。

問題編號 15701

已知三相異質數 p,q,r 滿足 $p<q<r$，且 $p+q=r$，及 $(r-p)(q-p)-15p$ 是一個完全平方數，求滿足條件的所有三元序組 (p,q,r)。

【簡答】$(2,17,19)$

【詳解】

由 $p<q<r$ 且 $p+q=r$，及質數中只有 2 為偶數，

可知 $p=2$，所以 $q=r-2$，

則 $(r-p)(q-p)-15p=(r-2)(r-2-2)-15\times2=r^2-6r-22$

$$=(r-3)^2-31\text{ 為一完全平方數，}$$

設 $(r-3)^2-31=n^2$，其中 n 為正整數，

則 $(r-3)^2-n^2=31 \Rightarrow (r-3-n)(r-3+n)=31$，

可推得 $\begin{cases} r-3-n=1 \\ r-3+n=31 \end{cases} \Rightarrow r=19, n=15$，則 $q=r-2=17$，

故 $(p,q,r)=(2,17,19)$

問題編號 15702

已知 $x=\dfrac{b}{a}$，其中 a,b 為互質的正整數，且 $2 \le a \le 7$, $\sqrt{2}-1<x<\sqrt{3}-1$，寫出所有滿足條件的 x。

【簡答】$\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{5}{7}$

【詳解】

$$\sqrt{2}-1<\frac{b}{a}<\sqrt{3}-1 \;\Rightarrow\; (\sqrt{2}-1)a<b<(\sqrt{3}-1)a$$

當 $a=2$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 2<b<(\sqrt{3}-1)\times 2$，故 $b=1$，此時 $x=\dfrac{1}{2}$，

當 $a=3$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 3<b<(\sqrt{3}-1)\times 3$，故 $b=2$，此時 $x=\dfrac{2}{3}$，

當 $a=4$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 4<b<(\sqrt{3}-1)\times 4$，此時 b 不存在，

當 $a=5$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 5<b<(\sqrt{3}-1)\times 5$，故 $b=3$，此時 $x=\dfrac{3}{5}$，

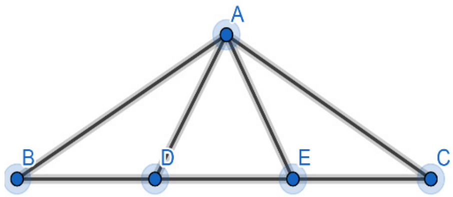
當 $a=6$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 6<b<(\sqrt{3}-1)\times 6$，此時 b 不存在，

當 $a=7$ 時，$(\sqrt{2}-1)\times 7<b<(\sqrt{3}-1)\times 7$，故 $b=3, 4, 5$，此時 $x=\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{5}{7}$，

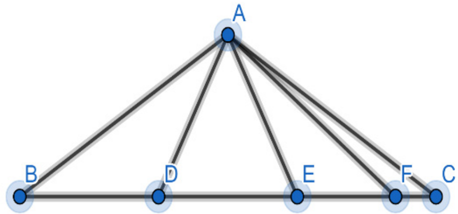
故所有滿足條件的 x 為 $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{5},\dfrac{3}{7},\dfrac{4}{7},\dfrac{5}{7}$。

問題編號
15703

在 ΔABC 中已知 $\overline{AB}=\overline{AC}$，且 D、E 在 $\overline{BC}$ 上使得 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}$，
試證：$\angle DAE>\angle EAC$。



【證明】



利用反證法：

假設 $\angle DAE\le\angle EAC$，可在 $\overline{CE}$ 上取得一點 F 使得 $\angle DAE=\angle EAF$，
因此在□DAF 中 $\overline{AE}$ 是 $\angle DAF$ 的分角線且 $\overline{DE}\ge\overline{EF}$，
$\angle ADF=\angle ABD+\angle BAD$、$\angle AFD=\angle ACF+\angle CAF$、$\angle ABD=\angle ACF$，
$\angle BAD=\angle CAE>\angle CAF$，因此 $\angle ADF>\angle AFD$，
故由大角對大邊得 $\overline{AF}>\overline{AD}$，
在 ΔADF 中使用內分角線性質得 $1\le\dfrac{\overline{DE}}{\overline{EF}}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AF}}<1$，矛盾！故得證。

問題編號
15704

國際象棋中的馬在棋盤中的走法是從 2×3 的 6 個方格中走對角線，如下圖 1。
設棋盤為 9×9 格，而馬在第 5 列第 4 行，如下圖 2。
試問：馬能否恰好遍歷 81 個格子各一次。

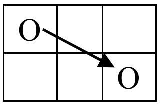


圖 1

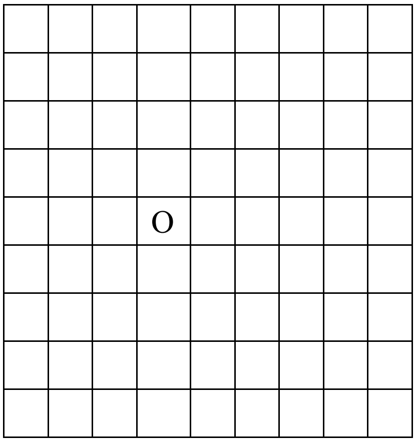


圖 2

【簡答】不能

【說明】

首先分析馬走法的特點。容易發現，若將棋盤黑白相間染色，則馬必從一種顏色的方格移到另一種顏色的方格中，這就提醒我們對棋盤二染色。

【詳解】

將 9×9 格的棋盤黑白相間染色，則不妨設第 1 列第 1 行為黑色，於是有 41 個黑格和 40 個白格。現在第 5 列第 4 行格子為白格，而易知馬只能從一個顏色的格子跳到另一種顏色的格子，馬從白格出發，則至多經歷 40 個白格和 40 個黑格，剩下的一個黑格無法到達。

故馬不能恰好遍歷 81 個格子各一次。

問題編號
15705

數列 $\langle a_n\rangle$ 中， $a_n = a\cdot 2^n + b\cdot n - 80$，其中 a , b 為正整數，已知此數列的前 n 項之和 S_n 取得最小值若且唯若 $n=6$ ，且 a_{36} 能被 7 整除，求 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots\cdots+|a_{12}|$ 的值。

【簡答】8090

【詳解】

$\langle a_n \rangle$ 為遞增數列，由題意 $a_6 < 0$ ，$a_7 > 0$ ，

即 $64a + 6b - 80 < 0$, $128a + 7b - 80 > 0$，其中 a , b 為正整數，

所以，$a = 1$, $b = 1$或 2，

又 a_{36}能被 7 整除，

所以 $a_{36} = 2^{36} + 36b - 80 = 8^{12} + 36b - 80 \equiv 1 + b - 3 \pmod 7$，

因此 $b = 2$ ，故 $a_n = 2^n + 2n - 80$ ，

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots\cdots + |a_{12}| = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_6) + (a_7 + a_8 + \cdots + a_{12})$$

$$= S_{12} - 2S_6 = \frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1} + 2\frac{12 \cdot 13}{2} - 12 \cdot 80 - 2(\frac{2(2^6 - 1)}{2 - 1} + 2\frac{6 \cdot 7}{2} - 6 \cdot 80) = 8090$$